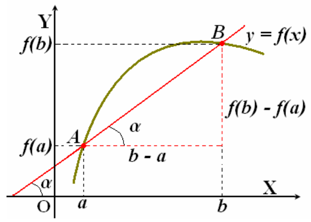
UNIDAD 2 DERIVADAS Y APLICACIONES

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Se define la ***tasa de variación media*** de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ como:



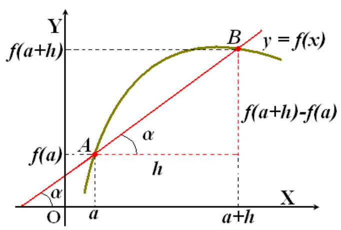
$$TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si considero la recta que une $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, su pendiente es:

$$m = tg\,\alpha = TVM[a,b]$$

Es usual escribir $[a,b] = [a, a+h]$, siendo $\begin{cases} a \rightarrow \text{Extremo inferior del intervalo.} \\ a+h \rightarrow \text{Extremo superior del intervalo.} \\ h \rightarrow \text{Longitud del intervalo.} \end{cases}$

Con lo cual:



$$m = tg\,\alpha = TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo: Halla la TVM de la función $f(x) = 5x - x^2$ en:

a) Los intervalos $[1, 2]$; $[1, 3]$; $[1, 4]$.

b) El intervalo $[1, 1+h]$.

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

Una función $y = f(x)$ ***es derivable en a***, si existe el siguiente límite y es finito:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

En cuyo caso al valor de este límite se le llama **derivada de f en a**, y se escribe $f'(a)$.

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$ (También se escribe $\frac{df}{dx}(a)$)

Si tomamos $x = a + h$ entonces $\begin{cases} x - a = h \\ x \rightarrow a \Rightarrow x - a \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0 \end{cases}$ con lo cual, la definición anterior de derivada de una función en un punto equivale a que exista:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$$

Ejemplo: Sea la función $f(x) = \sqrt{x}$ Calcula, usando la definición de derivada, $f'(1)$ y $f'(3)$.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, hay que calcular un límite para obtener la derivada de una función en cada uno de los puntos en los que se nos pida, lo cual es un trabajo molesto y engorroso.
Es preferible obtener la ***función derivada de $f(x)$***, es decir $f'(x)$, que nos permita obtener fácilmente el valor de la derivada de esa función en un punto "cualquiera" simplemente sustituyendo.

Ejemplo: Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ y úsala para calcular de nuevo $f'(1)$ y $f'(3)$.

También se pueden calcular las ***derivadas sucesivas*** de una función:
Si derivamos dos veces la función $\boldsymbol{f(x)}$ (es decir, hacemos la derivada de la función derivada $\boldsymbol{f'(x)}$) obtenemos la ***derivada segunda*** $\boldsymbol{f''(x)}$; si derivamos tres veces obtenemos la ***derivada tercera*** $\boldsymbol{f'''(x)}$ y así sucesivamente (también se escribe $y', y'', y'''...$).

Dicho de un modo más formal:
Si f es una función derivable en todos los puntos de un intervalo abierto (a,b), entonces la función:

$$\begin{aligned} f' : (a,b) &\to \Re \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$ se llama ***función derivada*** de f.

Si a su vez f' es derivable en (a,b) obtenemos su derivada $(f')' = f''$:

$$\begin{aligned} f'' : (a,b) &\to \Re \\ x &\mapsto f''(x) \end{aligned}$$ que se llama ***función derivada segunda*** de f.

Análogamente se pueden definir $f''', f^{iv)}, f^{v)}...$

Sin embargo, para derivar funciones **NO es necesario hacerlo resolviendo límites** como en el ejemplo anterior.
Existen **sencillas reglas prácticas** con las que se pueden hallar fácilmente las derivadas de las funciones elementales.

Veamos cuales son esas reglas.

3. REGLAS DE DERIVACIÓN

REGLAS DE DERIVACIÓN		
Suma y resta	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
Producto y cociente	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Producto por un número	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	
Composición de funciones y función recíproca	$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$ *Regla de la cadena*	$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$ *con* $f(x) = y$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES			
Funciones simples		***Funciones compuestas***	
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = k \cdot x$	$f'(x) = k$	$g = k \cdot f$	$g' = k \cdot f'$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$g = f^n$	$g' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$g = \sqrt{f}$	$g' = \dfrac{1}{2\sqrt{f}} \cdot f'$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$g = \sqrt[n]{f}$	$g' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}} . f'$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$g(x) = \ln f$	$g'(x) = \dfrac{f'}{f}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$	$g(x) = \log_a f$	$g' = \dfrac{f'}{f \cdot \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$g(x) = e^f$	$g'(x) = e^f \cdot f'$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$g(x) = a^f$	$g' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
$f(x) = sen\ x$	$f'(x) = \cos x$	$g(x) = sen\ f$	$g' = \cos(f) \cdot f'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -sen\ x$	$g(x) = \cos f$	$g' = -sen(f) \cdot f'$
$f(x) = tg\ x$	$f'(x) = 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$g(x) = tg\ f$	$g' = (1 + tg^2 f) \cdot f' = \dfrac{f'}{\cos^2 f} = \sec^2(f) \cdot f'$
$f(x) = \cot g\ x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{sen^2 x} = -\cos ec^2\ x$	$g = \cot g\ f$	$g' = \dfrac{-f'}{sen^2 f} = -\cos ec^2(f) \cdot f'$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = tg\ x \cdot \sec x$	$g = \sec f$	$g' = tg\ f \cdot \sec(f) \cdot f'$
$f(x) = \cos ec\ x$	$f'(x) = -\cot g\ x \cdot \cos ec\ x$	$g = \cos ec\ f$	$g' = -\cot g\ f \cdot \cos ec(f) \cdot f'$
$f(x) = arcsen\ x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g = arcsen\ f$	$g'(x) = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x) = \arccos f$	$g'(x) = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$f(x) = arctg\ x$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$g(x) = arctg\ f$	$g'(x) = \dfrac{f'}{1+f^2}$
$f(x) = arc\cot g\ x$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$g = arc\cot g\ f$	$g' = \dfrac{-f'}{1+f^2}$

Derivación potencial - exponencial:

$$y = f(x)^{g(x)}$$

1º) Se aplican logaritmos a los dos miembros y se usan sus propiedades.
2º) Se derivan ambos miembros.
3º) Se despeja ***y´*** y se sustituye ***y*** por su valor.

