(1)

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & si\ x\le 0 \\ ax+b & si\ 0<x\le 1 \\ 1+x\ln(x) & si\ x\ge 1\end{cases}$$

a) valores de a e b para que f sexa continua en $\mathbb{R}$

xe^{x^2} | $ax+b$ | $1+x\ln x$ — 0, 1

Continuidade cando $x\neq 0$ e $x\neq 1$

- $(-\infty,0)$ $y=x\cdot e^{x^2}$ continua en $\mathbb{R}$ por ser un produto dunha polinómica (x) por unha exponencial $(y=e^{x^2})$ que son continuas en $\mathbb{R}$. Entón f é continua en $(-\infty,0)$
- $(0,1)\to y=ax+b$, polinómica $\Rightarrow$ continua en $\mathbb{R}\Rightarrow$ continua en $(0,1)$
- $(1,+\infty)\to y=1+x\ln x$, $\operatorname{dom} y=(0,+\infty)\Rightarrow$ continua en $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ continua en $(1,+\infty)$

CONTINUIDADE EN X=0 — $y=x\cdot e^{x^2}$ | $y=ax+b$ (0)

(1) $f(0)=0\cdot e^{0^2}=0$

(2) $\lim_{x\to 0} f(x)$? $\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}(xe^{x^2})=0\\ \lim_{x\to 0^+} ax+b=a\cdot 0+b=b\end{cases}$

(3) Para que f sexa continua en x=0 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{0=b}$

CONTINUIDADE EN X=1 — $y=ax+b$ | $y=1+x\ln x$ (1)

(1) $f(1)=a\cdot 1+b=a+b\overset{b=0}{=}a$

(2) $\lim_{x\to 1} f(x)$ $\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a\cdot 1+b\overset{b=0}{=}a\\ \lim_{x\to 1^+}(1+x\ln x)=1+1\ln 1=1+1\cdot 0=1\end{cases}$

(3) f cont. en x=1 $\Longleftrightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Longleftrightarrow$ $\boxed{a=1}$

RESPOSTA f continua en $\mathbb{R}\Longleftrightarrow a=1$ e $b=0$

(b) $y=x\cdot e^{x^2}$ | $y=2x$ | $y=1+x\ln x$ (0, 1)

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{x^2}=(-\infty)\cdot e^{(-\infty)^2}=(-\infty)\cdot e^{+\infty}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+x\ln x)=1+(+\infty)\cdot\ln(+\infty)=1+\infty=+\infty$

---

(2) b) Demostrar que $f(x)=\operatorname{sen}x$ e $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en $(2\pi,\frac{5\pi}{2})$

f e g córtanse cando $f(x)=g(x)\Longleftrightarrow$ f e g córtanse cando $\operatorname{sen}x=\frac{1}{x}$ $\Longleftrightarrow \operatorname{sen}x-\frac{1}{x}=0$ (f e g córtanse se $\operatorname{sen}x-\frac{1}{x}=0$ ten solución

Sexa a función $h(x)=\operatorname{sen}x-\frac{1}{x}$ (imos ver se verifica as condicións do Th de Bolzano en $(2\pi,\frac{5\pi}{2})$?)

(1) h continua en $[2\pi,\frac{5\pi}{2}]$?

$f(x)=\operatorname{sen}x$, continua en $\mathbb{R}\Rightarrow$ continua en $[2\pi,5\pi/2]$

$g(x)=\frac{1}{x}$, continua en $\mathbb{R}-\{0\}\Rightarrow$ " en $[2\pi,5\pi/2]$

h é a resta de f e g, que son continuas en $[2\pi,5\pi/2]$, entón h é continua en $[2\pi,5\pi/2]$

(2) $h(2\pi)\cdot h(5\pi/2)<0$? ($h(2\pi)$ e $h(5\pi/2)$ teñen $\neq$ signo?)

$h(2\pi)=\operatorname{sen}(2\pi)-\frac{1}{2\pi}=0-\frac{1}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}<0$

$h(5\pi/2)=\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{2})-\frac{1}{5\pi/2}=1-\frac{1}{5\pi/2}=1-\frac{2}{5\pi}\simeq 0{,}87>0$

Entón $h(2\pi)\cdot h(5\pi/2)<0$

Como h continua en $[2\pi,5\pi/2]$ e $h(2\pi)\cdot h(5\pi/2)<0$, aplicando o Teorema de Bolzano, entón $\exists c\in(2\pi,5\pi/2)$ / $h(c)=0\Rightarrow\exists c\in(2\pi,5\pi/2)$ solución da ecuación $\operatorname{sen}x=\frac{1}{x}$.

$\Rightarrow$ As gráficas de f(x) e g(x) córtanse no intervalo $(2\pi,5\pi/2)$

---

c) Demostra que a ec $x^4-3=2x^2-3$ ten solución no intervalo $[1,3]$

$x^4-3=2x^2-3\Longleftrightarrow x^4-2x^2=0$

Sexa $f(x)=x^4-2x^2$

(1) f é polinómica $\Rightarrow$ f cont. en $\mathbb{R}\Rightarrow$ f cont. en $[1,3]$

(2) $f(1)=1^4-2\cdot 1^2=1-2=-1<0$; $f(3)=3^4-2\cdot 3^2=81-18=63>0$ $\}$ $f(1)\cdot f(3)<0$

Entón como $f(x)=x^4-2x^2$ é continua en $[1,3]$ e $f(1)\cdot f(3)<0$, aplicando o TEOREMA de Bolzano, $\exists c\in(1,3)$ / $f(c)=0$

É dicir acabamos de demostrar que a ecuación $x^4-2x^2=0$ ten solución en $(1,3)$ e polo tanto a ec $x^4-3=2x^2-3$ ten soluc. en $(1,3)$

Cálculo da solución, ou solucións, en $(1,3)$

$x^4-2x^2=0\Rightarrow x^2(x^2-2)=0$ $\begin{cases}x^2=0\to x=0\\ x^2-2=0\to x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

A única solución válida é $x=+\sqrt{2}$

---

(3) $f(x)=\frac{2x+1}{4x-4}$

a) Asíntotas

$\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas verticais (A.V.)

En x=1 posible A.V.

$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+1}{4x-4}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{4x-4}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

$\}$ f ten en x=1 unha Asíntota vertical

Asíntotas horizontais (A.H)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{4x-4}=\underbrace{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}_{\text{indet}}\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{4x-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

f ten en $y=1/2$ unha A.H. cando $x\to+\infty$ e $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas: Como f ten Asínt. horizontais non ten oblicua.

(b) REPRESENTACIÓN