

6. Sea $B(x) = ax + b\sqrt{x}$ la función de beneficios, en miles de euros, de una empresa. El beneficio máximo es de 50 miles de euros para $x = 100$ unidades producidas. Calcula a y b .

$$B(x) = ax + b\sqrt{x}$$

Sabemos que $B(100) = 50$ y $B'(100) = 0$

$$B(100) = 100a + 10b = 50$$

$$B'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} \rightarrow B'(100) = a + \frac{b}{20} = 0$$

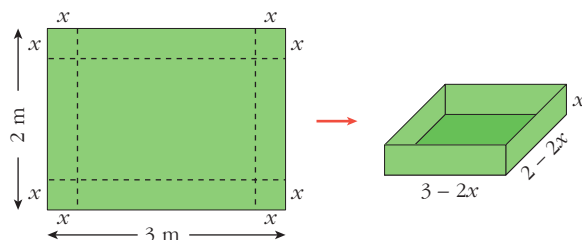
Resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ a + \frac{b}{20} = 0 \rightarrow a = -\frac{b}{20} \end{cases}$$

$$100\left(-\frac{b}{20}\right) + 10b = 50 \rightarrow \frac{-b}{2} + b = 5 \rightarrow -b + 2b = 10 \rightarrow b = 10; a = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $B(x) = -\frac{x}{2} + 10\sqrt{x}$.

7. Con una cartulina rectangular de $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$, se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recorta un cuadrado de cada uno de los vértices. Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja es:

$$V(x) = (3 - 2x) \cdot (2 - 2x) \cdot x, \quad x \in (0, 1)$$

$$V(x) = 6x - 10x^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = 6 - 20x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \rightarrow 6 - 20x + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{12} \begin{cases} 1,27 \text{ (no vale)} \\ 0,39 \end{cases}$$

$$V''(x) = -20 + 24x; \quad V''(0,39) < 0 \Rightarrow x = 0,39$$

Si $x = 0,39 \text{ m}$, el volumen es máximo.

8

REPRESENTACIÓN
DE FUNCIONES

Página 185

REFLEXIONA Y RESUELVE

Descripción de una gráfica

- Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos, y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.

(La solución está en el propio ejercicio).

- Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

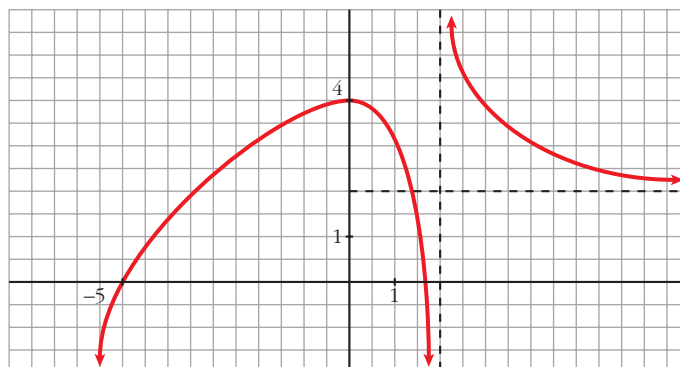
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

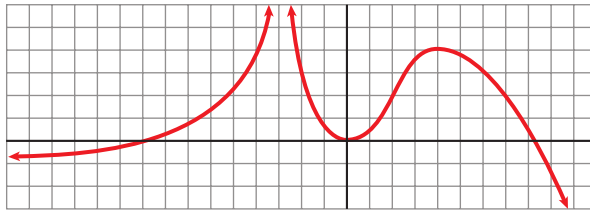
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$

- $f(-5) = 0$; $f(1,75) = 0$

- f es derivable en todo \mathbb{R} , salvo en $x = 2$.



■ Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$
- $f(-9) = 0$; $f(0) = 0$; $f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4$; $f'(4) = 0$

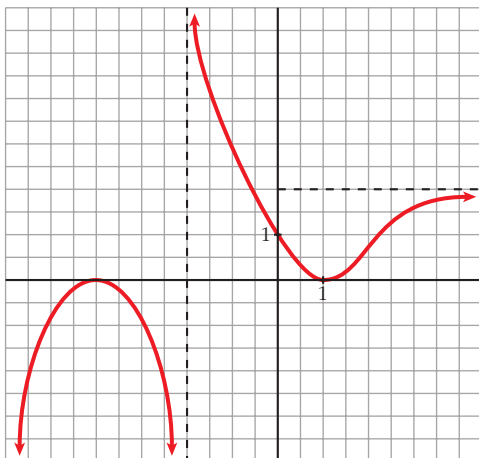
■ Representa sobre unos ejes en papel cuadrículado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.

Representa tú la suya.

Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.

¿Hay algún error en la representación? ¿Hay, acaso, error en la descripción?

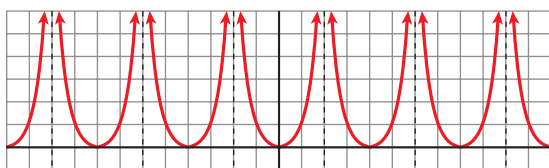
¿Es todo correcto?



Por ejemplo:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0$; $f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0$; $f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

■ Observa esta gráfica:



• Halla la ordenada para las siguientes abscisas:

$$x = 0, x = 1, x = 3, x = -7, x = 12, x = -400, x = 13, x = -199$$

• ¿En qué puntos no está definida esta función?

• ¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?

• ¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?

• $f(0) = 0; f(1) = 1; f(3) = 1; f(-7) = 1$

$f(12) = 0; f(-400) = 0; f(13) = 1; f(-199) = 1$

(En general, $f(4k) = 0; f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

• La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

• Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de período 4.

• Simetría \rightarrow Es una función par (simétrica respecto al eje Y).

Periodicidad \rightarrow Es periódica de período 4.

Página 186

1. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) Dominio = \mathbb{R}

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

Dominio = $\mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow$ Dominio = \mathbb{R}

2. Halla el dominio de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ b) $y = \ln(x^2 + 1)$ c) $y = \ln(x^2 - 1)$ d) $y = \frac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

Página 187

3. Halla las simetrías y las periodicidades; di dónde son continuas y dónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = \text{sen } x + 1/2 (\text{cos } 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y .

No es periódica.

Es continua y derivable en \mathbb{R} .

b) $\text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) Dominio = \mathbb{R}

$$f(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2} (\cos(-2x)) = -\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} (\cos(2x))$$

No es par ni impar.

Es periódica de período 2π .

Es continua y derivable en \mathbb{R} .

Página 188

4. Halla las ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

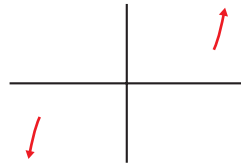
d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

e) $y = \ln(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



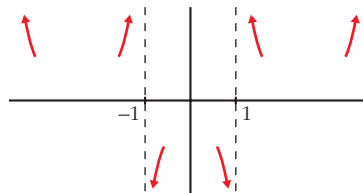
Ramas parabólicas

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

- Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\}$ Ramas parabólicas

- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\}$ Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$



$$c) y = \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$$

- $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$

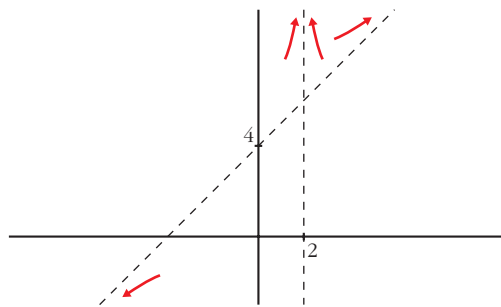
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

$$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \rightarrow \begin{cases} f(x) - (x + 4) > 0 & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ f(x) - (x + 4) < 0 & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

$x = 2$ es asíntota vertical



$$d) y = x^4 - 8x^2 + 7$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

$$e) y = \ln(x^2 + 1)$$

- $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

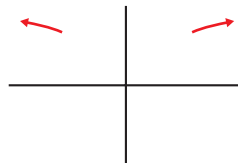
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.



f) $y = 2^{x-1} > 0$ para todo x .

- Dominio = \mathbb{R}
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
- No hay asíntotas verticales.



Página 189

5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

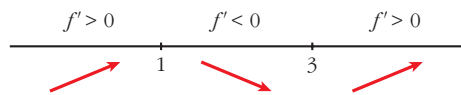
b) $y = \ln(x^2 + 1)$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. Dominio = \mathbb{R}

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

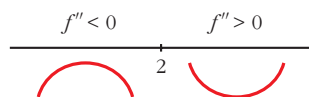
Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en (1, 9) y un mínimo en (3, 5).

- $f''(x) = 6x - 12$
- $f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en (2, 7).

b) $y = \ln(x^2 + 1)$. Dominio = \mathbb{R}

- $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

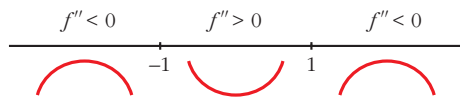
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array} \right\} \text{ Hay un mínimo en } (0, 0).$$

$$\bullet f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y otro en $(1, \ln 2)$.

6. Halla los puntos singulares de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

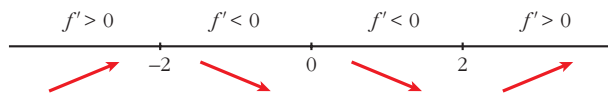
d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. Dominio = \mathbb{R}

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



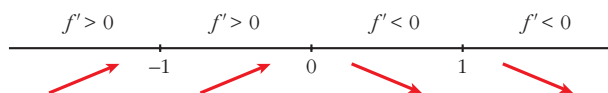
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un máximo en $(0, 0)$.

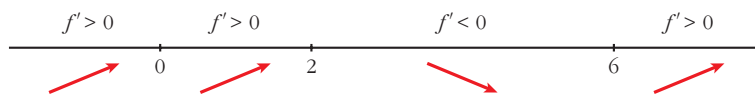
c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $(6, \frac{27}{2})$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Dominio = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \notin \text{Dominio.}$$

No hay puntos singulares.

Página 191

1. Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$ c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$ Punto: $(0, 7)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm \sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{7}, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(\sqrt{7}, 0)$

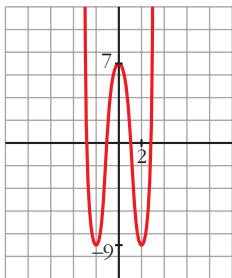
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y , ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2, -64)$; $(-3, -189)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \end{cases} \begin{cases} x \approx 2,86 \\ x \approx -4,19 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (-4,19; 0)

• **Puntos de inflexión:**

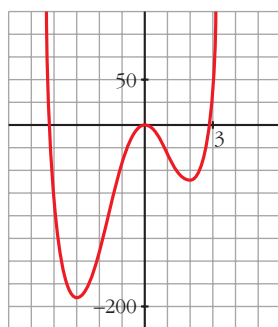
$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1,12 \\ x \approx -1,79 \end{cases}$$

Puntos: (1,12; -34,82) y (-1,79; -107,22)

• **Gráfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x.$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y , ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\left. \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \right\} \text{Puntos } (1, 7); (-1, -9); (3, -9)$$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$$\begin{array}{l} \swarrow x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x - 2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \end{array} \begin{array}{l} \swarrow x = 2 \\ \rightarrow x \approx 3,65 \\ \rightarrow x \approx -1,65 \end{array}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(3,65; 0)$; $(-1,65; 0)$

• **Puntos de inflexión:**

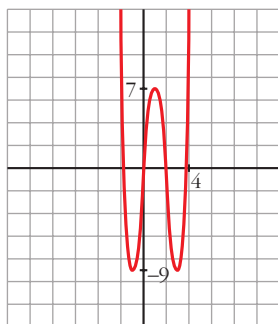
$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{array}{l} \swarrow x \approx 2,15 \\ \rightarrow x \approx -0,15 \end{array}$$

Puntos: $(2,15; -1,83)$ y $(-0,15; -1,74)$

• **Gráfica:**



2. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

b) $y = x^3 - 3x$

c) $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

• **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y , ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos: (0, -16); (1, -17)

• Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -16 \rightarrow$ Punto: (0, -16)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{tiene una sola raíz, que está entre } -2 \text{ y } -1;$$

pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

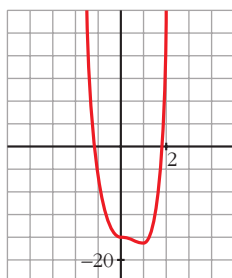
Puntos (2, 0) y (k, 0), con k entre -2 y -1.

• Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Puntos: (0, -16) y $\left(\frac{2}{3}, \frac{-448}{27}\right)$

• Gráfica:


b) $y = x^3 - 3x$

• Simetrías:

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

• Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos: (-1, 2); (1, -2)

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

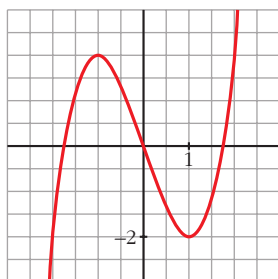
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{Puntos: } (0, 0); (-\sqrt{3}, 0); (\sqrt{3}, 0)$$

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$$

• **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

$$\text{Puntos: } (0, 0); (-2, -4); (2, -4)$$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{2}, 0)$

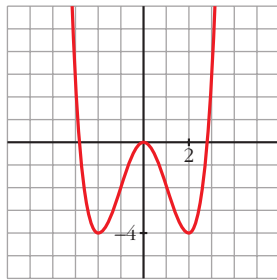
• Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

• Gráfica:



Página 193

1. Representa:

a) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

b) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

- **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y = -x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - (-x) > 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por encima)}$$

$$f(x) - (-x) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

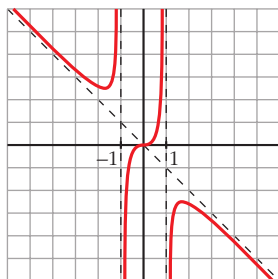
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

- **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en (0, 0).

- **Gráfica:**



$$b) y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{-x}$$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y , ni respecto al origen.

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 0.$$

• **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \rightarrow y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - (x - 2) > 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por encima)}$$

$$f(x) - (x - 2) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^2} > 0 \text{ para todo } x \text{ del dominio.}$$

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

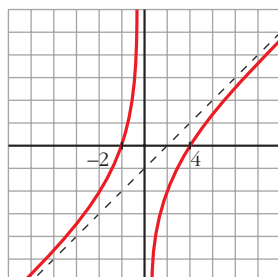
• **Cortes con los ejes:**

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y , pues no está definida en $x = 0$.