Ejemplo:

$$y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln x \Rightarrow \ln y = (\ln x)^2$$

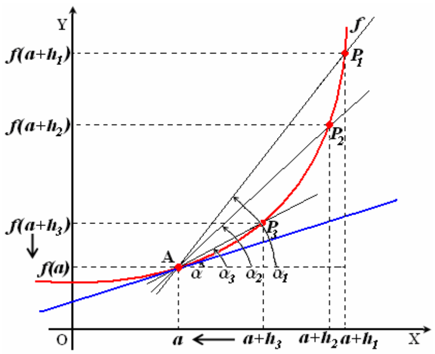
$$\frac{y'}{y} = \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow y' = x^{\ln x} \cdot \frac{2\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow y' = x^{\ln x - 1} \ln x^2$$

4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

¿Qué ha ocurrido en la gráfica de $y = f(x)$ al tomar este límite "en la tasa de variación media"?

Todas estas rectas son *secantes* a la función con un punto común $A(a, f(a))$.



$$m_{AP_1} = tg\,\alpha_1 = TVM[a, a+h_1] = \frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}$$

$$m_{AP_2} = tg\,\alpha_2 = TVM[a, a+h_2] = \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}$$

$$m_{AP_3} = tg\,\alpha_3 = TVM[a, a+h_3] = \frac{f(a+h_3)-f(a)}{h_3}$$

Si $h_i \to 0$ entonces $P_i \to A$, con lo cual la recta tangente a f en $A(a, f(a))$ se obtiene como límite de las rectas secantes.

Pero además, la pendiente m de la recta tangente a la función f en $A(a, f(a))$ es:

$$m = tg\ \alpha = \lim_{\alpha_i \to \alpha} tg(\alpha_i) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a), \text{ es decir:}$$

$$\boxed{m = f'(a)}$$

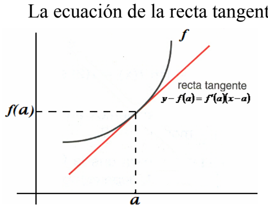
El resultado anterior $(que\ m = f'(a))$ se conoce como ***Interpretación geométrica de la derivada*** y nos dice que:

Derivada de una funcion f en a $=\begin{cases}\textbf{Pendiente de la recta tangente a la gráfica}\\ \textbf{de la función } f \textbf{ en el punto } A(a, f(a))\end{cases}$

5. RECTAS TANGENTE Y NORMAL A UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

5.1. RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN $y = f(x)$ EN UN PUNTO $A(a, f(a))$

La ecuación de la recta tangente en su forma punto pendiente es $y - f(a) = m(x-a)$.



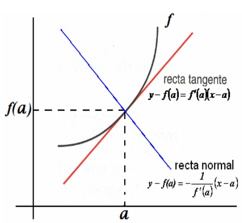
Pero $m = f'(a)$ (Por la interpretación geométrica de la derivada).

Por tanto:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)} \leftarrow \begin{cases}\text{Ecuación de la recta tangente}\\ \text{a la gráfica de } f \text{ en el punto}\\ A(a, f(a))\end{cases}$$

5.2. RECTA NORMAL A UNA FUNCIÓN $y = f(x)$ EN UN PUNTO $A(a, f(a))$

La ecuación de la recta normal en su forma punto pendiente es $y - f(a) = m'(x-a)$.



Las rectas tangente y normal son perpendiculares entre sí.
Condición de perpendicularidad:

$$m \cdot m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(a)}$$

Por tanto:

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)} \leftarrow \begin{cases}\text{Ecuación de la recta normal}\\ \text{a la gráfica de } f \text{ en el punto}\\ A(a, f(a))\end{cases}$$

Ejemplo 1: Sea $f(x) = \sqrt{tg(\ln x)}$. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e^{\frac{\pi}{4}}$. ***(Navarra. Junio 2005)***

Solución: Tangente: $y = e^{-\frac{\pi}{4}}x$ Normal: $y = -e^{\frac{\pi}{4}}x + e^{\frac{\pi}{2}} + 1$

Ejemplo 2: **(2013-M3-A-1)** Sea $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ para $x > 0, x \neq 1$. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

Solución: Tangente: $y = e$ Normal: $x = e$

6. DERIVADAS LATERALES

A los siguientes límites, si existen y son finitos, se les llama:

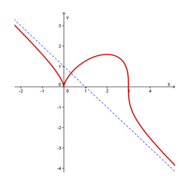
$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Derivada ***por la derecha*** de f en a. Derivada ***por la izquierda*** de f en a.

Ambos límites reciben el nombre de ***derivadas laterales*** de la función f en a.

Propiedad:
f es derivable en $a \Leftrightarrow$ Existen $\begin{cases}f'(a^+)\\ f'(a^-)\end{cases}$, son finitas y $f'(a^+) = f'(a^-)$
En cuyo caso, $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$

Ejemplo: Estudia la derivabilidad de $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$ en $x = 0$ obteniendo el valor de sus derivadas laterales.



