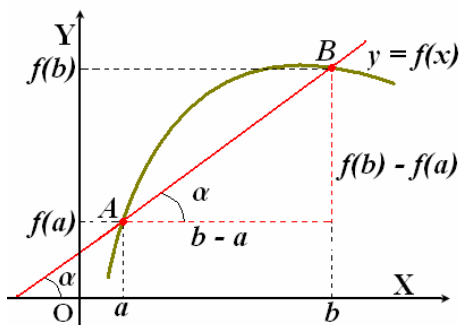


UNIDAD 9 DERIVADAS Y APLICACIONES

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Se define la *tasa de variación media* de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como:



$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

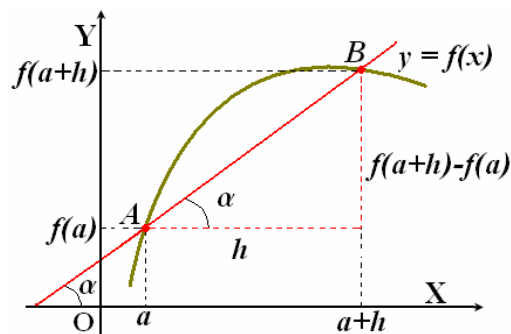
Si considero la recta que une $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, su pendiente es:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = TVM[a, b]$$

Es usual escribir $[a, b] = [a, a + h]$, siendo

- $a \rightarrow$ Extremo inferior del intervalo.
- $a + h \rightarrow$ Extremo superior del intervalo.
- $h \rightarrow$ Longitud del intervalo.

Con lo cual:



$$m = \operatorname{tg} \alpha = TVM[a, a + h] = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo: Halla la TVM de la función $f(x) = 5x - x^2$ en:

- a) Los intervalos $[1, 2]$; $[1, 3]$; $[1, 4]$
- b) El intervalo $[1, 1 + h]$

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCCESIVAS

Una función $y = f(x)$ es derivable en a , si existe el siguiente límite y es finito:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En cuyo caso al valor de este límite se le llama **derivada de f en a** , y se escribe $f'(a)$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)} \quad (\text{También se escribe } \frac{df}{dx}(a))$$

Si tomamos $x = a + h$ entonces $\begin{cases} x - a = h \\ x \rightarrow a \Rightarrow x - a \rightarrow 0 \Rightarrow h \rightarrow 0 \end{cases}$ con lo cual, la definición anterior de derivada de una función en un punto equivale a que exista:

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)}$$

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2 + x$. Calcula, usando la definición de derivada, $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(3)$.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, hay que calcular un límite para obtener la derivada de una función en cada uno de los puntos en los que se nos pida, lo cual es un trabajo molesto y engorroso. Es preferible obtener la **función derivada de $f(x)$** , es decir $f'(x)$, que nos permita obtener fácilmente el valor de la derivada de esa función en un punto “cualquiera” simplemente sustituyendo.

Ejemplo: Halla la función derivada de $f(x) = x^2 + x$ y úsala para calcular de nuevo $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(3)$.

También se pueden calcular las **derivadas sucesivas** de una función:
 Si derivamos dos veces la función $f(x)$ (es decir, hacemos la derivada de la función derivada $f'(x)$) obtenemos la **derivada segunda** $f''(x)$; si derivamos tres veces obtenemos la **derivada tercera** $f'''(x)$ y así sucesivamente.

Dicho de un modo más formal:
 Si f es una función derivable en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b) , entonces la función:

$$f' : (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

se llama **función derivada** de f .

Si a su vez f' es derivable en (a, b) obtenemos su derivada $(f')' = f''$:

$$f'' : (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$x \mapsto f''(x)$$

que se llama **función derivada segunda** de f .

Análogamente se pueden definir $f''' , f^{(iv)} , f^{(v)} \dots$

Sin embargo, para derivar funciones **NO es necesario hacerlo resolviendo límites** como en el ejemplo anterior.