• **Gráfica:**



2. Representa:

$$\text{a) } y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{a) } y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}, \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

- **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \frac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto: } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

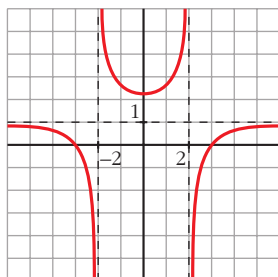
- **Cortes con los ejes:**

$$\text{— Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow \text{Punto: } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. Dominio = \mathbb{R}

- **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - x < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - x > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por encima)}$$

- **Puntos singulares:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

No hay puntos singulares.

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

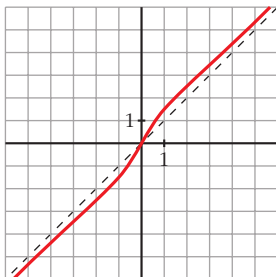
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right. \text{ Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

• **Gráfica:**



Página 195

1. Representa:

a) $y = e^{1-x^2}$

b) $y = \frac{e^x}{x^2}$

c) $y = \ln(x^2 + 4)$

a) $y = e^{1-x^2}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Simetría:**

$f(-x) = e^{1-x^2} = f(x)$. Es una función par: es simétrica respecto al eje Y .

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal. Además, como $e^{1-x^2} > 0$ para todo x , la curva se sitúa por encima de la asíntota.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, e)$$

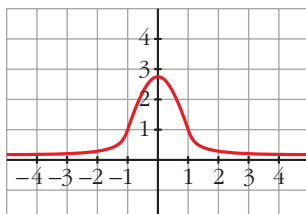
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -2e^{1-x^2} + (-2x) \cdot (-2x)e^{1-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{1-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,7 \rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{1/2} \approx 1,65$$

Puntos de inflexión: $(-0,7; 1,65)$, $(0,7; 1,65)$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{e^x}{x^2}$

• **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$

• **No es simétrica.**

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0.$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

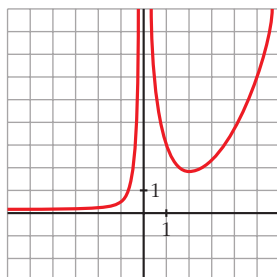
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x - 2)}{x^4} = \frac{e^x(x - 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto} \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

• **Gráfica:**



c) $y = \ln(x^2 + 4)$

• **Dominio:**

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x , $D = \mathbb{R}$.

• **Simetrías:**

$f(-x) = \ln(x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

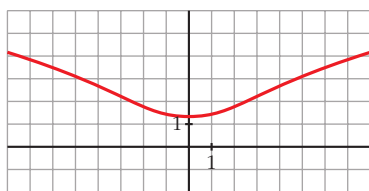
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, \ln 4)$$

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (-2, \ln 8) \text{ y } (2, \ln 8)$$

• **Gráfica:**



2. Representa:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

b) $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:**

$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

• **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

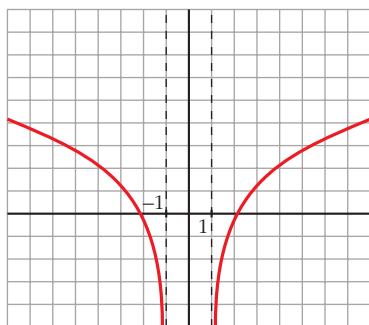
• **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \left\{ \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ y } (\sqrt{2}, 0)$$

— No corta al eje Y , pues no existe $f(0)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$

- Está definida, y es *continua* y *derivable* en todo \mathbb{R} .
- Es *periódica* de período $2\pi \rightarrow$ solo la estudiamos en $[0, 2\pi]$.
- No existe $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow$ no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

• **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 0$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ o } x = \frac{11\pi}{6}$$

Puntos $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right); \left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \sqrt{3} - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{\pi}{3}, 2\right) \\ x = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{4\pi}{3}, -2\right) \end{cases}$$

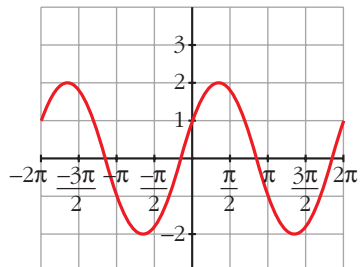
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = -f(x)$$

$$f''(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$$

Los puntos de inflexión son los de corte con el eje X .

• **Gráfica:**



Página 197

1. Representa:

a) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

c) $y = |x - 5|x$

- a) Intervienen dos valores absolutos, $|x + 1|$ y $|x - 3|$, que cambian de signo en las abscisas $x = -1$ y $x = 3$, respectivamente.

Por tanto:

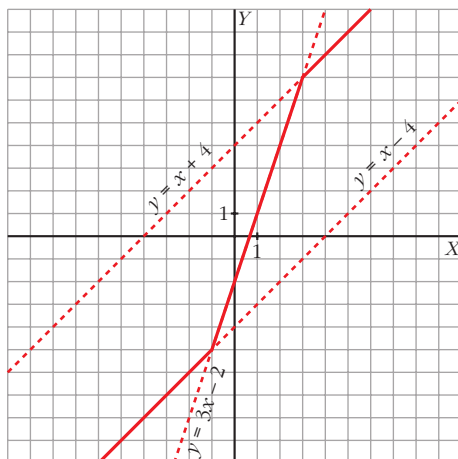
$$x < -1, |x + 1| = -x - 1 \text{ y } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 - x - 1 = x - 4$$

$$-1 \leq x < 3, |x + 1| = x + 1 \text{ y } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 + x + 1 = 3x - 2$$

$$x \geq 3, |x + 1| = x + 1 \text{ y } |x - 3| = x - 3 \rightarrow y = x - x + 3 + x + 1 = x + 4$$

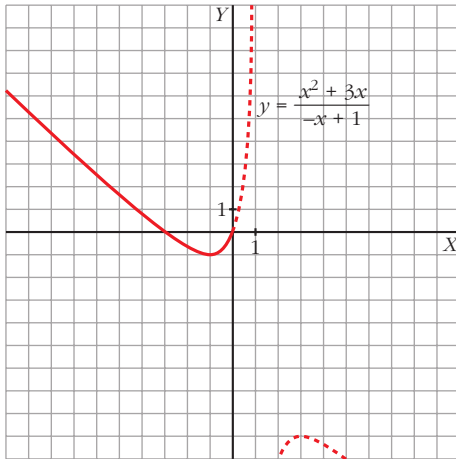
Representamos, pues, esta función:

$$y = x - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

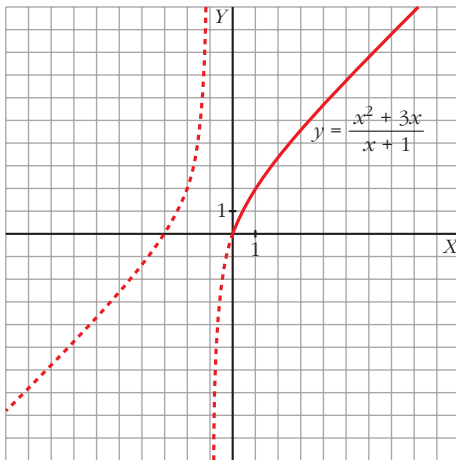


b) El único valor absoluto que interviene es $|x|$. La abscisa en donde cambia de signo x es 0. Por tanto:

$$x < 0, |x| = -x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{-x + 1}$$

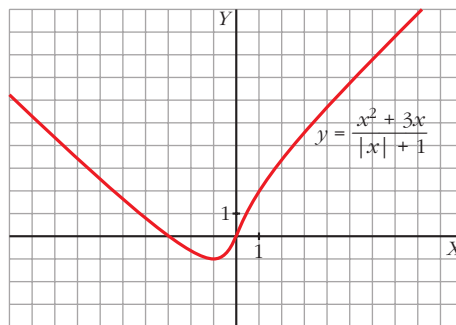


$$x \geq 0, |x| = x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$



Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1} = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

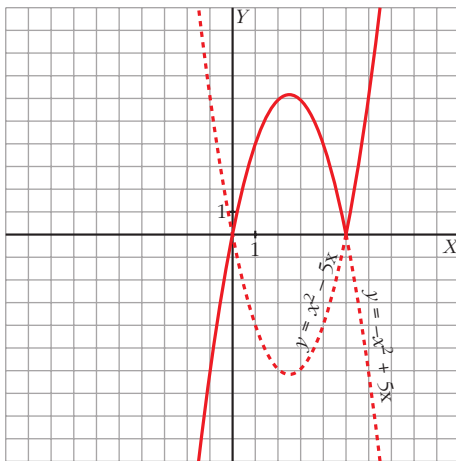


c) El único valor absoluto que interviene es $|x - 5|$. La abscisa donde cambia de signo $x - 5$ es 5. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 5:

$$x < 5 \rightarrow |x - 5| = -x + 5 \rightarrow y = (-x + 5)x = -x^2 + 5x$$

$$x \geq 5 \rightarrow |x - 5| = x - 5 \rightarrow y = (x - 5)x = x^2 - 5x$$

$$y = |x - 5|x = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } x < 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

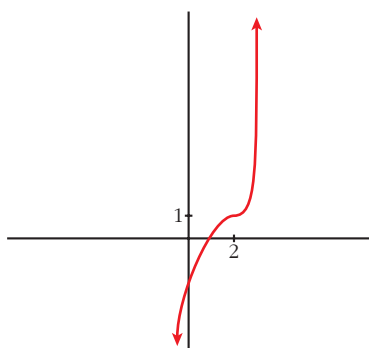
PARA PRACTICAR

Descripción de una gráfica

1 Representa una función continua y derivable en \mathbb{R} tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1, f'(x) \geq 0$ para cualquier x .



2 De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:

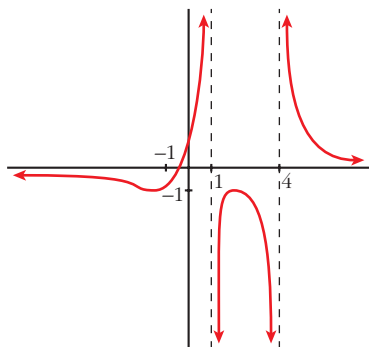
$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow +\infty, f(x) > 0$; si $x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$)

$$f'(2) = 0, f(2) = -1; \quad f'(-1) = 0, f(-1) = -1$$

Representála.

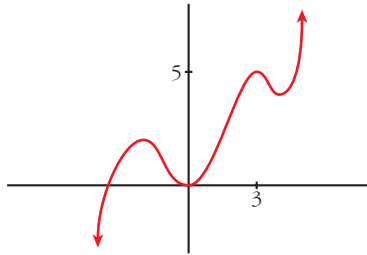


s3 Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:

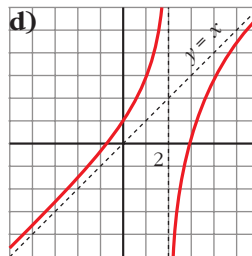
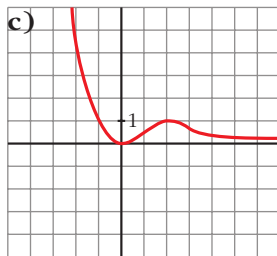
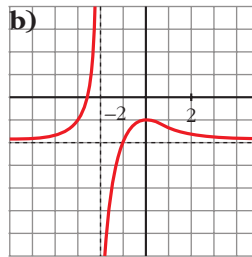
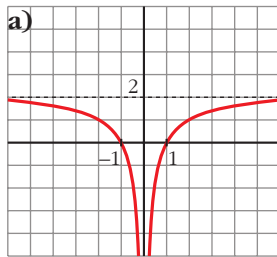
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, x = 0, x = 3, x = 4$$

$$f(-2) = 2; f(0) = 0; f(3) = 5; f(4) = 4$$



s4 Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



a) • Asíntota horizontal: $y = 2$. Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

- b) • Asíntota horizontal: $y = -2$. Asíntota vertical: $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > -2$)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$
 - Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.
- c) • Asíntota horizontal si $x \rightarrow +\infty$: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

- Puntos singulares:
 $f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$
 $f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$
 - Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.
- d) • Asíntota vertical: $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

- Asíntota oblicua: $y = x$
 (si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)
- No tiene puntos singulares.
- Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Funciones polinómicas

- 5** Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de las siguientes funciones, y represéntalas:

a) $y = -x^2 + 3x + 10$

b) $y = \frac{3x^2 - 12x}{4}$

c) $y = (x + 1)^2 + 3$

d) $y = -2x^2 + 12x - 9$

e) $y = x^3 - 9x$

f) $y = -x^3 - 6x^2$

a) $y = -x^2 + 3x + 10$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3x + 10) = -\infty$$

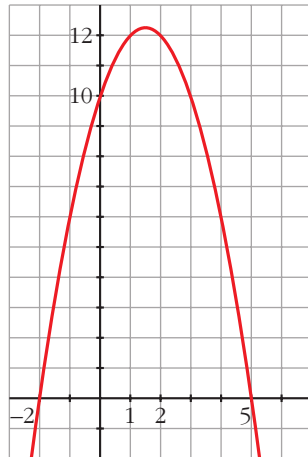
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 3x + 10) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$y' = -2x + 3; \quad y' = 0 \rightarrow -2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{49}{4}$$

$$y'' = -2 < 0. \quad \text{Máximo: } \left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4} \right)$$

- Representación:



$$\text{b) } y = \frac{3x^2 - 12x}{4}$$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 12x}{4} = +\infty$$

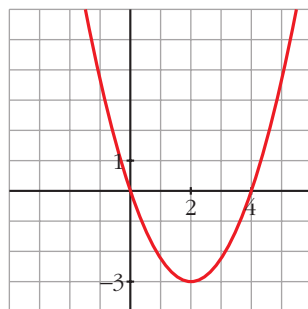
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 12x}{4} = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$y' = \frac{6x - 12}{4}; \quad y' = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2, \quad y = \frac{12 - 24}{4} = -3$$

$$y'' = \frac{3}{2} > 0. \quad \text{Mínimo: } (2, -3)$$

- Representación:



c) $y = (x + 1)^2 + 3$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^2 + 3 = +\infty$$