Solución:

$$\left.\begin{aligned}f'(0^-) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{3h^2-h^3}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}\sqrt[3]{\frac{3h^2-h^3}{h^3}} = \lim_{h\to 0^-}\sqrt[3]{\frac{3}{h}-1} = -\infty\\ f'(0^+) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{3h^2-h^3}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{3h^2-h^3}{h^3}} = \lim_{h\to 0^+}\sqrt[3]{\frac{3}{h}-1} = +\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$ y además **no** son finitas $\Rightarrow f$ **no** es derivable en $x = 0$.

Ejercicio: Obtén las derivadas laterales de $g(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$ en $x = 0$. ¿Qué conclusión sacas? ¿Es g continua en $x = 0$? ¿Se debe exigir que haya continuidad para estudiar la derivabilidad?

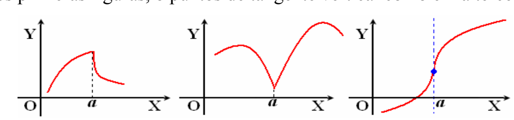
7. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si observas el ejemplo anterior está claro que:

"Una función continua en a NO tiene por qué ser derivable en a " (<u>podrá serlo o no</u>).

Si ***f es continua en a pero no derivable en a***, tendremos puntos "angulosos" (con pico) como en las dos primeras figuras, o puntos de tangente vertical como en la tercera:

Demostración:
f derivable en $\boldsymbol{a} \Rightarrow$
$\exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$
$\Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0$
(En caso contrario, Ind. $\frac{k}{0} \Rightarrow$ *No finito*)
$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
$\Rightarrow f$ continua en ***a.***



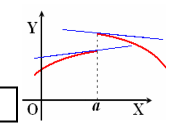
Funciones ***continuas*** *en* ***<u>a</u>*** *pero* ***no derivables*** *en* ***<u>a</u>***.

Sin embargo:

Propiedad:
Si f es derivable en $a \Rightarrow f$ es continua en a

Por tanto:

*Si f **NO** es continua en $a \Rightarrow$ **NO** puede ser derivable en a*



Función ***no continua*** *en* ***<u>a</u>*** *y, por tanto,* ***no derivable*** *en* ***<u>a</u>***

Una función derivable tendrá una gráfica "suave" sin "puntos angulosos".

Ejemplo 1: Estudie la continuidad y derivabilidad de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^2 & si\ x\le 2\\ \dfrac{36}{2+x} & si\ x>2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-5} & si \quad x<2\\ 2x^2-10x & si \quad x\ge 2\end{cases}$.

(Canarias. Junio 2006)

***Ejemplo 2*: (2012-M6-A-1)** Sea la función derivable $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{a}{x-2} & \text{si } x<1\\ a+\dfrac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$.

Calcula los valores de a y b. *Solución*: $a=1/4;\ b=1/2$.

***Ejemplo 3*: (2011-M1-B-1)** Sea $f:\left[\dfrac{1}{e},4\right]\to\Re$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}x-\ln(x)+a & si \quad \dfrac{1}{e}\le x\le 2\\ bx+1-\ln 2 & si \quad 2<x\le 4\end{cases}$.

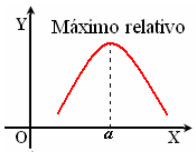
Calcula a y b para que f sea derivable en el intervalo $(1/e,4)$. *Solución*: $a=0;\ b=1/2$.

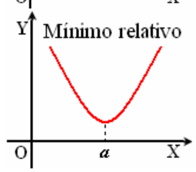
Ejemplo 4: Estudia la derivabilidad de: *a)* $f(x)=|x-2|$ *b)* $f(x)=x\,|x-2|$ *c)* $f(x)=|x^2-4|$.

Ejemplo 5: Estudia la derivabilidad de $f(x)=2x+|-x^2+1|$. Esboza la gráfica de f.

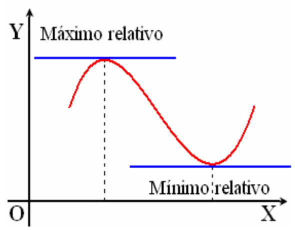
8. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

8.1. MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS (EXTREMOS RELATIVOS)





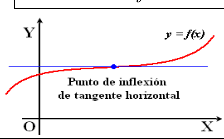
- f tiene un ***máximo relativo (o local)*** en a si existe un entorno de a, $(a-r,a+r)$, en el cual:
$$\begin{cases}si\ x<a\Rightarrow f(x)<f(a)\\ si\ x>a\Rightarrow f(x)<f(a)\end{cases}$$
- f tiene un ***mínimo relativo (o local)***en a si existe un entorno de a, $(a-r,a+r)$, en el cual:
$$\begin{cases}si\ x<a\Rightarrow f(x)>f(a)\\ si\ x>a\Rightarrow f(x)>f(a)\end{cases}$$
- Si f presenta un máximo o un mínimo relativo en a diremos que f presenta un ***extremo relativo en*** a.



Si f alcanza un extremo relativo en $x=a\Rightarrow$La recta **tangente** (si existe, es decir, si f *es derivable en* a) a f en ese punto es **horizontal** y tendrá pendiente cero $\Rightarrow f'(a)=0$.

Puntos críticos** o **singulares: son aquellos en los que $f'(a)=0$, es decir, los "candidatos" a máximos o mínimos relativos. Los puntos críticos <u>se obtienen resolviendo</u> la ecuación $f'(x)=0$.

Propiedad: (Condición necesaria pero NO suficiente para la existencia de extremos relativos)   *Si f es derivable en a y tiene un extremo relativo en $a\Rightarrow f'(a)=0$*



Sin embargo, que $f'(a)=0$ **NO** implica que tenga un extremo relativo en a como podemos observar en la gráfica de esta función **(Pero SÍ proporciona los "candidatos")**.