Existen **sencillas reglas prácticas** con las que se pueden hallar fácilmente las derivadas de las funciones elementales.

Veamos cuales son esas reglas.

3. REGLAS DE DERIVACIÓN

REGLAS DE DERIVACIÓN	
Suma y resta	$(f + g)' = f' + g'$ $(f - g)' = f' - g'$
Producto y cociente	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Producto por un número	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Composición de funciones	$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$ <i>Regla de la cadena</i>

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES			
Funciones simples		Funciones compuestas	
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = k \cdot x$	$f'(x) = k$	$g = k \cdot f$	$g' = k \cdot f'$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$g = f^n$	$g' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$g = \sqrt{f}$	$g' = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot f'$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$g = \sqrt[n]{f}$	$g' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}} \cdot f'$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = \ln f$	$g'(x) = \frac{f'}{f}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$g(x) = \log_a f$	$g' = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$g(x) = e^f$	$g'(x) = e^f \cdot f'$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$g(x) = a^f$	$g' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$	$g(x) = \text{sen } f$	$g' = \cos(f) \cdot f'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\text{sen } x$	$g(x) = \cos f$	$g' = -\text{sen}(f) \cdot f'$
$f(x) = \text{tg } x$	$f'(x) = 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$g(x) = \text{tg } f$	$g' = (1 + \text{tg}^2 f) \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f} = \sec^2(f) \cdot f'$

Ejemplo 1: Halla la función derivada de:

- | | | | |
|------------------------|--|--|--|
| a) $f(x) = 4$ | j) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ | q) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ | y) $f(x) = x \cdot 2^x$ |
| b) $f(x) = 7$ | k) $f(x) = 2^x$ | r) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ | z) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$ |
| c) $f(x) = 7x$ | l) $f(x) = 14^x$ | s) $f(x) = x^3 + 2x - 3$ | α) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ |
| d) $f(x) = 9x$ | m) $f(x) = \log_7 x$ | t) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ | β) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$ |
| e) $f(x) = x^7$ | n) $f(x) = x^2 \text{sen } x$ | u) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$ | χ) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ |
| f) $f(x) = x^{17}$ | \tilde{n}) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x^2}$ | v) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ | δ) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$ |
| g) $f(x) = 7x^9$ | o) $f(x) = (3x^2 - 5x + 4)^2$ | w) $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$ | |
| h) $f(x) = 8\sqrt{x}$ | p) $f(x) = (2x^5 - 3x^2 + 3x + 1)^7$ | x) $f(x) = x \cdot e^x$ | |
| i) $f(x) = \sqrt{x^3}$ | | | |

Ejemplo 2: Halla la función derivada de:

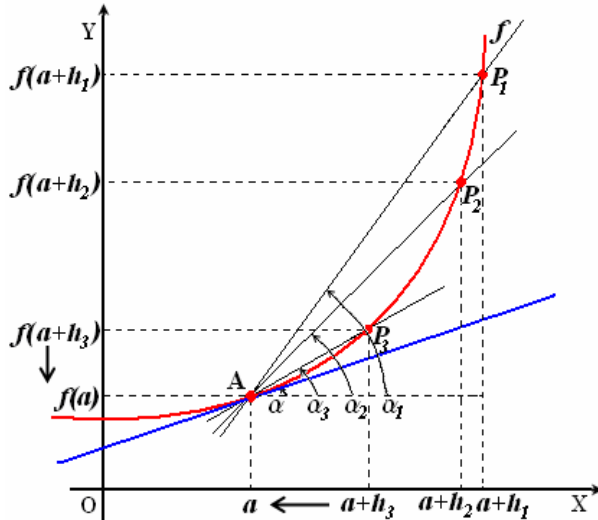
- | | | |
|---|--------------------------------|---|
| a) $f(x) = (2x^4 - 3x^2 - 7x + 3)^3$ | g) $f(x) = e^{3x-5}$ | n) $f(x) = \ln \sqrt{x}$ |
| b) $f(x) = (3x^2 - 6x) \cdot (x^3 - 5x^2 + 7)$ | h) $f(x) = e^{5x^2+3x}$ | \tilde{n}) $f(x) = \text{sen}(x^2 - 5x + 7)$ |
| c) $f(x) = (5x^6 - 3x^2)^2 \cdot (7x^4 - 3x^2)^5$ | i) $f(x) = 2^{x^2-2x}$ | o) $f(x) = x \cdot e^{2x+1}$ |
| d) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ | j) $f(x) = \log(2x+3)$ | p) $f(x) = e^x \cos x$ |
| e) $f(x) = 2^{3x+1}$ | k) $f(x) = \ln(x^3 - 4x)$ | q) $f(x) = e^{\cos x}$ |
| f) $f(x) = \text{sen } \sqrt{x}$ | l) $f(x) = \ln(\text{sen } x)$ | r) $f(x) = \sqrt{1+2x}$ |
| | m) $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2}$ | s) $f(x) = \text{sen}(3x+1) \cdot \cos(3x+1)$ |