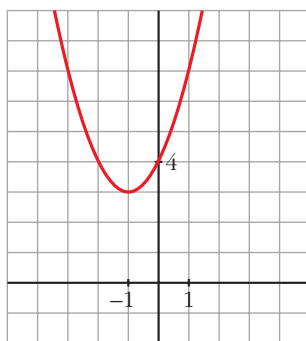
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 + 3 = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$y' = 2(x + 1); \quad y' = 0 \rightarrow 2(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1, \quad y = 3$$

$$y'' = 2 > 0. \quad \text{Mínimo: } (-1, 3)$$

- Representación:



d) $y = -2x^2 + 12x - 9$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + 12x - 9) = -\infty$$

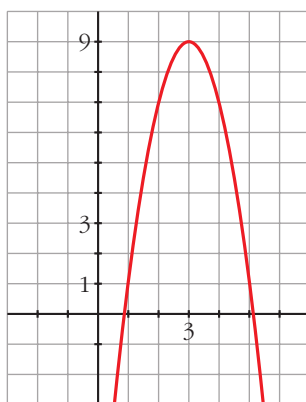
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 12x - 9) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$y' = -4x + 12; \quad y' = 0 \rightarrow -4x + 12 = 0 \rightarrow x = 3, \quad y = 9$$

$$y'' = -4 < 0. \quad \text{Máximo: } (3, 9)$$

- Representación:



$$e) y = x^3 - 9x$$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 9x) = +\infty$$

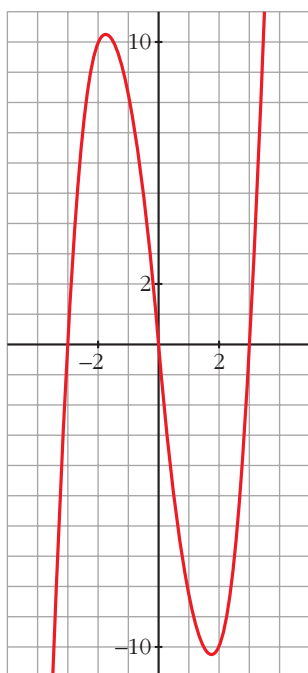
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 9x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$y' = 3x^2 - 9; y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \begin{cases} x = \sqrt{3}, y = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}, y = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y'' = 6x \begin{cases} y''(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0. \text{ M\u00ednimo: } (\sqrt{3}, -6\sqrt{3}) \\ y''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0. \text{ M\u00e1ximo: } (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}) \end{cases}$$

- Representaci\u00f3n:



$$f) y = -x^3 - 6x^2$$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - 6x^2) = +\infty$$

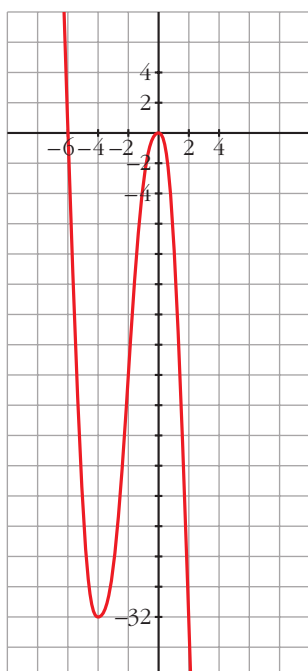
- Puntos singulares:

$$y' = -3x^2 - 12x; y' = 0 \rightarrow -3x^2 - 12x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -3x(x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = -4, y = -32 \end{cases}$$

$$y'' = -6x - 12 \begin{cases} y''(0) = -12 < 0. \text{ M\u00e1ximo: } (0, 0) \\ y''(-4) = 12 > 0. \text{ M\u00ednimo: } (-4, -32) \end{cases}$$

- Representaci\u00f3n:



6 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

e) $y = x^5 - 5x^3$

f) $y = (x - 1)^3 - 3x$

a) $y = x^3 + 3x^2$

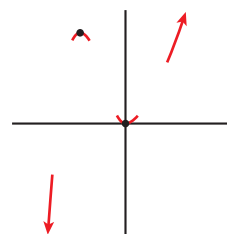
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

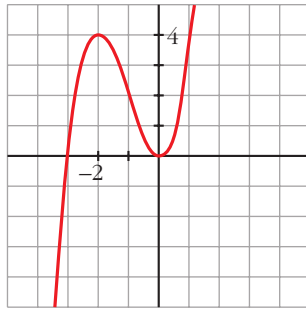
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x; \quad 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x + 6) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ es un m\u00ednimo.} \\ x = -2, f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \rightarrow (-2, 4) \text{ es un m\u00e1ximo.} \end{cases}$$



- Representación:



b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

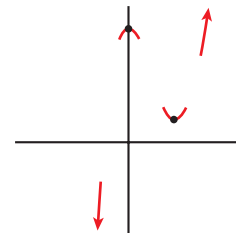
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

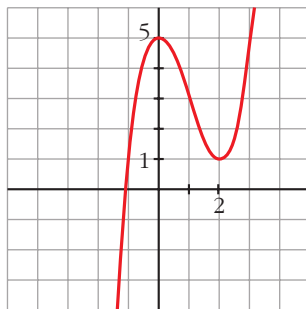
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x; \quad 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, f(0) = 5 \rightarrow (0, 5) \text{ es un máximo.} \\ x = 2, f(2) = 1 \rightarrow (2, 1) \text{ es un mínimo.} \end{array} \right.$$



- Representación:



c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

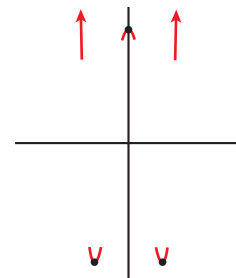
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

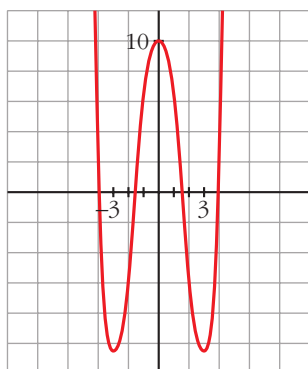
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x; \quad x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, f(0) = 10 \rightarrow \text{Máximo en } (0, 10). \\ x = -3, f(-3) = -41/4 \rightarrow \text{Mínimo en } (-3, -41/4). \\ x = 3, f(3) = -41/4 \rightarrow \text{Mínimo en } (3, -41/4). \end{array} \right.$$



- Representación:



$$d) y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$$

- Ramas infinitas:

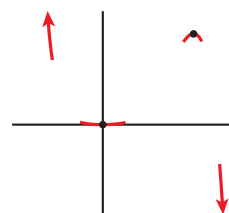
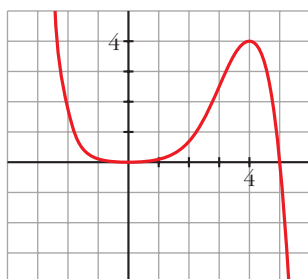
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \quad \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3(20 - 5x) = 0 \begin{cases} x = 0, f(0) = 0 \rightarrow \text{Mínimo en } (0, 0). \\ x = 4, f(4) = 4 \rightarrow \text{Máximo en } (4, 4). \end{cases}$$

- Representación:



$$e) y = x^5 - 5x^3$$

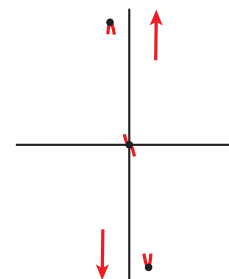
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

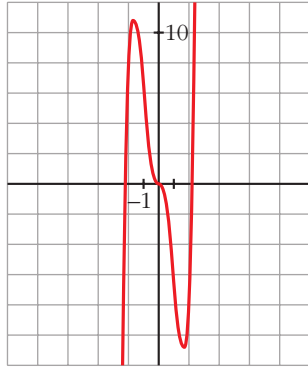
$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; \quad 5x^4 - 15x^2 = 0 \rightarrow 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^5 - 5\sqrt{3}^3 = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}^5 + 5\sqrt{3}^3 = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$



Tiene un máximo en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$, un mínimo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- Representación:



f) $y = (x - 1)^3 - 3x$

- Ramas infinitas:

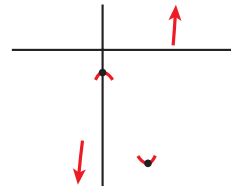
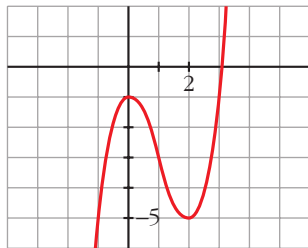
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 - 3; \quad 3(x - 1)^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x - 1)^2 = 1 \begin{cases} x = 0, f(0) = -1 \rightarrow \text{Máximo en } (0, -1) \\ x = 2, f(2) = -5 \rightarrow \text{Mínimo en } (2, -5) \end{cases}$$

- Representación:



7 Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Representálas gráficamente:

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

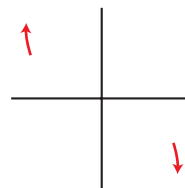
b) $y = 2 - (x - 3)^4$

c) $y = (x + 1)^6 - 5$

d) $y = 3 - (1 - x)^3$

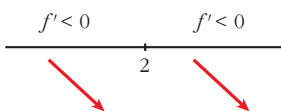
a) $y = 3 + (2 - x)^3$

- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = -3(2-x)^2; \quad -3(2-x)^2 = 0 \rightarrow x = 2; \quad f(2) = 3$$

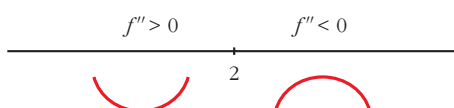
Signo de f' : $\frac{f' < 0 \quad \quad \quad f' < 0}{\quad \quad \quad | \quad \quad \quad}$


f es decreciente en \mathbb{R} .

No tiene máximos ni mínimos.

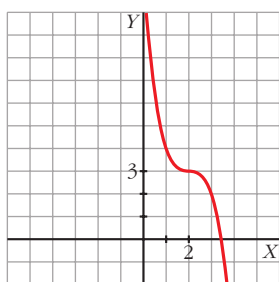
Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6(2-x); \quad 6(2-x) = 0 \rightarrow x = 2; \quad f(2) = 3$$

Signo de f'' : $\frac{f'' > 0 \quad \quad \quad f'' < 0}{\quad \quad \quad | \quad \quad \quad}$


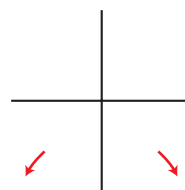
El punto $(2, 3)$ es un punto de inflexión con tangente horizontal ($f''(2) = 0$ y $f'(2) = 0$).

- Gráfica:



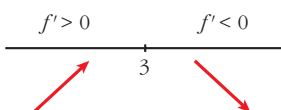
b) $y = 2 - (x - 3)^4$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = -4(x-3)^3; \quad -4(x-3)^3 = 0 \rightarrow x = 3; \quad f(3) = 2$$

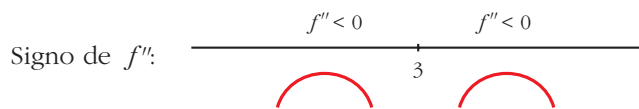
Signo de f' : $\frac{f' > 0 \quad \quad \quad f' < 0}{\quad \quad \quad | \quad \quad \quad}$


f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

Tiene un máximo en $(3, 2)$.

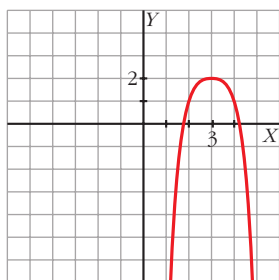
Puntos de inflexión:

$$f''(x) = -12(x - 3)^2; \quad -12(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3; \quad f(3) = 2$$



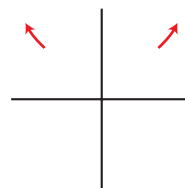
No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:



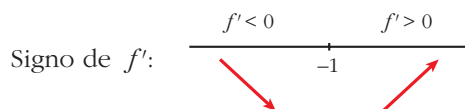
c) $y = (x + 1)^6 - 5$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = 6(x + 1)^5; \quad 6(x + 1)^5 = 0 \rightarrow x = -1; \quad f(-1) = -5$$

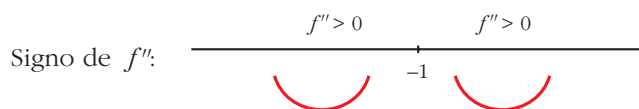


Decreciente en $(-\infty, -1)$. Creciente en $(-1, +\infty)$.

Mínimo en $(-1, -5)$.

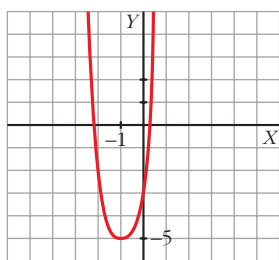
Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 30(x + 1)^4; \quad 30(x + 1)^4 = 0 \rightarrow x = -1; \quad f(-1) = -5$$



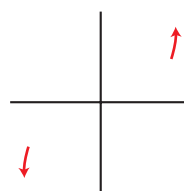
No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:



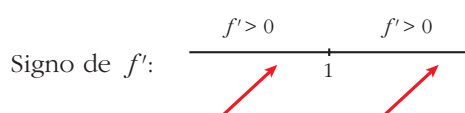
d) $y = 3 - (1 - x)^3$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3(1 - x)^2; \quad 3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 1; \quad f(1) = 3$$

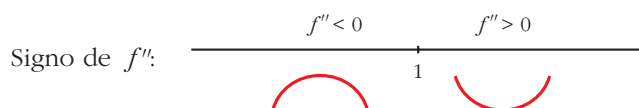


f es creciente en \mathbb{R} .

No tiene máximos ni mínimos.

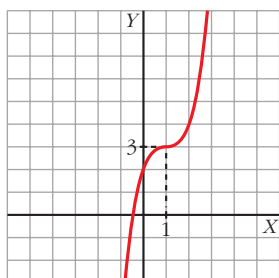
Puntos de inflexión:

$$f''(x) = -6(1 - x); \quad -6(1 - x) = 0 \rightarrow x = 1; \quad f(1) = 3$$



(1, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal, puesto que $f'(1) = 0$.