Propiedad: *Si $f'(a)=0$ entonces:*   *a) Si $f''(a)<0\Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en a*   *b) Si $f''(a)>0\Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a*

Ejemplo 1: Estudiar los extremos relativos de la función $f(x)=x^3-3x+2$

Solución: Máximo relativo en $x=-1$con valor $f(-1)=4\Rightarrow M(-1,4)$

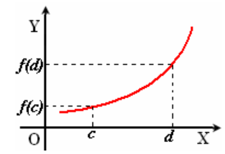
Mínimo relativo en $x=1$con valor $f(1)=0\Rightarrow m(1,0)$

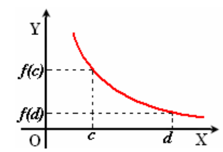
Ejemplo 2: Estudiar los extremos relativos de la función $f(x)=x^3-9x^2+24x-3$

Solución: Máximo relativo en $x=2$ con valor $f(2)=17\Rightarrow M(2,17)$

Mínimo relativo en $x=4$ con valor $f(4)=13\Rightarrow m(4,13)$

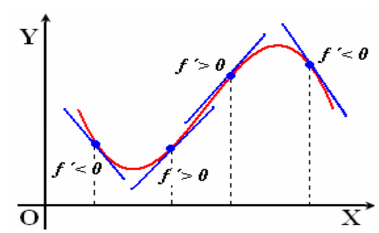
8.2. *CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO (MONOTONÍA)*





- f es ***estrictamente creciente*** en un intervalo abierto (a,b), si para cualquier pareja de números reales $c,d\in(a,b)$ se cumple que $si\ c<d\Rightarrow f(c)<f(d)$.
- f es ***estrictamente decreciente*** en un intervalo abierto (a,b), si para cualquier pareja de números reales $c,d\in(a,b)$ se cumple que $si\ c<d\Rightarrow f(c)>f(d)$.
- Si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en un intervalo abierto (a,b), diremos que f es ***estrictamente monótona en*** (a,b).

Observa la gráfica adjunta de una función derivable:



Si f es estrictamente creciente en un intervalo abierto, las rectas tangentes en los puntos de ese intervalo también lo serán$\Rightarrow$ sus pendientes serán positivas$\Rightarrow f'>0$ en ese intervalo.

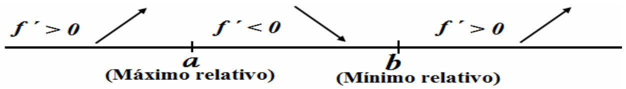
Por otro lado, si $f'>0$ en un intervalo abierto en el que f es derivable$\Rightarrow$ Las pendientes de las rectas tangentes serán positivas$\Rightarrow$Las rectas tangentes serán estrictamente crecientes$\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en ese intervalo abierto.

Análogamente, si f es estrictamente decreciente en un intervalo abierto, las rectas tangentes en los puntos de ese intervalo también lo serán y por tanto sus pendientes serán negativas$\Rightarrow f'<0$en ese intervalo.

Por otro lado, si $f'<0$ en un intervalo abierto en el que f es derivable$\Rightarrow$ Las pendientes de las rectas tangentes serán negativas$\Rightarrow$Las rectas tangentes serán estrictamente decrecientes$\Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en ese intervalo abierto.

Propiedad: *Sea f una función derivable en un intervalo abierto (a,b).*   *a) Si $f'>0$ en $(a,b)\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a,b).*   *b) Si $f'<0$ en $(a,b)\Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en (a,b).*   *c) Si $f'=0$ en $(a,b)\Rightarrow f$ es constante en (a,b).*

Para determinar los intervalos de monotonía de una función derivable así como sus extremos relativos, tendremos en cuenta el signo de la primera derivada de acuerdo con el siguiente esquema de la recta real.



En el caso de que existan **puntos en los que f no es continua o no es derivable**, también **habrá que considerarlos** al hacer el esquema anterior.

> ***Propiedad:*** *Si a es un punto crítico de f (es decir, $f'(a)=0$) y*
>
> $$a)\ \left.\begin{array}{l} f'>0 \text{ a su izquierda } (\text{est. creciente}) \\ f'<0 \text{ a su derecha } (\text{est. decreciente}) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un máximo relativo en } a$$
>
> $$b)\ \left.\begin{array}{l} f'<0 \text{ a su izquierda } (\text{est. decreciente}) \\ f'>0 \text{ a su derecha } (\text{est. creciente}) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un mínimo relativo en } a$$

***Ejemplo 1*:** Estudia la monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=2x^3-3x^2 \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2+4}{x} \qquad c)\ f(x)=\frac{2\ln(x)}{x^2}$$

c) (2013-M2;Sept-B-1)

Solución: a) Estr. creciente en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$; Estr. decreciente en $(0,1)$

Máximo relativo en $x=0$ con valor $f(0)=0\Rightarrow M(0,0)$

Mínimo relativo en $x=1$ con valor $f(1)=-1\Rightarrow m(1,-1)$

b) Estr. creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; Estr. decreciente en $(-2,0)\cup(0,2)$

Máximo relativo en $x=-2$ con valor $f(-2)=-4\Rightarrow M(-2,-4)$

Mínimo relativo en $x=2$ con valor $f(2)=4\Rightarrow m(2,4)$

c) Estr. creciente en $(0,\sqrt{e})$; Estr. decreciente en $(\sqrt{e},+\infty)$

Máximo relativo en $x=\sqrt{e}$ con valor $f(\sqrt{e})=e^{-1}\Rightarrow M(\sqrt{e},e^{-1})$

***Ejemplo 2*:** Halla a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(2,-15)$.

Solución: $a=0; b=-12.\quad f(x)=x^3-12x+1$

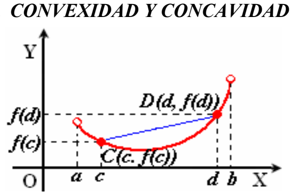
***Ejemplo 3*:** Determina p y q para que la gráfica de $f(x)=x^2+px+q$ pase por $A(-2,1)$ y tenga un mínimo relativo en $x=-3$.