4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. APLICACIONES

4.1. Recta tangente a una función $y = f(x)$ en un punto $A(a, f(a))$

¿Qué ha ocurrido en la gráfica de $y = f(x)$ al tomar este límite “en la tasa de variación media”?

Todas estas rectas son *secantes* a la función con un punto común $A(a, f(a))$.



$$m_{AP_1} = \text{tg } \alpha_1 = \text{TVM}[a, a+h_1] = \frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1}$$

$$m_{AP_2} = \text{tg } \alpha_2 = \text{TVM}[a, a+h_2] = \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}$$

$$m_{AP_3} = \text{tg } \alpha_3 = \text{TVM}[a, a+h_3] = \frac{f(a+h_3) - f(a)}{h_3}$$

Si $h_i \rightarrow 0$ entonces $P_i \rightarrow A$, con lo cual la recta tangente a f en $A(a, f(a))$ se obtiene como límite de las rectas secantes.

Pero además, la pendiente m de la recta tangente a la función f en $A(a, f(a))$ es:

$$m = \text{tg } \alpha = \lim_{\alpha_i \rightarrow \alpha} \text{tg}(\alpha_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a), \text{ es decir:}$$

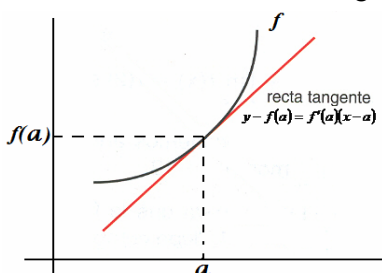
$$m = f'(a)$$

El resultado anterior (que $m = f'(a)$) se conoce como *Interpretación geométrica de la derivada* y nos dice que:

Derivada de una función f en $a = \left\{ \begin{array}{l} \text{Pendiente de la recta tangente a la gráfica} \\ \text{de la función } f \text{ en el punto } A(a, f(a)) \end{array} \right.$

4.2. Recta tangente a una función $y = f(x)$ en un punto $A(a, f(a))$

La ecuación de la recta tangente en su forma punto pendiente es $y - f(a) = m(x - a)$.



Pero $m = f'(a)$ (Por la interpretación geométrica de la derivada).

Por tanto:

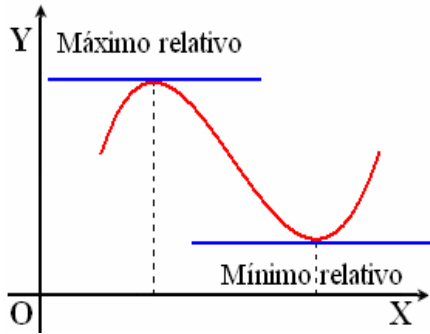
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación de la recta tangente} \\ \text{a la gráfica de } f \text{ en el punto} \\ \text{ } A(a, f(a)) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1: Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y halla:

- Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas $-1, 1$ y 3 .
- Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

Ejemplo 2: Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x$ en el punto de abscisa $x = -1$.