- Gráfica:



Funciones racionales

8 En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

f) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

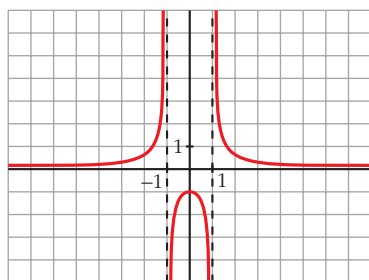
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \rightarrow -\infty, f(x) > 0$; si $x \rightarrow +\infty, f(x) > 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

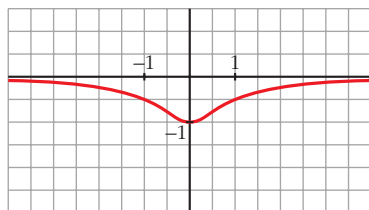
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty, f(x) < 0$)

• **Gráfica:**



c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

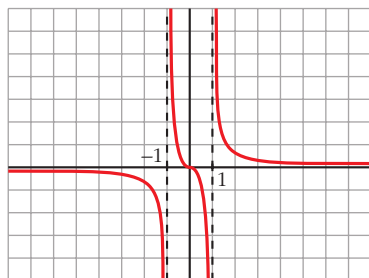
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



d) $y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

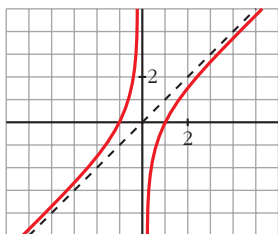
• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)

• **Gráfica:**



e) $y = \frac{x}{1+x^2}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

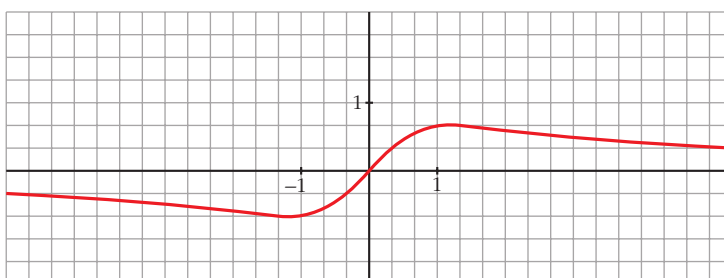
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

• **Dominio:**

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$D = \mathbb{R}$$

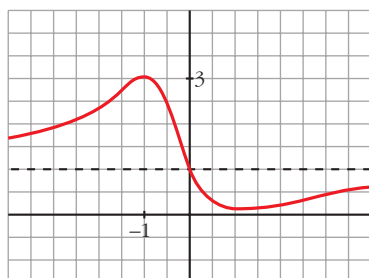
• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

• **Gráfica:**



9 Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, posición y extremos relativos:

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$ b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$ c) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ d) $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

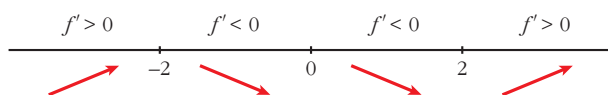
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



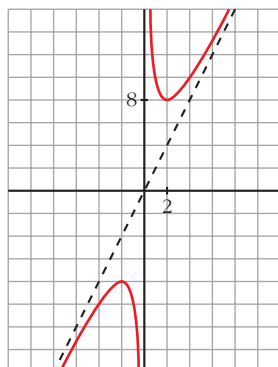
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -8)$.

tiene un mínimo en $(2, 8)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

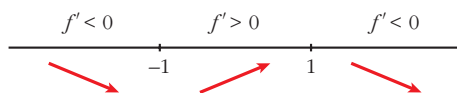
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$:

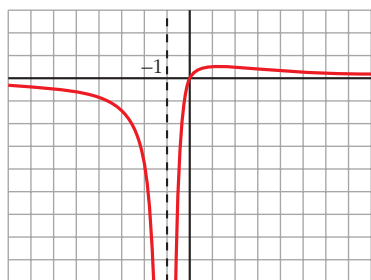


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

es creciente en $(-1, 1)$.

tiene un máximo en $(1, \frac{1}{2})$.

• **Gráfica:**



$$c) y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

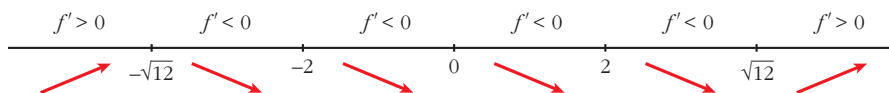
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



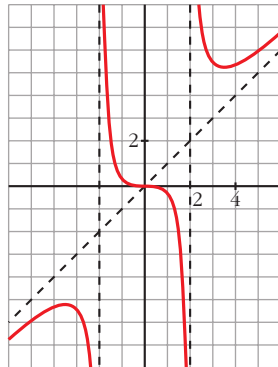
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$.

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$.

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$.

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

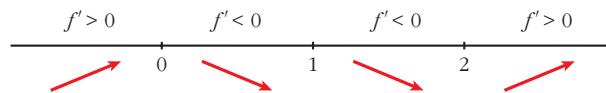
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 1$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



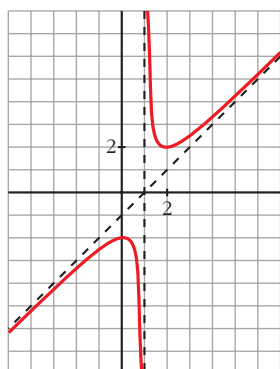
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -2)$.

tiene un mínimo en $(2, 2)$.

- Gráfica:



Página 205

Funciones "a trozos"

- 10** Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, es una parábola abierta hacia abajo:

Vértice: $f'(x) = -2x - 2$; $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$, $f(-1) = 3$

Cortes con el eje X : $-x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2}$

$$\begin{cases} x \approx 0,73 & \text{(no vale por ser } 0,73 > 0) \\ x \approx -2,73 \end{cases}$$

- Si $x \geq 0$, es una parábola abierta hacia arriba:

Vértice: $f'(x) = 2x - 2$; $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$, $f(1) = 1$

Cortes con el eje X : $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

No corta al eje X .

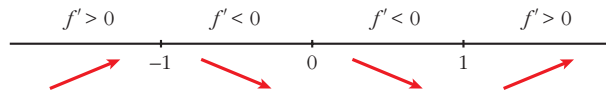
Corte con el eje Y : $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = -2 = f'(0^+)$ Es derivable en $x = 0$.

- Signo de $f'(x)$:



Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decrece en $(-1, 1)$.

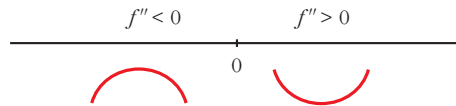
Tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, 1)$.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. No existe $f''(0)$.

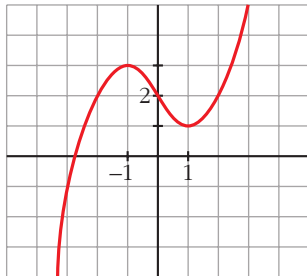
Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

En $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión.

- Representación:



11 Representa las siguientes funciones. Indica, en cada caso, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos, si los hay:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

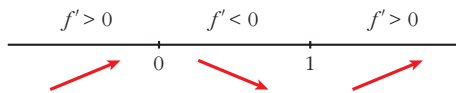
f es continua si $x \neq 1$ porque son continuas las funciones que la definen.

No es continua en $x = 1$, porque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -3$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{No es derivable en } x = 1, \\ \text{porque no es continua.} \end{array}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0, \quad 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

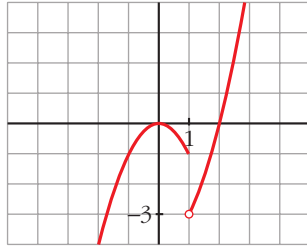
Signo de f' :



Crece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(0, 1)$.

Máximo: $(0, 0)$

Representación:



$$b) \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f es continua si $x \neq 1$ porque son continuas las funciones que la definen.

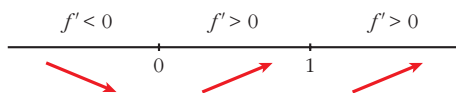
En $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} f \text{ es continua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{No es derivable en } x = 1, \\ \text{porque no existe } f'(1^+). \end{array}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

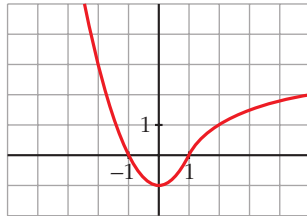
Signo de f' :



Crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

Mínimo: $(0, -1)$

Representación:



$$c) f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f es continua si $x \neq 1$, porque lo son las funciones que la definen.

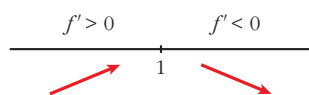
En $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2 \\ f(1) &= 2 \end{aligned} \right\} f \text{ es continua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{No es derivable en } x = 1, \text{ porque } f'(1^-) \neq f'(1^+).$$

No hay puntos en los que $f'(x) = 0$.

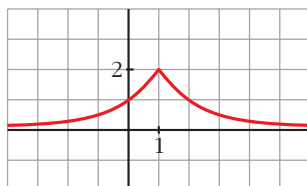
Signo de f' :



Crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

Máximo: $(1, 2)$ (no es derivable en ese punto).

Representación:



$$d) f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

f es continua en $x \neq 1$, porque lo son las funciones que la definen.

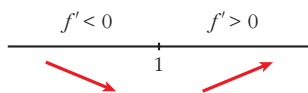
En $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 2) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \\ f \text{ no es continua en } x = 0. \end{array}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{No existe } f'(1), \text{ porque } f \text{ es} \\ \text{discontinua en } x = 1. \end{array}$$

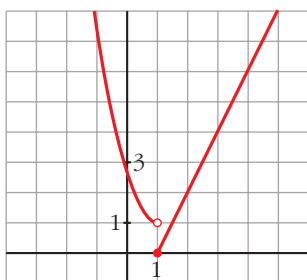
No existen puntos en los que $f'(x) = 0$.

Signo de f' :



Decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

Representación:



12 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

Si $x \neq 0$, f es continua por estar definida por polinomios.

Si $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1)^2 = 1 \\ f(0) = (0 - 1)^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0), \\ f \text{ es continua en } x = 0. \end{array}$$

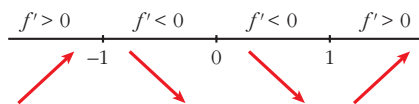
- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x - 1) & \text{si } x > 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Como } f'(0^-) \neq f'(0^+), \\ f \text{ no es derivable en } x = 0. \end{array}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2(x - 1) = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1; f(1) = 0$$

Signo de f' :



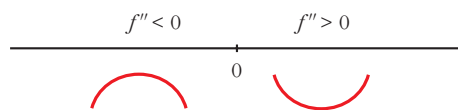
Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.

Máximo en $(-1, 3)$. Mínimo en $(1, 0)$.

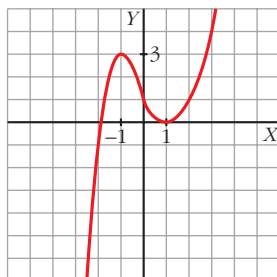
- Curvatura:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f''(0^-) \neq f''(0^+). \\ \text{Por tanto, no existe } f''(0). \end{array}$$

Signo de f'' :



Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.



13 Define por intervalos y representa las siguientes funciones:

a) $y = (x - 2)|x|$

b) $y = x|x - 1|$

c) $y = |-x^2 + 1|$

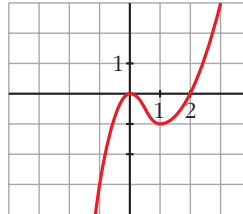
d) $y = |x^2 - 4x|$

e) $y = \frac{1}{|x|}$

f) $y = \frac{1}{|x - 2|}$

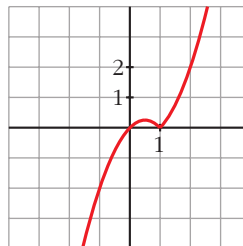
a) $y = (x - 2)|x| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

La gráfica de la función está formada por dos ramas de parábola:

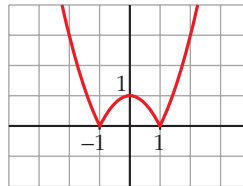


b) $y = x|x - 1| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

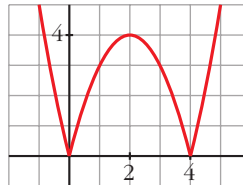
La gráfica de la función está formada por dos ramas de parábola:



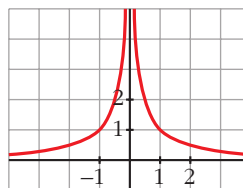
c) $y = |-x^2 + 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



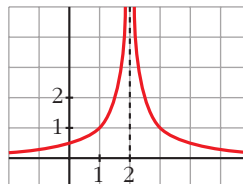
d) $y = |x^2 - 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 4 \end{cases}$



e) $y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$



f) $y = \frac{1}{|x - 2|} = \begin{cases} -\frac{1}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$



14 En las funciones del ejercicio anterior, determina los máximos y los mínimos de los apartados a), b), c) y d) y las asíntotas en e) y f).

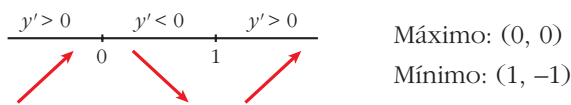
Máximos y mínimos

$$a) y = (x - 2)|x| = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

No es derivable en $x = 0$.

$$y' = 0 \begin{cases} -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ (no vale, porque } x < 0) \\ 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Signo de y' :

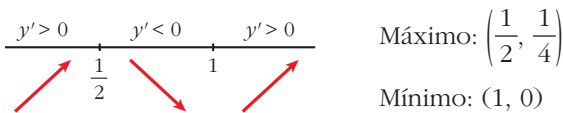


$$b) y = x|x - 1| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

No es derivable en $x = 1$.

$$y' = 0 \begin{cases} -2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1/2, f(1/2) = 1/4 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/2 \text{ (no vale, } x > 1) \end{cases}$$

Signo de y' :

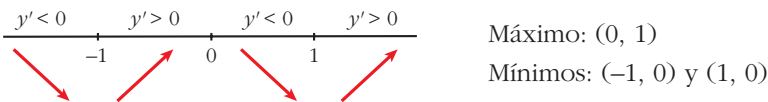


$$c) y = |-x^2 + 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$.

$$y' = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de y' :

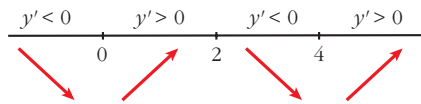


$$d) y = |x^2 - 4x| = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 4x & \text{si } x > 4 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 4 & \text{si } 0 < x < 4 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

No es derivable en $x = 0$, ni en $x = 4$.

$$y' = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ (no vale, } x < 0) \\ -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow f(2) = 4 \\ 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ (no vale, } x > 4) \end{cases}$$

Signo de y' :



Máximo: $(2, 4)$

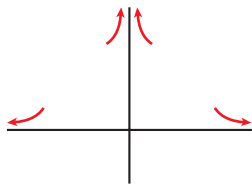
Mínimos: $(0, 0)$ y $(4, 0)$

Asíntotas

$$e) y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$, porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.
- Asíntota horizontal: $y = 0$, ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ con $y > 0$.