Solución: $p=6; q=9.\quad f(x)=x^2+6x+9$

***Ejemplo 4*:** Halla un polinomio mónico de tercer grado sabiendo que alcanza un mínimo relativo en $x=1$ y que la recta de ecuación $y=x+1$ es tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=0$.

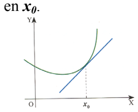
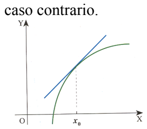
Solución: $f(x)=x^3-2x^2+x+1$

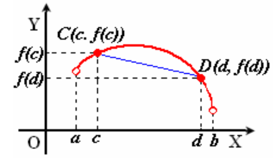
8.3. CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD (CURVATURA)



- f es ***convexa*** en un intervalo abierto (a,b), si para cualquier pareja de números reales $c,d\in(a,b)$ se cumple que, la cuerda que une los puntos $C(c,f(c))$ y $D(d,f(d))$ se mantiene "por encima" de la gráfica de la función.

$$f((1-\alpha)c+\alpha d)\le(1-\alpha)f(c)+\alpha f(d)\quad 0<\alpha<1$$

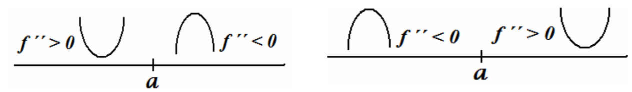
> ***Definición equivalente***
> f es ***convexa*** en x_0 si en un entorno de x_0, (x_0-r, x_0+r), la gráfica de la función se mantiene "por encima" de la recta tangente a f en x_0.
>
> 
>
> f es ***cóncava*** en x_0 en caso contrario.
>
> 



- f es ***cóncava*** en un intervalo abierto (a,b), si para cualquier pareja de números reales $c,d\in(a,b)$ se cumple que, la cuerda que une los puntos $C(c,f(c))$ y $D(d,f(d))$ se mantiene "por debajo" de la gráfica de la función.

$$f((1-\alpha)c+\alpha d)\ge(1-\alpha)f(c)+\alpha f(d)\quad 0<\alpha<1$$

Para determinar los intervalos de convexidad y de concavidad de una función tendremos en cuenta el signo de la segunda derivada de acuerdo con el siguiente esquema de la recta real:

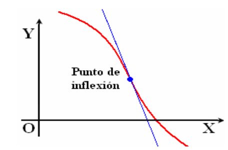


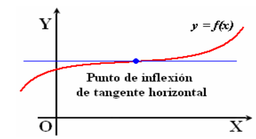
En el caso de que existan **puntos en los que f no es continua o no es derivable**, también **habrá que considerarlos** al hacer el esquema anterior.

Por tanto:

> ***Propiedad:***
> *Si $f''>0$ en un intervalo abierto $(a,b)\Rightarrow f$ es convexa en (a,b).*
> *Si $f''<0$ en un intervalo abierto $(a,b)\Rightarrow f$ es cóncava en (a,b).*

Además, diremos que f presenta en a un ***punto de inflexión*** si en $(a,f(a))$ la función pasa de ser convexa a cóncava o viceversa (la recta tangente atravesará la curva).





"Candidatos" a puntos de inflexión: son aquellos en los que $f''(a)=0$. Es decir, los posibles puntos de inflexión se obtienen resolviendo la ecuación $f''(x)=0$. El ***cambio de curvatura*** nos asegurará que, en efecto, estamos en presencia de un punto de inflexión siempre que la función sea, al menos, continua en ***a***. También podemos aplicar la siguiente propiedad:

> ***Propiedad:***
> *Si $f''(a)=0$ y $f'''(a)\ne 0\Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en a*

> ***Propiedad:***
> Si
> $f'(a)=f''(a)=\ldots$
> $\ldots=f^{n-1)}(a)=0$
> y $f^{n)}(a)\ne 0$.
> **Entonces:**
> - Si ***n*** es par $\Rightarrow$ Extremo relativo en $x=a$.
> - Si ***n*** es impar $\Rightarrow$ Punto de inflexión en $x=a$.

***Ejemplo 1*:** Estudia la curvatura y puntos de inflexión de $f(x)=x^4-6x^3+12x^2+10x+8$.

Solución: Convexa en $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$; Cóncava en $(1,2)$

Punto de inflexión en $x=1$ con valor $f(1)=25\Rightarrow P_1(1,25)$

Punto de inflexión en $x=2$ con valor $f(2)=34\Rightarrow P_2(2,34)$

Ejemplo 2: Estudia la monotonía y curvatura de las siguientes funciones. Esboza sus gráficas.

$$a)\ f(x)=x^3+3x^2 \qquad b)\ f(x)=x^4-2x^3$$

Solución: a) Estr. creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$; Estr. decreciente en $(-2,0)$

Máximo relativo en $x=-2$ con valor $f(-2)=4\Rightarrow M(-2,4)$

Mínimo relativo en $x=0$ con valor $f(0)=0\Rightarrow m(0,0)$

Convexa en $(-1,+\infty)$; Cóncava en $(-\infty,-1)$

Punto de inflexión en $x=-1$ con valor $f(-1)=2\Rightarrow P(-1,2)$

b) Estr. decreciente en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$; Estr. creciente en $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

Mínimo relativo en $x=\frac{3}{2}=1.5$ con valor $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{16}\approx-1.7\Rightarrow m\left(\frac{3}{2},-\frac{27}{16}\right)$

Convexa en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$; Cóncava en $(0,1)$

Punto de inflexión en $x=0$ con valor $f(0)=0 \Rightarrow P_1(0,0)$

Punto de inflexión en $x=1$ con valor $f(1)=-1 \Rightarrow P_2(1,-1)$

***Ejemplo 3*: (2004-M3-B-1)** Sea $f:[0,2\pi]\rightarrow \Re$ la función definida por $f(x)=e^x(\cos x + sen\,x)$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) Halla los extremos relativos (locales) y absolutos (globales) de f.