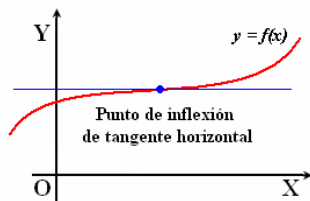
4.3. Máximos y mínimos relativos (extremos relativos)



Si f alcanza un extremo relativo en $x = a \Rightarrow$ La recta **tangente** (si existe, es decir, si f es derivable en a) a f en ese punto es **horizontal** y tendrá pendiente cero $\Rightarrow f'(a) = 0$.

Puntos críticos o singulares: son aquellos en los que $f'(a) = 0$, es decir, los “candidatos” a máximos o mínimos relativos. Los puntos críticos se obtienen resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.

Propiedad: (Condición necesaria pero **NO** suficiente para la existencia de extremos relativos)
 Si f es derivable en a y tiene un extremo relativo en $a \Rightarrow f'(a) = 0$



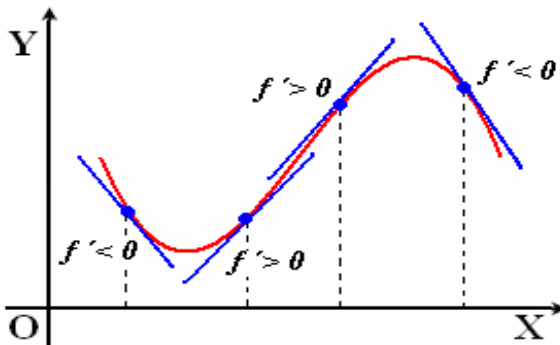
Sin embargo, que $f'(a) = 0$ **NO** implica que tenga un extremo relativo en a como podemos observar en la gráfica de esta función (**Pero SÍ proporciona los “candidatos”**).

Propiedad: Si $f'(a) = 0$ entonces:
 a) Si $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en a
 b) Si $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a

Ejemplo: Estudiar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

4.4. Crecimiento y decrecimiento (monotonía)

Observa la gráfica adjunta de una función derivable:



Si f es estrictamente creciente en un intervalo abierto, las rectas tangentes en los puntos de ese intervalo también lo serán \Rightarrow sus pendientes serán positivas $\Rightarrow f' > 0$ en ese intervalo.

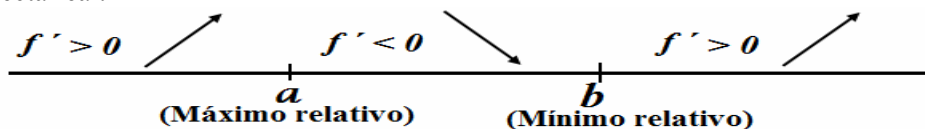
Por otro lado, si $f' > 0$ en un intervalo abierto en el que f es derivable \Rightarrow Las pendientes de las rectas tangentes serán positivas \Rightarrow Las rectas tangentes serán estrictamente crecientes $\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en ese intervalo abierto.

Análogamente, si f es estrictamente decreciente en un intervalo abierto, las rectas tangentes en los puntos de ese intervalo también lo serán y por tanto sus pendientes serán negativas $\Rightarrow f' < 0$ en ese intervalo.

Por otro lado, si $f' < 0$ en un intervalo abierto en el que f es derivable \Rightarrow Las pendientes de las rectas tangentes serán negativas \Rightarrow Las rectas tangentes serán estrictamente decrecientes $\Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en ese intervalo abierto.

Propiedad: Sea f una función derivable en un intervalo abierto (a, b) .
 a) Si $f' > 0$ en $(a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en (a, b) .
 b) Si $f' < 0$ en $(a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en (a, b) .
 c) Si $f' = 0$ en $(a, b) \Rightarrow f$ es constante en (a, b) .