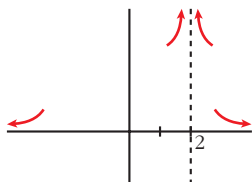
Posición:



$$f) y = \frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Asíntota vertical: $x = 2$, porque $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$.
- Asíntota horizontal: $y = 0$, porque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x-2|} = 0$ con $y > 0$.

Posición:



PARA RESOLVER

15 Representa las siguientes funciones, estudiando:

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.

— Crecimiento y extremos relativos.

a) $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ b) $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$ c) $y = \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 2}$

d) $y = \frac{x^2}{9 - x^2}$ e) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ f) $y = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$

g) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ h) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$ i) $y = \frac{x^3}{x + 2}$

j) $y = \frac{(x - 2)^2}{x - 1}$

a) $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

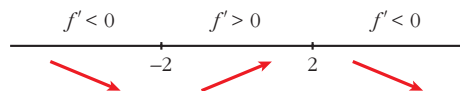
• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x - 2)^2 - (4x - 12) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{4(x - 2) - 2(4x - 12)}{(x - 2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x - 2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x - 2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$$

Signo de $f'(x)$:

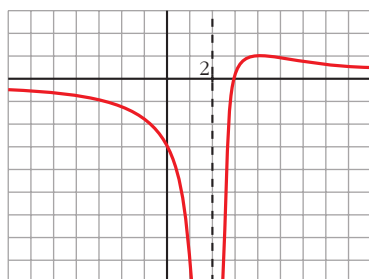


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

es creciente en $(2, 4)$.

tiene un máximo en $(4, 1)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

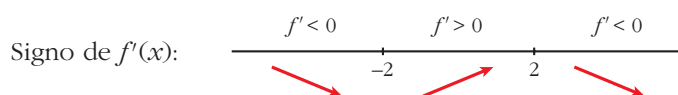
$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x-2 = 0 \rightarrow x = -2$$

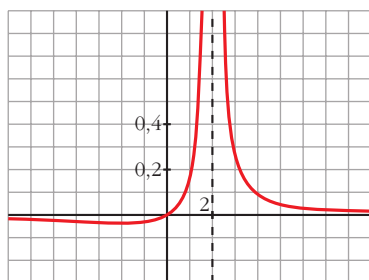


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(-2, 2)$.

tiene un mínimo en $\left(-2, \frac{-1}{8}\right)$.

• **Gráfica:**



$$c) y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \frac{1}{x-2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x - 2$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

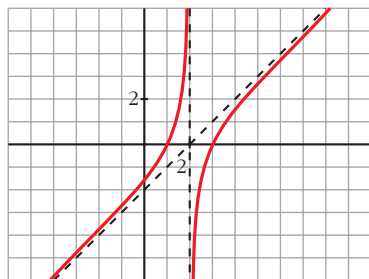
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2}{9-x^2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

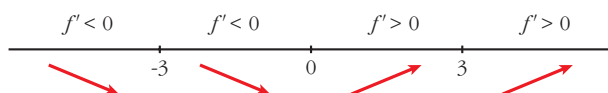
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 18x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

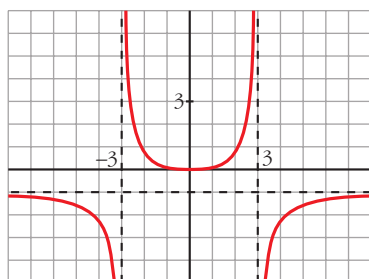


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



e) $y = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

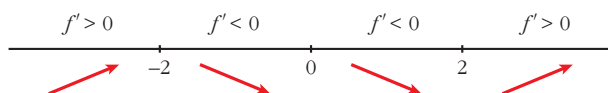
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



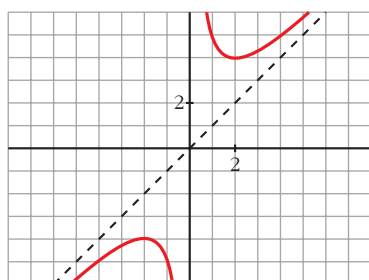
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 4)$.

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

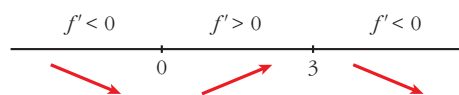
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} = \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

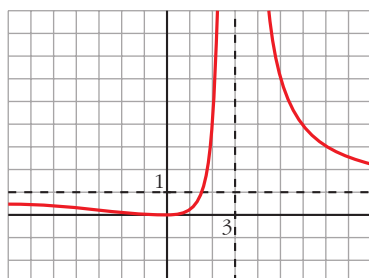


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

es creciente en $(0, 3)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



$$g) y = \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 2x - \frac{2x}{x^2 + 1}$$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2x$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

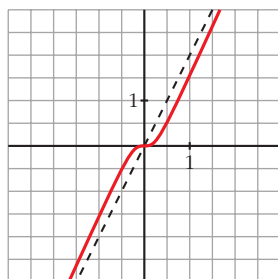
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente en todo \mathbb{R} .

• **Gráfica:**



$$h) y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

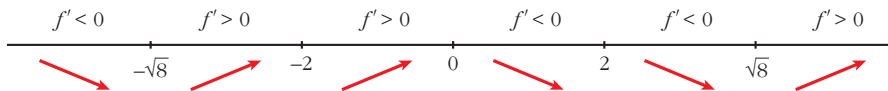
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



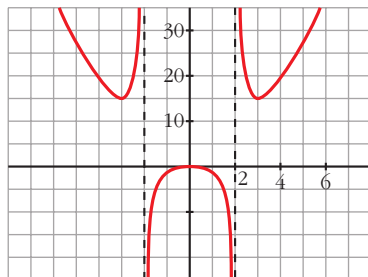
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$.

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$.

tiene un máximo en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



$$i) y = \frac{x^3}{x+2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

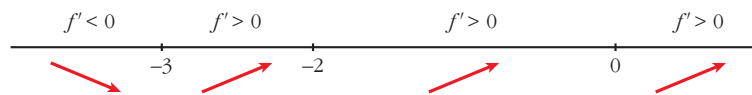
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



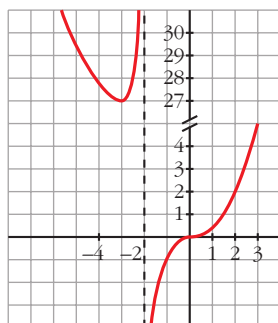
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$.

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-3, 27)$.

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



j) $y = \frac{(x-2)^2}{x-1} = x-3 + \frac{1}{x-1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

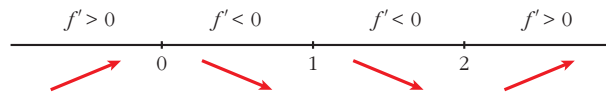
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 3$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



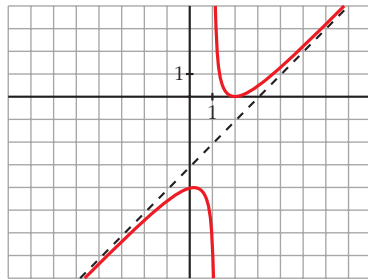
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 0)$.

• **Gráfica:**



s16 a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por:

$$f(x) = \frac{1+x^2}{x}$$

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f .

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

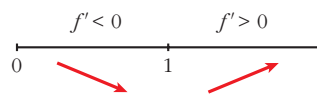
(Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$).

b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$).

Signo de $f'(x)$:

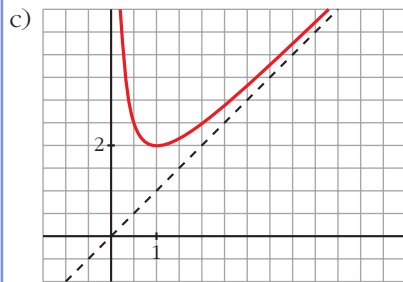


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$.

es creciente en $(1, +\infty)$.

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$.

no tiene un máximo.



17 En las siguientes funciones se pide:

- Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a ellas.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento y extremos.
- Representación gráfica.

a) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

b) $y = \frac{3 - 2x}{x}$

c) $y = x^2 - \frac{2}{x}$

d) $y = \frac{x^2}{x + 2}$

a) $y = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

- Dominio:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 3. \text{ Dom} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

- Asíntotas verticales:

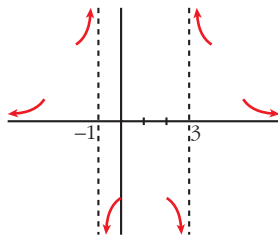
$$x = -1. \text{ Posición } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \end{cases}$$

$$x = 3. \text{ Posición } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$y = 0, \text{ porque } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0.$$

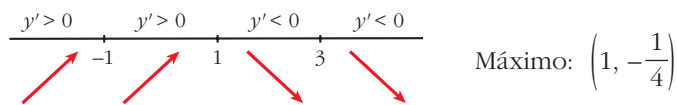
$$\text{Posición } \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y > 0 \end{cases}$$



- Intervalos de crecimiento, de decrecimiento y extremos:

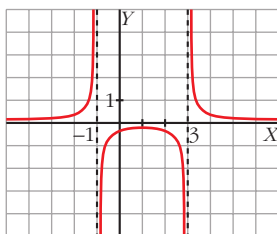
$$y' = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, f(1) = -\frac{1}{4}$$

Signo de y' :



Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

Intervalos de decrecimiento: $(1, 3) \cup (3, +\infty)$



$$b) y = \frac{3 - 2x}{x}$$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntotas verticales:

$$x = 0. \text{ Posición } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 - 2x}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - 2x}{x} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - 2x}{x} = -2, \quad y = -2.$$

$$\text{Posición } \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > -2 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < -2 \end{cases}$$

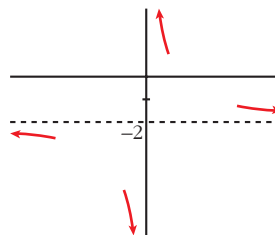
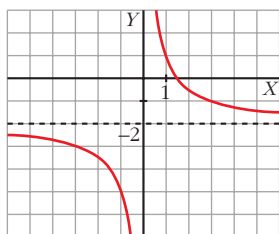
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$$y' = \frac{-2x - (3 - 2x)}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$$

Signo de y' : Es negativa en todo su dominio.

La función es decreciente en su dominio.

No tiene máximos ni mínimos.



$$c) y = x^2 - \frac{2}{x}$$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntota vertical:

$$x = 0. \text{ Posición } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal no tiene, porque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^2 - \frac{2}{x}\right) = +\infty$.

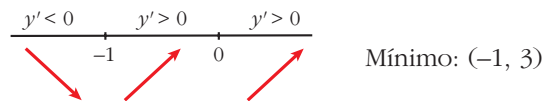
- Tampoco tiene asíntota oblicua, porque:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - \frac{2}{x^2} \right) = \pm\infty$$

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

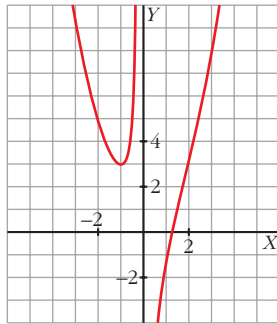
$$y' = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 + 2}{x^2}; \quad y' = 0 \rightarrow 2x^3 + 2 = 0 \rightarrow x = -1, \quad f(-1) = 3$$

Signo de y' :



Intervalos de crecimiento: $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -1)$



d) $y = \frac{x^2}{x + 2}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$
- Asíntotas verticales: $x = -2$

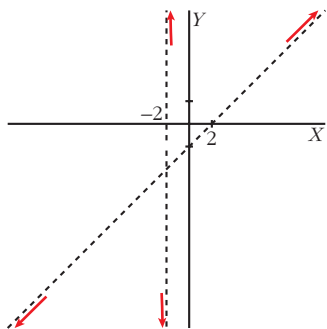
Posición $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x + 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x + 2} = +\infty \end{array} \right.$

- Asíntota horizontal no tiene, porque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x + 2} = \pm\infty$.
- Asíntota oblicua:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ -x^2 - 2x \\ -2x \\ 2x + 4 \\ 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} x + 2 \\ x - 2 \end{array} \right. \rightarrow y = x - 2 + \frac{4}{x + 2}$$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

Posición $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, y > x - 2 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < x - 2 \end{array} \right.$

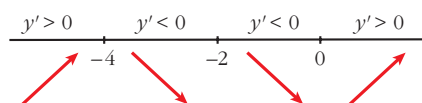


- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 + 4x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0; y = 0 \\ x = -4; y = -8 \end{array} \right.$$

Signo de y' :

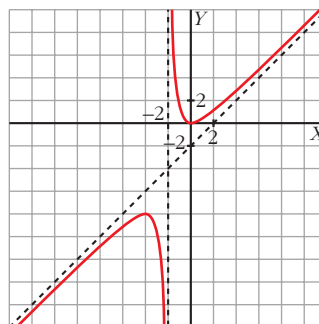


Crece en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

Decrece en $(-4, -2) \cup (-2, 0)$.

Máximo: $(-4, -8)$

Mínimo: $(0, 0)$



18 Estudia y representa las funciones siguientes:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

b) $y = \frac{e^x}{x^2 + 3}$

c) $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

- Dominio: \mathbb{R}
- No tiene asíntotas verticales.

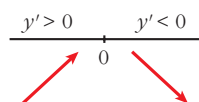
- Asíntota horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \quad (\text{con } f(x) > 0 \text{ si } x \rightarrow \pm\infty)$$

- Crecimiento:

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad y' = 0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow x = 0, \quad y = 1$$

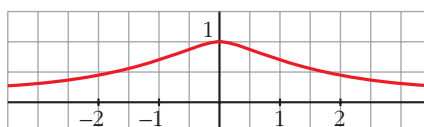
Signo de la derivada:



Crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

Máximo: $(0, 1)$

- Representación:



b) $y = \frac{e^x}{x^2 + 3}$

- Dominio: \mathbb{R}
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3} = 0 \rightarrow y = 0 \quad \text{asíntota horizontal hacia } -\infty \text{ (con } f(x) > 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty)$$

- Crecimiento:

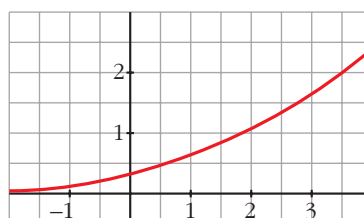
$$y' = \frac{e^x(x^2 + 3) + e^x \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{e^x(x^2 + 2x + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

No tiene solución. No hay puntos singulares.