c) **(2008-M5-A-1)** Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución: a) Estr. creciente en $(0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi)$; Estr. decreciente en $(\pi/2,3\pi/2)$

b) Máximo relativo en $x=\pi/2$ con valor $f(\pi/2)=e^{\pi/2}\Rightarrow M_1(\pi/2,e^{\pi/2})$

Mínimo rel. y absoluto en $x=3\pi/2$ con valor $f(3\pi/2)=-e^{3\pi/2}\Rightarrow m(3\pi/2,-e^{3\pi/2})$

Máximo absoluto en $x=2\pi$ con valor $f(2\pi)=e^{2\pi}\Rightarrow M_2(2\pi,e^{2\pi})$

c) $P_1(\pi/4,\sqrt{2}\,e^{\pi/4})$; $P_2(5\pi/4,-\sqrt{2}\,e^{5\pi/4})$.

Ejemplo 4: Calcula a,b y c para que $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ corte al eje X en $x=1$ y tenga un punto de inflexión en $B(3,2)$.

Solución: $a=-9; b=24; c=-16$. $f(x)=x^3-9x^2+24x-16$.

8.4. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

En matemáticas y en otras disciplinas científicas se trata con frecuencia de optimizar una función (hacer máximos o mínimos unos costes, un volumen o área, unos beneficios...).

Para resolverlos:

1º) Construimos la función a maximizar o minimizar y se expresa con una sola variable.

2º) Se hallan los máximos y/o mínimos de esa función. Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, habrá que tener en cuenta el valor que toma la función en a y b.

3º) Se interpretan los resultados rechazando los no posibles por la naturaleza del problema.

***Ejemplo 1*:** Hallar dos números positivos cuya suma es 20 sabiendo que su producto es máximo.
Solución: $x=10$; $y=10$.

***Ejemplo 2*:** Una empresa quiere fabricar cajas de cartón sin tapa con piezas cuadradas de 1m. de lado recortándoles las cuatro esquinas. Calcular las dimensiones de los cortes para obtener un volumen máximo. *Solución*: $x=1/6\,m; V_{máx}=2/27\,m^3$.

***Ejemplo 3*:** Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en una circunferencia de 30 cm. de diámetro. *Solución*: $x=y=15\sqrt{2}cm$ Un cuadrado.

***Ejemplo 4*:** De todos los triángulos isósceles de 30 cm. de perímetro, ¿cuál es el de área máxima?
Solución: Equilátero de $10cm$ de lado.

***Ejemplo 5*:** Determina el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio $3cm$. *Solución*: $r=\sqrt{6}cm; h=2\sqrt{3}cm$.

***Ejemplo 6*:** **(2006-M2;Sept-B-1)** Un alambre de longitud 1m. se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con otro una circunferencia. Calcule las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.
Solución: Primer trozo $=4/(\pi+4)$; Segundo trozo $=\pi/(\pi+4)$

***Ejemplo 7*:** Halla el punto de la parábola $y=x^2$ más cercano a $A(3,0)$. *Solución*: *P(1, 1)*

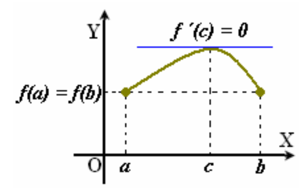
***Ejemplo 8*:** Un espejo rectangular mide 1m de alto y 70cm de ancho. Se rompe un pico con forma de triángulo rectángulo de catetos 9cm y 6cm. ¿Cómo hay que cortar el espejo para que siga siendo rectangular y tenga área máxima? *Solución*: $x=196/3\,cm$; $y=98cm$.

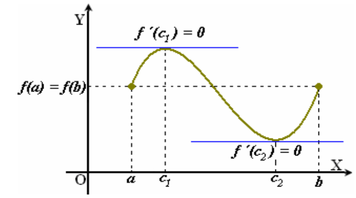
9. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES DERIVABLES

9.1. TEOREMA DE ROLLE

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).
Si además $f(a)=f(b)\Rightarrow$ Existe $c\in(a,b)$ *tal que* $f'(c)=0$.

Interpretación geométrica:





Hay al menos un punto $P(c,f(c))$ de la gráfica de la función en el que la recta tangente es horizontal (su pendiente es cero), con $c\in(a,b)$.

***Ejemplo 1*:** Comprobar que la función $f(x)=sen\,x$ cumple las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0,\pi]$, y encontrar el valor $c\in(0,\pi)$ tal que $f'(c)=0$.
Solución: $c=\pi/2$.

***Ejemplo 2*:** Comprobar que la función $f(x)=x^2-5x+6$ cumple las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[2,3]$. Encontrar el valor $c\in(2,3)$ tal que $f'(c)=0$. *Solución*: $c=5/2$.

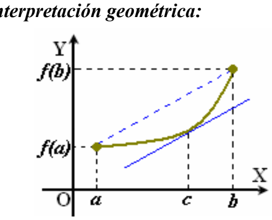
***Ejemplo 3*:** Prueba que la ecuación $xe^x=2$, tiene una única solución en el intervalo $(0,1)$.

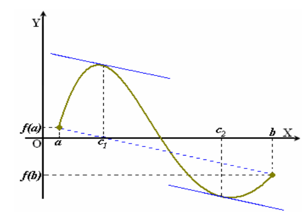
***Ejemplo 4*:** Prueba que la ecuación $x^3=3x-1$, tiene una única solución en el intervalo $(-1,1)$.

9.2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE (INCREMENTOS FINITOS)

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).
$\Rightarrow$ Entonces **existe** $c\in(a,b)$ *tal que* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Interpretación geométrica:





Hay al menos un punto $P(c,f(c))$ de la gráfica de la función en el que la tangente a la curva es paralela a la cuerda que une los puntos $A(a,f(a))$ y $B(b,f(b))$.