Para determinar los intervalos de monotonía de una función derivable así como sus extremos relativos, tendremos en cuenta el signo de la primera derivada de acuerdo con el siguiente esquema de la recta real.



En el caso de que existan **puntos en los que f no es continua o no es derivable**, también **habrá que considerarlos** al hacer el esquema anterior.

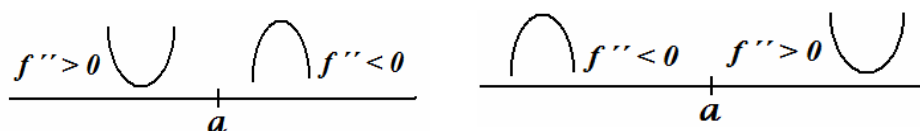
Propiedad: Si a es un punto crítico de f (es decir, $f'(a) = 0$) y

$f' > 0$ a su izquierda (est. creciente) $f' < 0$ a su derecha (est. decreciente)	}	$\Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en a
$f' < 0$ a su izquierda (est. decreciente) $f' > 0$ a su derecha (est. creciente)	}	$\Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a

Ejemplo: Estudia la monotonía de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$. Estudia también sus extremos relativos a partir de la información proporcionada por la monotonía.

4.5. Convexidad y concavidad (curvatura)

Para determinar los intervalos de convexidad y de concavidad de una función tendremos en cuenta el signo de la segunda derivada de acuerdo con el siguiente esquema de la recta real:



En el caso de que existan **puntos en los que f no es continua o no es derivable**, también **habrá que considerarlos** al hacer el esquema anterior.

Por tanto:

Propiedad:

Si $f'' > 0$ en un intervalo abierto $(a, b) \Rightarrow f$ es convexa en (a, b) .

Si $f'' < 0$ en un intervalo abierto $(a, b) \Rightarrow f$ es cóncava en (a, b) .

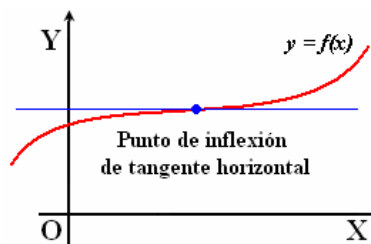
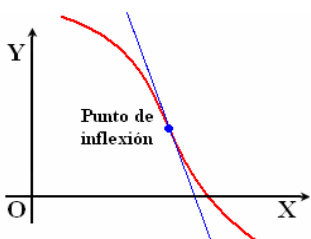
Además, diremos que f presenta en a un **punto de inflexión** si en él la función pasa de ser convexa a cóncava o viceversa (la recta tangente atravesará la curva).

Propiedad:

Si:
 $f'(a) = f''(a) = \dots$
 $\dots = f^{(n-1)}(a) = 0$
 y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Entonces:

- Si n es par \Rightarrow Extremo relativo en $x = a$.
- Si n es impar \Rightarrow Punto de inflexión en $x = a$.



“Candidatos” a puntos de inflexión: son aquellos en los que $f''(a) = 0$. Es decir, los posibles puntos de inflexión se obtienen resolviendo la ecuación $f''(x) = 0$. El **cambio de curvatura** nos asegurará que, en efecto, estamos en presencia de un punto de inflexión siempre que la función sea, al menos, continua en a . También podemos aplicar la siguiente propiedad:

Propiedad:

Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en a .

Ejemplo: Estudia la curvatura y puntos de inflexión de $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 10x + 8$.

5. DERIVADAS LATERALES

A los siguientes límites, si existen y son finitos, se les llama:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada por la izquierda de f en a

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada por la derecha de f en a

Ambos límites reciben el nombre de **derivadas laterales** de la función f en a .