La función es creciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

- Representación:



c) $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$

$$y = \frac{x(x-1)^2 + 4}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{(x-1)^2}$$

- Asíntota vertical: $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + \frac{4}{(x-1)^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + \frac{4}{(x-1)^2} \right) = +\infty$$

- No tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{4}{(x-1)^2} = \pm\infty$$

- Asíntota oblicua: $y = x$

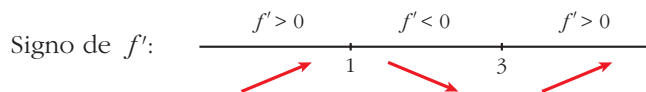
Posición $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty & f(x) > x \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty & f(x) > x \end{cases}$

- Crecimiento:

Puntos singulares:

$$y' = 1 - \frac{8}{(x-1)^3}; \quad y' = 0 \rightarrow 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = 0 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow$$

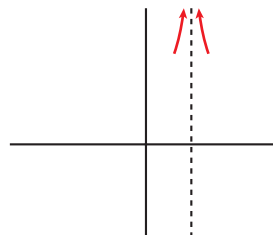
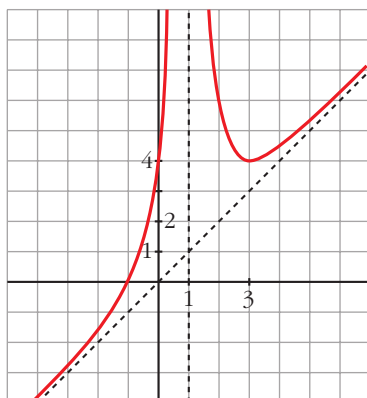
$$\rightarrow x-1 = 2 \rightarrow x = 3, \quad f(3) = 4$$



Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

Mínimo: $(3, 4)$

- Representación:



d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- Dominio: \mathbb{R}
- No tiene asíntotas verticales, ni horizontales.
- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2 + 1}}{-x} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua hacia $-\infty$.

- Puntos singulares:

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0, \quad f(0) = 1$$

Signo de la derivada:

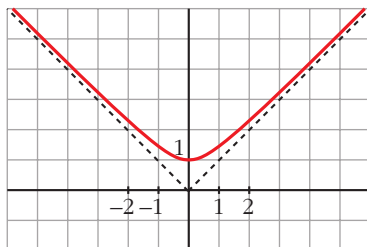
$$\frac{y' < 0}{\quad} \quad \frac{y' > 0}{\quad}$$

0

Crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

Mínimo: $(0, 1)$.

- Representación:



19 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt[3]{x^2}$

d) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

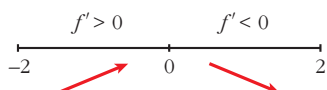
a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

- **Dominio:** $[-2, 2]$
- **Asíntotas:** no tiene.
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

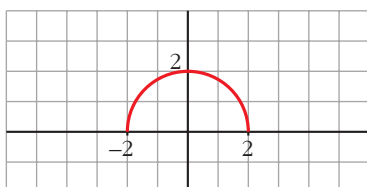
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2)$.
Tiene un máximo en $(0, 2)$.

- Corta el eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x][\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$y = -x + \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < -x + \frac{1}{2}$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x][\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

$y = x - \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) < x - \frac{1}{2}$).

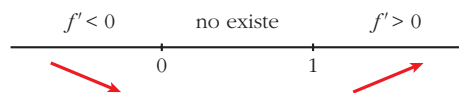
• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares (en $x = \frac{1}{2}$ no está definida $f(x)$).

Signo de $f'(x)$:

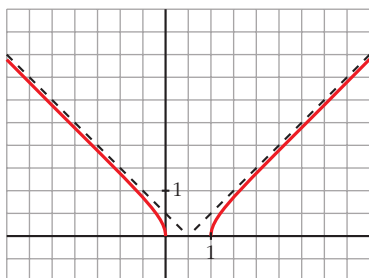


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$.

es creciente en $[1, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Simetría:**

$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

- No tiene asíntotas.

- **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas.}$$

- **Puntos singulares:**

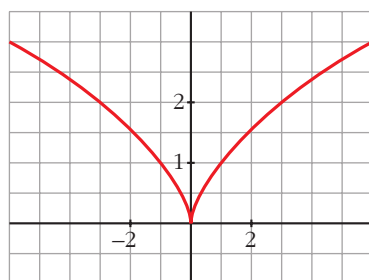
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

No existe $f'(0) \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

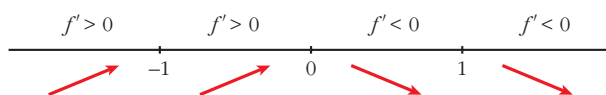
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \text{Ramas parabólicas.}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt{(1-x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = -1 \text{ ni en } x = 1.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

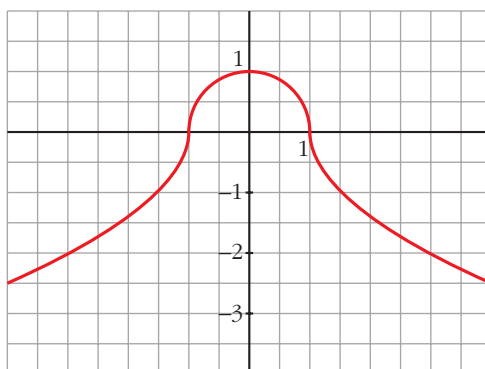
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, +\infty)$; tiene un máximo en $(0, 1)$.

• Corta al eje X en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



20 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x + |x + 2|$

b) $y = 2x - |x - 3|$

c) $y = |x| + |x - 3|$

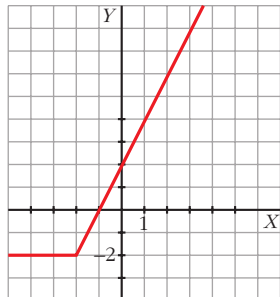
d) $y = x|x - 1|$

a) $y = x + |x + 2|$

Como $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de -2 para definirla por intervalos.

$$\frac{-x-2}{x} \quad \frac{x+2}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$



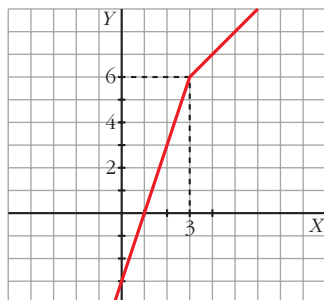
b) $y = 2x - |x - 3|$

Estudiamos la función para valores menores y mayores que 3.

$$\frac{-x+3}{2x} \quad \frac{x-3}{2x}$$

Restamos: $\begin{cases} 2x - (-x + 3) = 3x - 3 \\ 2x - (x - 3) = x + 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



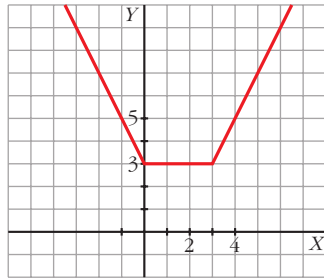
c) $y = |x| + |x - 3|$

Como $|x| = 0$ en $x = 0$ y $|x - 3| = 0$ en $x = 3$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de esos puntos.

$$\frac{-x}{-x+3} \quad \frac{x}{-x+3} \quad \frac{x}{x-3}$$

Sumamos: $\begin{cases} -x + (-x + 3) = -2x + 3 \\ x + (-x + 3) = 3 \\ x + (x - 3) = 2x - 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



d) $y = x|x - 1|$

Estudiamos f a la derecha y a la izquierda de $x = 1$.

$$\frac{-x + 1}{x} \quad \frac{x - 1}{x}$$

Multiplicamos: $\begin{cases} x(-x + 1) = -x^2 + x \\ x(x - 1) = x^2 - x \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $y = -x^2 + x$ es una parábola abierta hacia abajo:

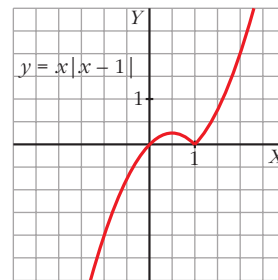
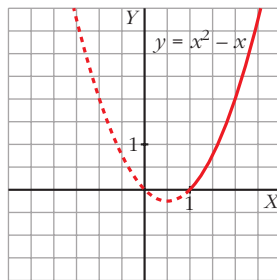
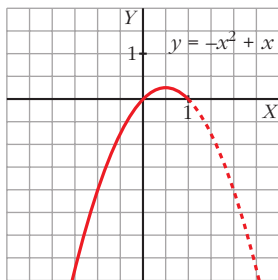
Vértice: $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Cortes con OX: $-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

- $y = x^2 - x$ es una parábola abierta hacia arriba:

Vértice: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (no vale, ya que debe ser $x \geq 1$)

Cortes con OX: $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$



21 Representa gráficamente:

a) $y = \frac{1}{|x| - 2}$

b) $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

$$a) y = \frac{1}{|x| - 2}$$

Definimos la función por intervalos:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x-2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \frac{1}{-x-2} = \frac{-1}{x+2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asíntota vertical:

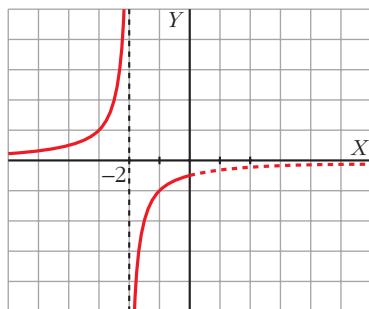
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < -2, f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{Si } x > -2, f(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$x = -2$ es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($f(x) > 0$).



Si $x \geq 0$, $y = \frac{1}{x-2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$

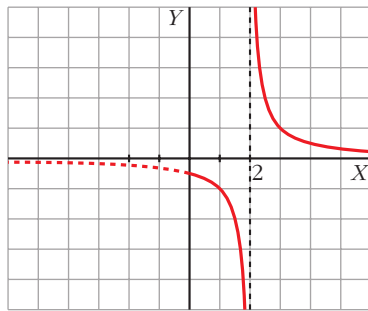
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 2, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

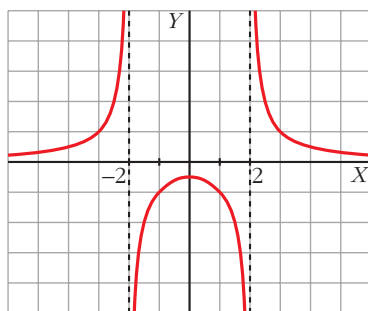
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($f(x) > 0$).



La gráfica de $y = \frac{1}{|x| - 2}$ es:



b) $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \frac{-2x}{x^2 + 1}$:

- Dominio: \mathbb{R}
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0$$

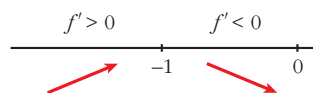
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

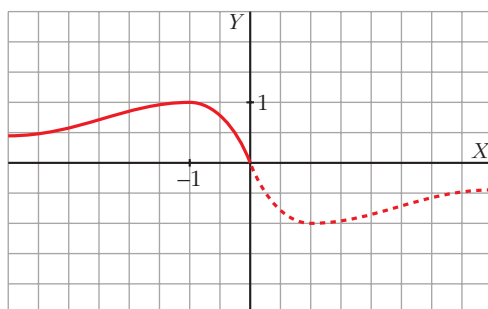
$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1) + 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \begin{cases} x = 1 \text{ (no vale, } 1 > 0) \\ x = -1, f(-1) = 1 \end{cases}$$

Signo de f' :



Máximo en $(-1, 1)$.



Si $x \geq 0$, $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$:

- Dominio: \mathbb{R}
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

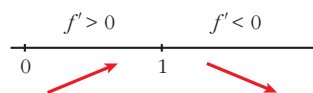
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

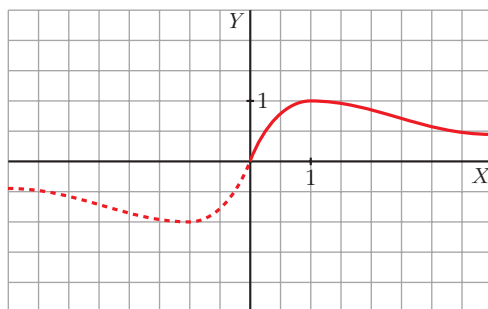
$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ (no vale, } -1 < 0) \\ x = 1, f(1) = 1 \end{cases}$$

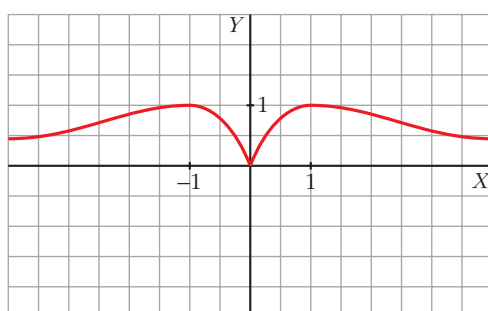
Signo de f' :



Máximo en $(1, 1)$.



La gráfica de $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$ es:



s22 Considera la función $f(x) = x^2|x - 3|$:

a) Halla los puntos donde f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Representala gráficamente.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2(-x + 3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Si $x \neq 3$, tenemos que $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f'(3^-) &= -9 \\ f'(3^+) &= 9 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \text{ (Punto } (3, 0)). \end{array} \right.$$

b) $f'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 6x = 0$ si $x < 3$

$$3x(-x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{cases}$$

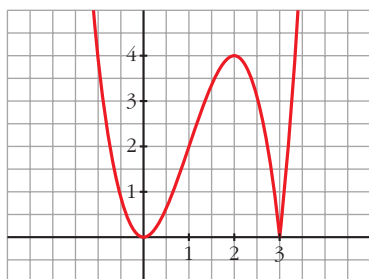
$3x^2 - 6x = 0$ si $x > 3 \rightarrow$ ninguno

Como $f(x) \geq 0$ para todo x , tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



s23 La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$.