***Ejemplo 1*:** Dada la función $f:[0,2\pi]\rightarrow\Re$ definida por $f(x)=2x+sen\,x$, comprueba que cumple las hipótesis del Teorema del valor medio y halle todos los puntos a los que hace referencia. *Solución*: $c_1=\pi/2$ *y* $c_2=3\pi/2$.

***Ejemplo 2*:** ¿Se puede aplicar el Teorema del valor medio a la función $f(x)=|x|$ en $[-1,2]$?

Ejemplo 3: Aplicando el Teorema de Lagrange, demuéstrese que para $x>0$ se verifica:

$$arctg\ 2x - arctg\ x < \frac{x}{1+x^2}$$

(Castilla y León. Junio 2005)

Solución:

Se considera la función $f(x)=arctg\,x$ en el intervalo $[x,\ 2x]$.

f continua en $[x,\ 2x]$ y derivable en $(x,\ 2x)$ $\underset{TVM}{\Rightarrow}$ $\exists\ c\in(x,\ 2x)$ tal que

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x}=f'(c)\Rightarrow\frac{arct\ 2x - < arct\ x}{x}=\frac{1}{1+c^2}$$

Como:

$$x<c\Rightarrow x^2<c^2\Rightarrow 1+x^2<1+c^2\Rightarrow\frac{1}{1+c^2}<\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\frac{arct\ 2x - < arct\ x}{x}<\frac{1}{1+x^2}$$

Observación: (Fórmula de los Incrementos Finitos)

Si escribimos $[a,b]=[a,a+h]$, siendo $\begin{cases} a\rightarrow \text{Extremo inferior del intervalo.}\\ \text{b = a + h}\rightarrow\text{Extremo superior del intervalo (b - a = h).}\\ \text{h}\rightarrow\text{Longitud del intervalo.}\end{cases}$

Entonces $c=a+\theta\cdot h$ con $0<\theta<1$, y el teorema del valor medio tendrá la forma:

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)\cdot h}\ \leftarrow \textit{Fórmula de los incrementos finitos}$$

Y nos proporciona el valor de la función en un entorno de a.

Ejemplo 1: Usando la fórmula de los incrementos finitos obtén una aproximación de $\sqrt{69}$.

Solución:

Se considera la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[64,\ 69]$. Fíjate: $h=5$.

f continua en $[64,\ 69]$ y derivable en $(64,\ 69)$ $\underset{FIF}{\Rightarrow}$ $\exists\ \theta\in(0,1)$ tal que

$$f(69)=f(64)+f'(64+\theta 5)\cdot 5\Rightarrow\sqrt{69}=\sqrt{64}+\frac{1}{2\sqrt{64+5\theta}}5\approx 8+\frac{5}{2\cdot 8}\Rightarrow\sqrt{69}\approx 8.31$$

Además, podemos acotar el error cometido:

$$\frac{1}{\sqrt{81}}<\frac{1}{\sqrt{64+5\theta}}<\frac{1}{\sqrt{64}}\ \text{ ya que }\ \sqrt{64}<\sqrt{64+5\theta}<\sqrt{81}\ \text{ (raíces exactas más cercanas).}$$

Ejemplo 2: Usando la fórmula de los incrementos finitos demuestra que $\frac{1}{9}<\sqrt{66}-8<\frac{1}{8}$.

Solución:

Se considera la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[64,\ 66]$. Fíjate: $h=2$.

f continua en $[64,\ 66]$ y derivable en $(64,\ 66)$ $\underset{FIF}{\Rightarrow}$ $\exists\ \theta\in(0,1)$ tal que

$$f(66)=f(64)+f'(64+2\theta)\cdot 5\Rightarrow\sqrt{66}=\sqrt{64}+\frac{1}{2\sqrt{64+2\theta}}2=8+\frac{1}{\sqrt{64+2\theta}}\ *$$

$$\text{Además }\sqrt{64}<\sqrt{64+5\theta}<\sqrt{81}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{81}}<\frac{1}{\sqrt{64+2\theta}}<\frac{1}{\sqrt{64}}\Rightarrow\frac{1}{9}<\frac{1}{\sqrt{64+2\theta}}<\frac{1}{8}$$

Sumando 8 en los tres miembros de la desigualdad y teniendo en cuenta $*$:

$$\frac{1}{9}+8<8+\frac{1}{\sqrt{64+2\theta}}<\frac{1}{8}+8\Rightarrow\frac{1}{9}+8<\sqrt{66}<\frac{1}{8}+8\Rightarrow\frac{1}{9}<\sqrt{66}-8<\frac{1}{8}$$

9.3. TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO O DE CAUCHY

Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b).
$\Rightarrow$ Entonces **existe** $c\in(a,b)$ *tal que*

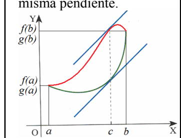
$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c).$$

Fíjate:
Si además

$$\left.\begin{matrix} f(a)=g(a)\\ f(b)=g(b)\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f'(c)=g'(c)}$$

Es decir, en esos dos puntos las tangentes son paralelas ya que tienen la misma pendiente.



Interpretación geométrica:

Si $g(a)\neq g(b)$ y $g'(c)\neq 0\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Rightarrow\ \boldsymbol{f'(c)=kg'(c)}$ con $k\in\Re$.

Existen dos puntos *(c, f(c))* y *(c, g(c))* de las curvas *f(x)* y *g(x)*, tales que la pendiente de la tangente a la curva *f(x)* en el primer punto es *k* veces la pendiente de la tangente a la curva *g(x)* en el segundo punto.

Ejemplo 1: Comprueba si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=x-3$ en el intervalo $[0,\ 3]$ y, en caso afirmativo, hallar el valor del punto intermedio *c*. *Solución*: $c=\sqrt{3}$.