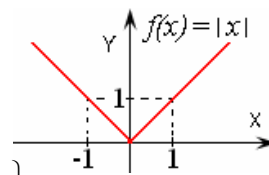
Propiedad:

$$f \text{ es derivable en } a \Leftrightarrow \text{Existen } \begin{cases} f'(a^+) \\ f'(a^-) \end{cases}, \text{ son finitos y } f'(a^+) = f'(a^-)$$

En cuyo caso, $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$

Ejemplo: Comprueba que la función valor absoluto $f(x) = |x|$, que es continua en $x = 0$, no es derivable en $x = 0$. Representala.

Solución: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



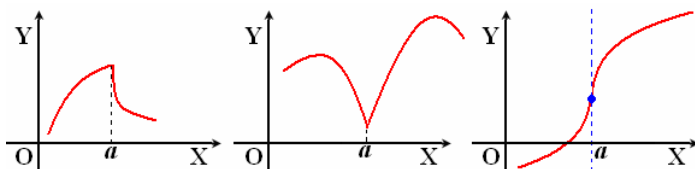
$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ f'(0^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

Por tanto, la función **no** es derivable en $x = 0$.

6. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si observas el ejemplo anterior está claro que **“Una función continua en a NO tiene por qué ser derivable en a ” (podrá serlo o no).**

Si f es continua en a pero no derivable en a , tendremos puntos “angulosos” (con pico) como en las dos primeras figuras, o puntos de tangente vertical como en la tercera:



Funciones continuas en a pero no derivables en a

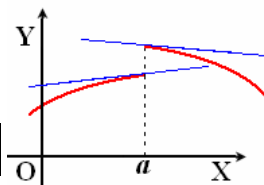
Sin embargo:

Propiedad:

$$\text{Si } f \text{ es derivable en } a \Rightarrow f \text{ es continua en } a$$

Por tanto:

$$\text{Si } f \text{ NO es continua en } a \Rightarrow \text{NO puede ser derivable en } a$$



Función no continua en a y, por tanto, no derivable en a

Una función derivable tendrá una gráfica “suave” sin “puntos angulosos”.

Ejemplo 1: Estudie la continuidad y derivabilidad de las funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Ejemplo 2: Determina los valores de a y b para que sea derivable la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejercicios:

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 1 \quad b) f(x) = 3x + 5 \quad c) f(x) = x + \sqrt{x}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x} + x^3 \quad e) f(x) = \frac{4}{3x} \quad f) f(x) = x^5 + 5^x$$

$$g) f(x) = 2\sqrt{x} + 6 + \frac{5}{x} \quad h) f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad i) f(x) = 4x^2(1+x)^5$$

$$j) f(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad k) f(x) = -\frac{2}{3}x^4 + 3x^2 - 7 \quad l) f(x) = x^e + e^x$$

$$m) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad n) f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \tilde{n}) f(x) = \ln x + \log_3 x$$

$$o) f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \quad p) f(x) = \cos x + \operatorname{tg} x \quad q) f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$$

$$r) f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \quad s) f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x+1} \quad t) f(x) = (1-3x) \cdot \operatorname{tg} x \quad u) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + x}{\sqrt{x}}$$

2. Utiliza la regla de la cadena para hallar la derivada de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = (x^2 + x + 1)^6 \quad b) f(x) = (3-x)^3 \quad c) f(x) = (x^2 - 1)^3$$

$$d) f(x) = (2x-3)^3(2x+4) \quad e) f(x) = \sqrt{2x+3} \quad f) f(x) = 3 \cos 5x$$

$$g) f(x) = \ln(4x^3 - 7x^2 - 2x + 1) \quad h) f(x) = \ln(\operatorname{sen} x) \quad i) f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$$

$$j) f(x) = \cos^2 x \quad k) f(x) = e^{8x^2+5} \quad l) f(x) = (2^x + x^3) \cdot e^{7x-2}$$

$$m) f(x) = \operatorname{sen}(\cos x) \quad n) f(x) = \log_5(1-3x) \quad \tilde{n}) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{2x}$$

$$o) f(x) = 4^{3 \cos 2x} \quad p) f(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x \quad q) f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$