Halla el valor de k y representa la función así obtenida.

• **Hallamos k :**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 1 \quad \quad \quad | \quad x - k \\ -2x^2 + 2kx \quad \quad \quad | \quad 2x + 2k \\ \hline 2kx + 1 \\ -2kx + \quad 2k^2 \\ \hline 1 + 2k^2 \end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2k$.

$$2x + 2k = 2x + 6 \rightarrow 2k = 6 \rightarrow k = 3$$

Por tanto, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

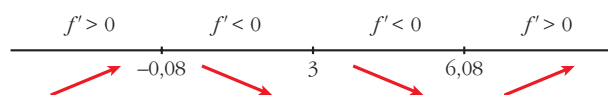
• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6,08, f(6,08) = 24,32 \\ x = -0,08, f(-0,08) = -0,33 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



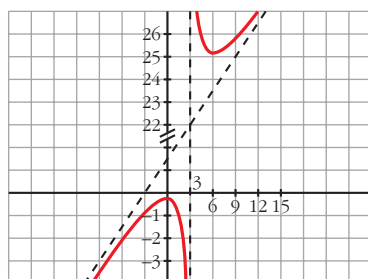
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0,08) \cup (6,08; +\infty)$.

es decreciente en $(-0,08; 3) \cup (3; 6,08)$.

tiene un máximo en $(-0,08; -0,33)$.

tiene un mínimo en $(6,08; 24,32)$.

• **Gráfica:**



s24 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0]$, estudia la existencia de puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, la existencia de puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• Si $x \in (-\infty, 0)$, $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Si $x = 0$, $y = -x + 1 = 1$

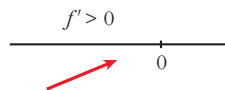
Cortes con los ejes: $x = 0, y = 1 \rightarrow (0, 1)$

$$y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \text{ No tiene solución. No corta a } Y.$$

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}; \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = 1$$

Signo de $f'(x)$:

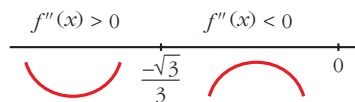


La función es creciente.

• Puntos de inflexión:

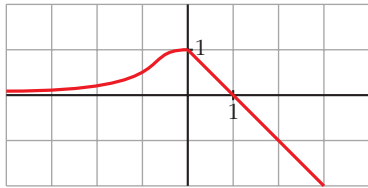
$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}; \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (no vale)} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right) \approx (-0,58; 0,75)$

- Representación:



- 25** Dada la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b , representa la función.

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

- Pasa por $(-2, -6)$, $f(-2) = -6 \rightarrow -2a + b - 4 = -6$
 - Tangente horizontal $\rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0$
- $$\left. \begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array}$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$

- **Domínio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \rightarrow y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

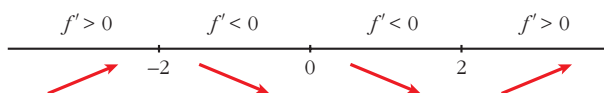
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2, f(-2) = -6 \\ x = 2, f(2) = 10 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



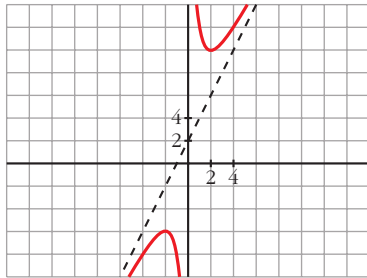
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -6)$.

tiene un mínimo en $(2, 10)$.

• **Gráfica:**



26 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x-1)e^{-x}$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \frac{x}{e^x}$

• **Dominio:** \mathbb{R} (ya que $e^x \neq 0$ para todo x).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

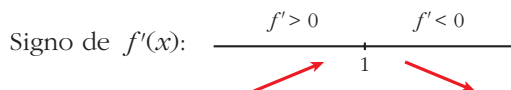
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1$$



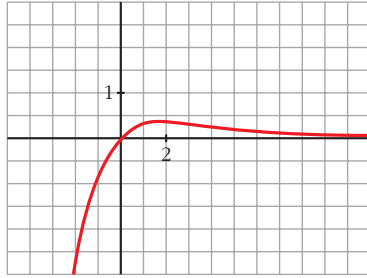
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

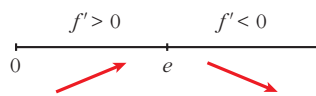
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Signo de $f'(x)$:



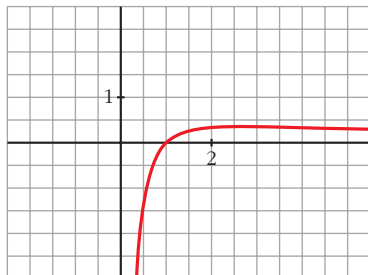
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$.

es decreciente en $(e, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

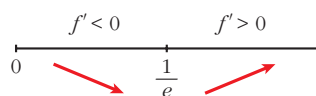
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



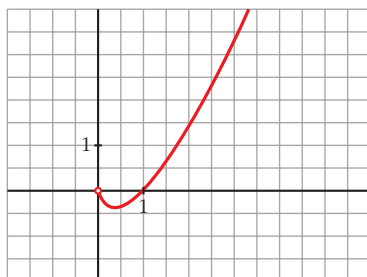
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^{-x}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

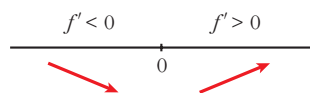
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



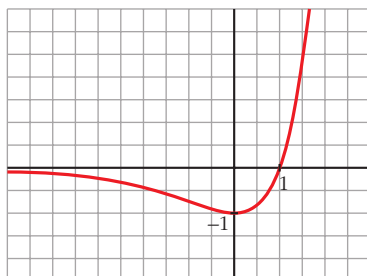
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

es creciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, -1)$.

• Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



e) $y = e^{-x^2}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

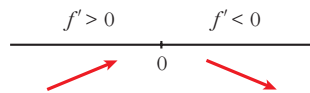
$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo x).

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

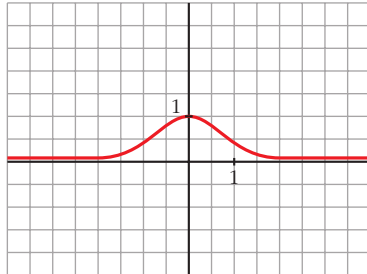


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

es decreciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$$

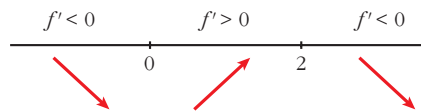
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

- **Puntos singulares:** $y = \frac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



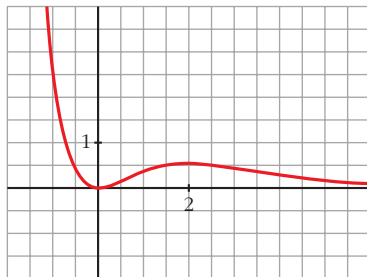
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(0, 2)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

tiene un máximo en $(2, \frac{4}{e^2})$.

- **Gráfica:**



g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

- **Dominio:**

$\ln x = 0 \rightarrow x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

$Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

} $x = 1$ es asíntota vertical.

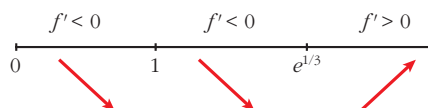
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow$ Rama parabólica

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(3 \ln x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = 1/3 \rightarrow x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

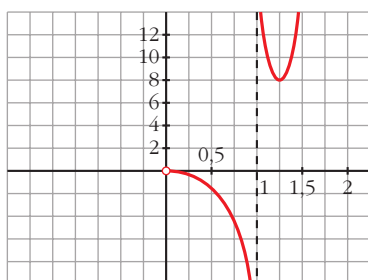


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

• **Gráfica:**



h) $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

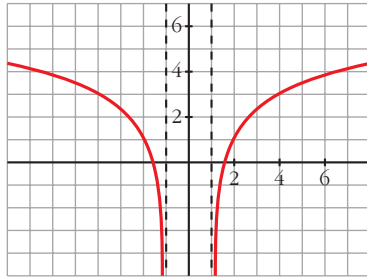
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje X:**

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gráfica:**



27 Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh } x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x .

- $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{no hay máximos ni mínimos}$$

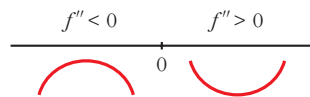
$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow$$

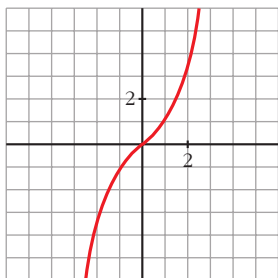
$$\rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**

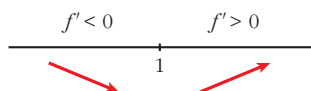


b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x .

• $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$

Signo de $f'(x)$:

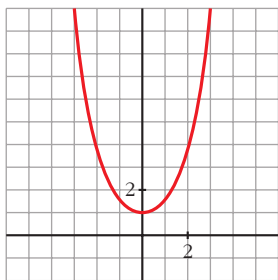


Hay un mínimo en $(0, 1)$.

• $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \rightarrow$ No tiene solución. \rightarrow No hay puntos de inflexión.

• **Gráfica:**



28 Halla los valores de a , b y c para los cuales la función:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

tiene como **asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en $(0, 1)$.**

Si $y = -1$ es asíntota horizontal, debe ser:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a = -1 \rightarrow a = -1$$

Para que tenga un mínimo en (0, 1), debe ser $f'(0) = 0$ y $f(0) = 1$:

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - 2x(ax^2 + bx + c)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-4b}{16} = 0 \rightarrow -\frac{b}{4} = 0 \rightarrow b = 0$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = 1 \rightarrow \frac{c}{-4} = 1 \rightarrow c = -4$$

Por tanto: $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$

29 Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las siguientes:

a) $y = \frac{1}{\text{sen } x}$

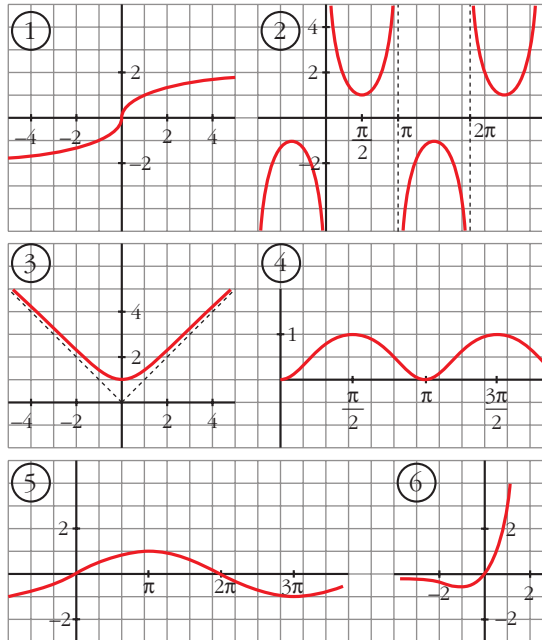
b) $y = x e^x$

c) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = \text{sen}^2 x$



a) $y = \frac{1}{\text{sen } x}$

• **Dominio:**

$$\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$$

• **Asíntotas:**

$$x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ son asíntotas verticales.}$$

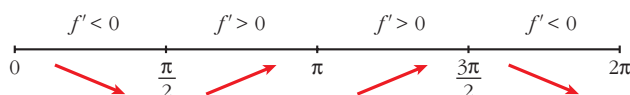
No hay más asíntotas.

• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{array} \right\} (k \in \mathbb{Z})$$

Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



$f(x)$ es periódica de período 2π .

$f(x)$ es decreciente en $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

es creciente en $(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

tiene un mínimo en $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

tiene un máximo en $(\frac{3\pi}{2}, -1)$.

• **Gráfica** → ②

b) $y = xe^x$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

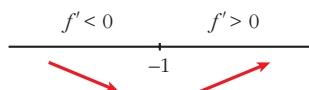
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Extremos:**

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 + x = 0 \rightarrow x = -1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$.
 es creciente en $(-1, +\infty)$.
 tiene un mínimo en $(-1, \frac{-1}{e})$.

• **Gráfica** → ⑥

c) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

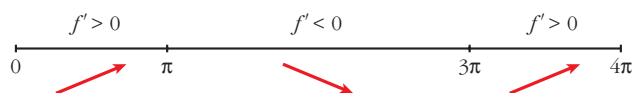
- **Dominio:** \mathbb{R}
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ es periódica de período 4π .

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.
 es decreciente en $(\pi, 3\pi)$.
 tiene un máximo en $(\pi, 1)$.
 tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$.

• **Gráfica** → ⑤

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Dominio:** \mathbb{R}
- **Asíntotas:** No tiene.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente.

• **Gráfica** → ①

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Simetría:**

$$f(-x) = f(x) \rightarrow f(x) \text{ es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x$).

Por simetría:

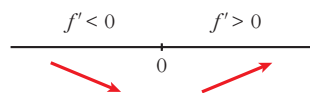
$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x$).

- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

es creciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica** \rightarrow ③

f) $y = \text{sen}^2 x$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Asíntotas:** No tiene.

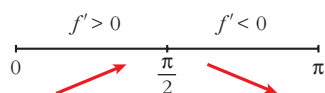
- **Extremos:**

$$f'(x) = 2 \text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$f(x)$ es periódica de período π .

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$.

- **Gráfica** \rightarrow ④

30 Halla los puntos de corte con los ejes, los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$, y represéntalas:

a) $y = 1 - 2\cos x$

b) $y = 1 + 2\text{sen } x$

c) $y = \text{sen } x - \cos x$

d) $y = \text{sen } x + \cos x$

a) $y = 1 - 2\cos x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow$

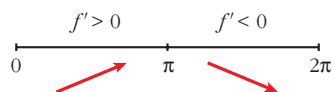
$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right\} \text{Puntos } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = 2\text{sen } x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \pi)$ y es decreciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.

Tiene un máximo en $(\pi, 3)$, un mínimo en $(0, -1)$ y otro mínimo en $(2\pi, -1)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 2\cos x$$

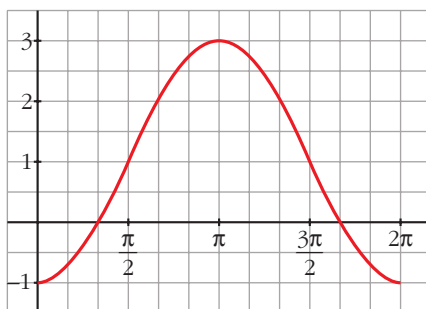
$$f''(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión: $(\frac{\pi}{2}, 1)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 1)$

• **Gráfica:**



b) $y = 1 + 2\text{sen } x$

• **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (está solo definida en este intervalo).