Ejemplo 2: Comprueba si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x)=sen\ x$ y $g(x)=cos\ x$ en el intervalo $[\pi/6,\ \pi/3]$ y, en caso afirmativo, hallar el valor del punto intermedio *c*. *Solución*: $c=\pi/4$.

9.4. REGLA DE L´HÔPITAL

Si dos funciones f y g son derivables en un entorno de a y:

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

Entonces:

Si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow$ Existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$ y además son iguales:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Observaciones: 1ª) La Regla de L´Hôpital puede también aplicarse a indeterminaciones de la forma $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e igualmente cuando $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$.

También es válida en el cálculo de límites laterales.

2ª) También es aplicable a indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty,\ \infty^0,\ 1^\infty, 0^0$.

Para ello deberemos transformar en cocientes de la forma $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo1: Calcula, aplicando la regla de L´Hôpital, los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sen\,x}$ $\quad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}$ $\quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-sen\,x}$ $\quad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{x^2}$

$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-sen\,x}{sen\,x^2}$ $\quad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x-sen}$ **(2018-M6-A-1)** $\quad g)\ \lim_{x\to 0^+}(x^3\ln x)$ $\quad h)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen\,x}-\frac{1}{x}\right)$

$i)\ \lim_{x\to+\infty}\ln x^{\frac{1}{e^x}}$ $\quad j)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg\,x-5}{\sec x+4}$ $\quad k)\ \lim_{x\to 0}\frac{arcsen\,x}{tg\,x}$

Soluciones: a) 2; b) 1; c) 2; d) 0; e) 0; f) 2; g) 0; h) 0; i) 0; j) 1; k) 1.

***Ejemplo 2*:(2005-M3-A-1)** Se sabe que $\lim_{x\to 0}\frac{x-\alpha\,sen\,x}{x^2}$ es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

Solución: $\alpha=1$ y el límite toma el valor 0.

10. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para llevar a cabo la representación gráfica de una función estudiaremos los siguientes puntos:

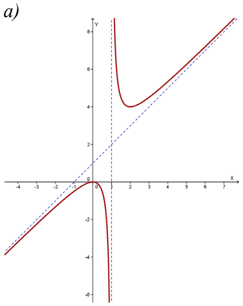
1. Dominio de la función.
2. Puntos de corte con los ejes. (Esto nos permitirá, además, conocer el "*signo de la función*").
3. Simetrías.
4. Periodicidad.
5. Continuidad, discontinuidades y asíntotas.
6. Monotonía. Extremos relativos.
7. Curvatura. Puntos de inflexión.
8. Si es necesario, cálculo de otros puntos de la gráfica construyendo una tabla de valores.

***Ejemplos*:** Representa gráficamente las siguientes funciones:

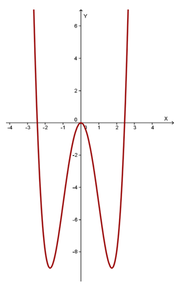
$a)\ f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ $b)\ f(x)=x^4-6x^2$ $c)\ f(x)=\sqrt{x^2-10x}$ $d)\ f(x)=e^{-x^2}$ $e)\ f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ $f)\ f(x)=sen\,x$

Soluciones:

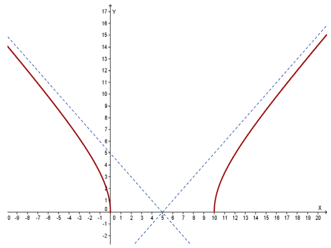
a)



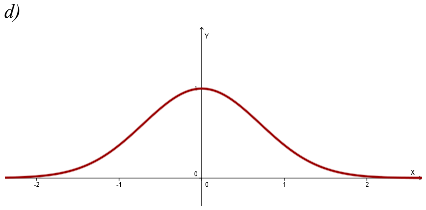
b)



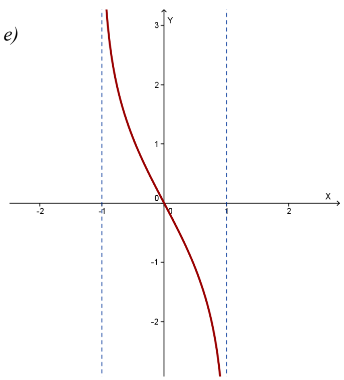
c)



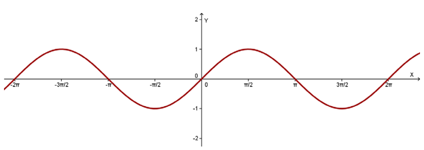
d)



e)



f)

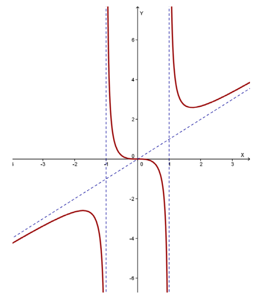


***Ejercicio*:** Representa gráficamente las siguientes funciones:

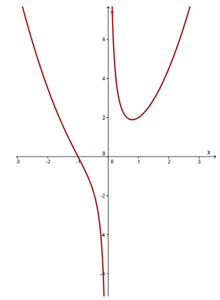
$a)\ f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ $b)\ f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$ $c)\ f(x)=\ln\left(x^2-9\right)$ $d)\ f(x)=x^4e^{-x}$ $e)\ f(x)=\cos(x)$

Soluciones:

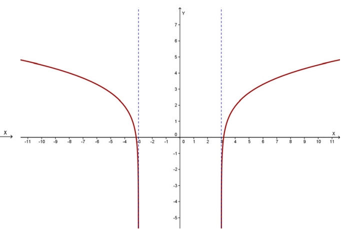
a)



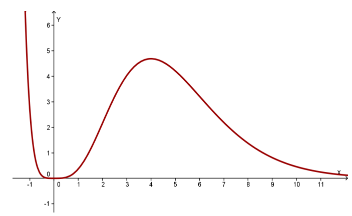
b)



c)



d)



e)