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 + 2\text{sen } x = 0 \rightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{2} \rightarrow$

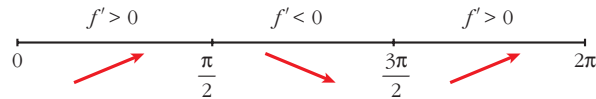
$$\left. \begin{matrix} x = \frac{7\pi}{6} \\ x = \frac{11\pi}{6} \end{matrix} \right\} \text{Puntos } \left(\frac{7\pi}{6}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$$

• **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = 2\cos x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

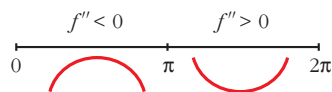
Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, y un mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -2\sin x$$

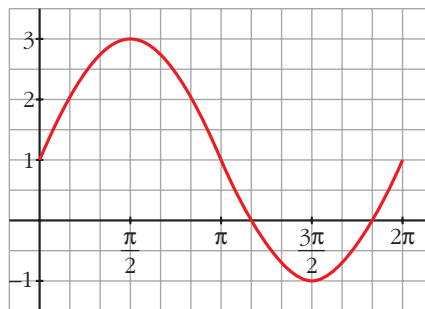
$$f''(x) = 0 \rightarrow \sin x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ y en $(2\pi, 1)$.

• **Gráfica:**



c) $y = \sin x - \cos x$

• **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{sen } x - \text{cos } x = 0$

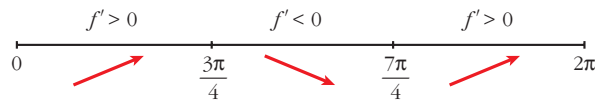
$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \text{Puntos } \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$$

• **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \text{cos } x + \text{sen } x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{cos } x + \text{sen } x = 0 \rightarrow 1 + \text{tg } x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

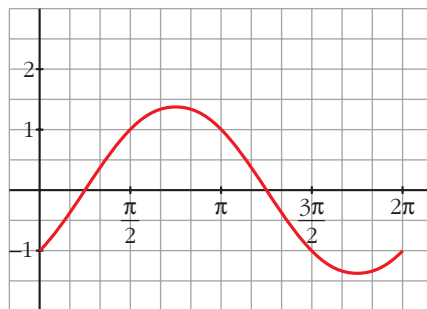
Tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, y un mínimo en $\left(\frac{7\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -\text{sen } x + \text{cos } x = -(\text{sen } x - \text{cos } x) = -f(x)$$

Los puntos de inflexión son los puntos de corte con el eje X .

• **Gráfica:**

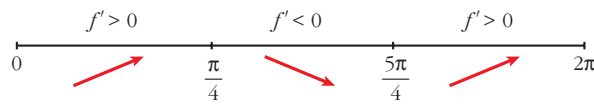


d) $y = \text{sen } x + \text{cos } x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

• $f'(x) = \text{cos } x - \text{sen } x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{cos } x = \text{sen } x \rightarrow \text{tg } x = 1 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



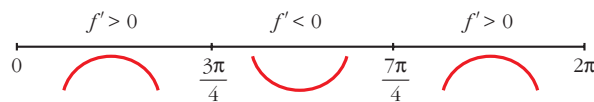
Hay un máximo en $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, y un mínimo en $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -\text{sen } x - \cos x$$

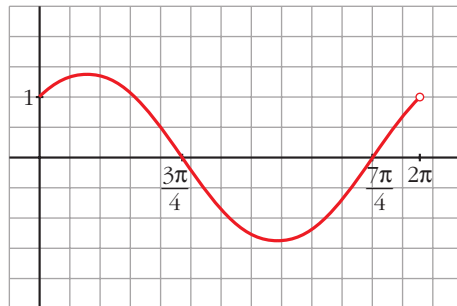
$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{sen } x = -\cos x \rightarrow \text{tg } x = -1 \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ y otro en $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

• **Gráfica:**



Página 207

CUESTIONES TEÓRICAS

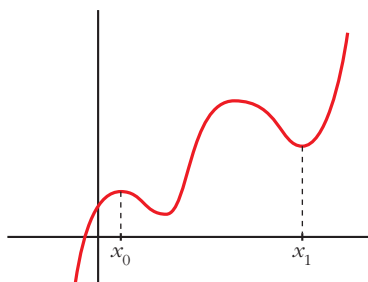
31 ¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos?

En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0 .

32 ¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f''(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

33 Comprueba que la función $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

34 La función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

35 ¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \frac{1}{\text{sen } x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio 17, en la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \rightarrow -\infty$ y otra cuando $x \rightarrow +\infty$.

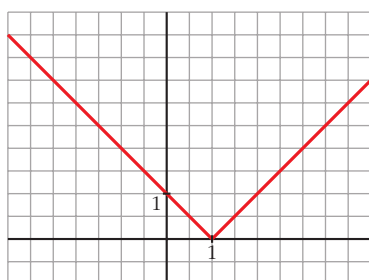
s36 Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Representala.

$$y = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



s37 Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.

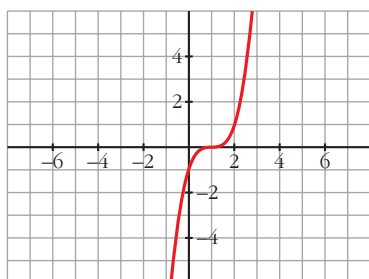
Por ejemplo, $y = (x - 1)^3$.

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$$

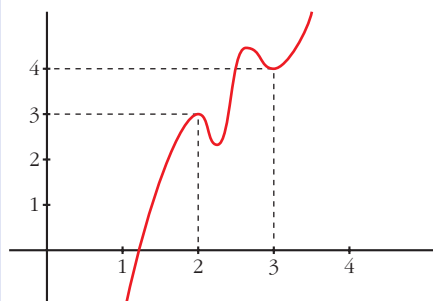
$$f'(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \rightarrow f(x) \text{ es creciente.}$$

En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



- s38** Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$. Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?



$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).

PARA PROFUNDIZAR

- s39** Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, se pide:

- Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.
- Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Dibuja la gráfica de f .

a) • **Dominio:** \mathbb{R} (porque $x^2 + 1 > 0$ para todo x).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales, porque el denominador no se anula para ningún valor de x .

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

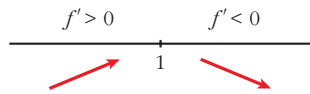
$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -1$).

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 1$).

$$b) f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1 - x^2 - x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1$$

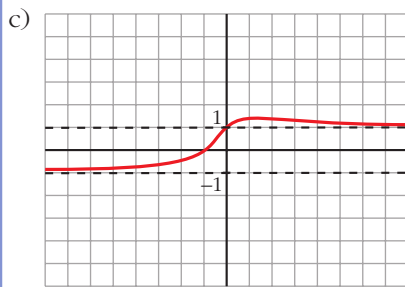
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $(1, \sqrt{2})$.



40 Determina las asíntotas de estas funciones:

a) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{3x}$

b) $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

a) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{3x}$

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

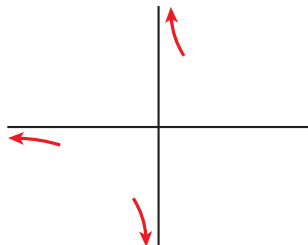
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = \pm \infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y < 0$)



$$b) y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

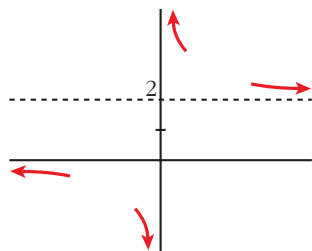
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($y > 2$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y < 0$).



Página 207

AUTOEVALUACIÓN

1. Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

$$f(x) = x^3 + 2x + 4$$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = -2 \rightarrow \text{no tiene solución.}$$

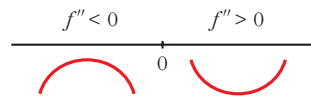
$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \rightarrow f(x) \text{ es creciente.}$$

No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = 4$$

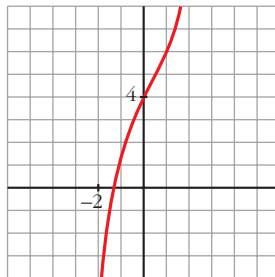
Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

• Además, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

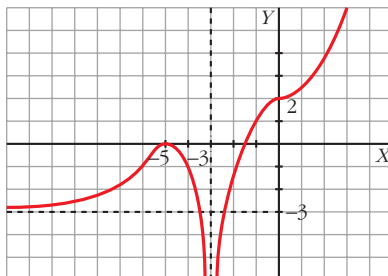
• Gráfica:



2. Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$; $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$;

$f'(-5) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(-5) = 0$; $f(0) = 2$



Tiene tangente horizontal en los puntos $(-5, 0)$ y $(0, 2)$. En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.

3. Estudia las asíntotas y los puntos singulares de $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$ y represéntala gráficamente.

$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$

• Dominio: \mathbb{R}

• Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales, ya que $x^2 + 4 \neq 0$.

Horizontales: $y = 0$, ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{x^2 + 4} = 0$.

Posición $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty & f(x) > 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty & f(x) < 0 \end{cases}$

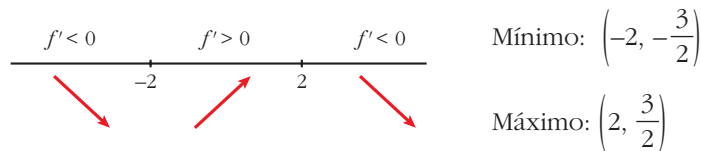


- Puntos singulares:

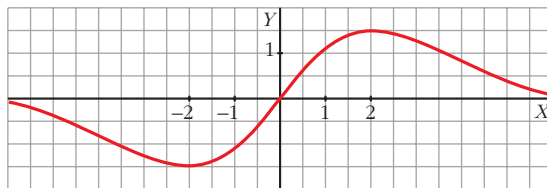
$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-6x^2 + 24}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \begin{cases} x = -2, f(-2) = -3/2 \\ x = 2, f(2) = 3/2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



- Representación:



4. Representa la función: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{No es derivable en } x = 2.$$

Para $x < 2$, la gráfica es una parábola con vértice en $(0, 4)$.

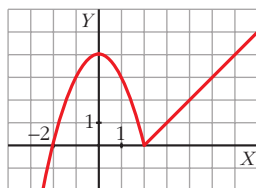
Para $x > 2$, es una recta.

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 2 \begin{cases} f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \\ \text{Es decreciente en } (0, 2). \end{cases}$$

Tiene un máximo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

Representación:



5. Estudia y representa la función $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$
- Asíntotas verticales: $x = 3$, porque $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \pm\infty$

Posición $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty \end{array} \right.$

- Asíntotas horizontales:

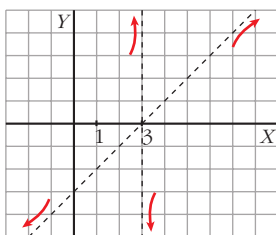
No tiene, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$

- Asíntotas oblicuas:

Expresamos la función de la forma $\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

$\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = x - 3 + \frac{-4}{x - 3} \rightarrow y = x - 3$ es la asíntota oblicua.

Posición $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) < x - 3 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) > x - 3 \end{array} \right.$



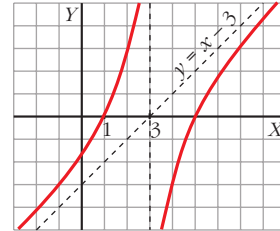
- Puntos singulares:

$y' = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)^2}$

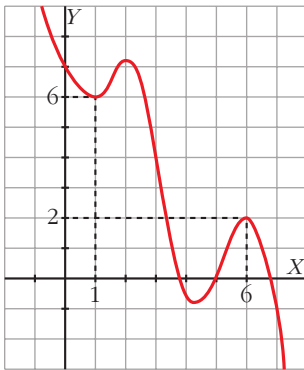
$$y' = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ (no tiene solución).}$$

Signo de y' : la derivada es positiva en todo el dominio. La función es creciente. No tiene máximos ni mínimos.

Corta a los ejes en los puntos $(0, -\frac{5}{3})$, $(1, 0)$ y $(5, 0)$.



- 6. Dibuja una función continua en \mathbb{R} que tenga un mínimo relativo en $(1, 6)$ y un máximo relativo en $(6, 2)$. Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?**



La función tendrá, como mínimo, cuatro puntos singulares, y para ello, su grado debe ser, al menos, 5.

- 7. Halla los máximos y los mínimos de la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$.**

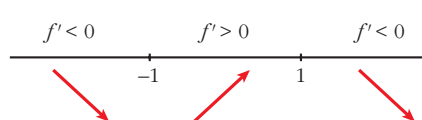
¿Tiene asíntotas? Haz una gráfica aproximada de esta función.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x+1) \cdot e^x - (x+1)^2 \cdot e^{-x}}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 1}{e^x}$$

Buscamos los puntos en los que se anula la derivada:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 1}{e^x} = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = -1, f(-1) = 0 \\ x = 1, f(1) = \frac{4}{e} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:



Máximo $(1, \frac{4}{e})$

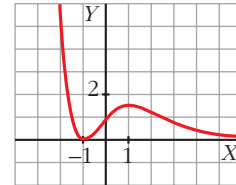
Mínimo $(-1, 0)$

Asíntotas:

- No tiene asíntotas verticales, ya que $e^x \neq 0$.
- Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es asíntota hacia } +\infty.$$

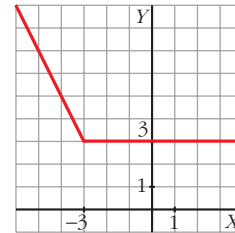
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty. \text{ No tiene asíntota hacia } -\infty.$$



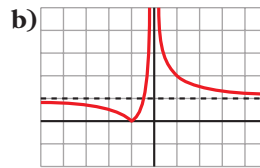
8. Dibuja la gráfica de $f(x) = |x + 3| - x$.

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x < -3 \\ x + 3 - x = 3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$



9. ¿Qué gráfica corresponde a $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$?



$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 1$

La gráfica de f es la a).