Proyecto MaTEX

Representación de Funciones

Fco Javier González Ortiz

MaTEX

GRÁFICAS

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

11 de junio de 2004

Versin 1.00

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Introducción
2. Dominio
   - De funciones racionales
3. Asíntotas
   3.1. Asíntota Vertical
   3.2. Asíntota Horizontal
   3.3. Asíntota Oblicua
   - Caso general
4. Crecimiento y Decrecimiento
5. Curvatura
   5.1. Punto de Inflexión

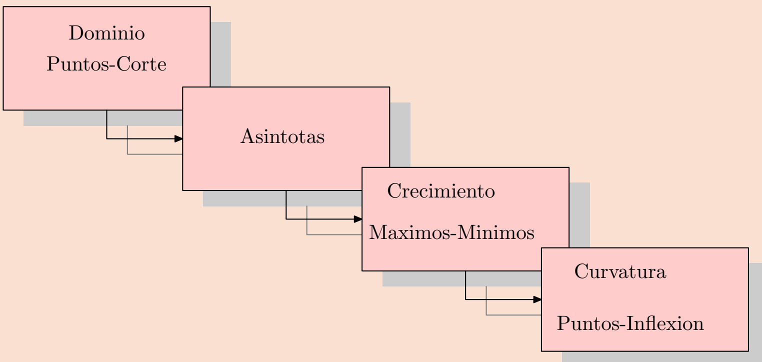
Soluciones a los Ejercicios

1. Introducción

En este capítulo vamos a aplicar las características ya estudiadas en capítulos anteriores para representar gráficamente una función real $f(x)$.

Es habitual seguir los siguientes pasos para realizar un gráfico:

- el dominio
- puntos de corte con los ejes
- las ramas del infinito para las asíntotas
- el crecimiento, decrecimiento y extremos locales con la primera derivada
- la concavidad y puntos de inflexión con la segunda derivada



◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

2. Dominio

El dominio de una función $y = f(x)$ es el conjunto de números reales en los que la función está definida.

$$D_f = \{x \in R / \exists f(x)\}$$

- **De funciones racionales**

Dada una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, el dominio de $f(x)$ viene dado por todos los números reales salvo las raíces del denominador. Es decir

$$Dom(f) = \{x \in R / Q(x) \neq 0\}$$

Ejercicio 1. Determinar el dominio de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ *b)* $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ *c)* $h(x) = \dfrac{x}{1 + x}$

Ejercicio 2. Determinar el dominio de las funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{5}$ *b)* $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ *c)* $h(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x}$

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
GRÁFICAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3. Asíntotas

En este apartado usaremos el concepto de límite para mostrar el aspecto gráfico de las funciones.

Cuando una función en la proximidad de un punto $x = \mathbf{a}$ o en el **infinito** se aproxima a una recta tanto como queramos decimos que tiene una **asíntota** o que la función tiene una rama asintótica. En caso contrario decimos que tiene una rama **parabólica**.

- Las funciones polinómicas $y = P(x)$ no tienen asíntotas, solo ramas parabólicas.
- Las funciones racionales $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios puede tener asíntotas de tres tipos:
  - *a*) asíntota horizontal
  - *b*) asíntota vertical
  - *c*) o asíntota oblicua

Vamos a analizar con detalle estos tres tipos para las funciones racionales.

3.1. Asíntota Vertical

Asíntota Vertical

Cuando en un punto $x = a$ se tiene

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

decimos que la función presenta una rama infinita o asíntota Vertical

Ejemplo 3.1. Halla y representa la asíntota vertical de $y = \dfrac{1}{x}$

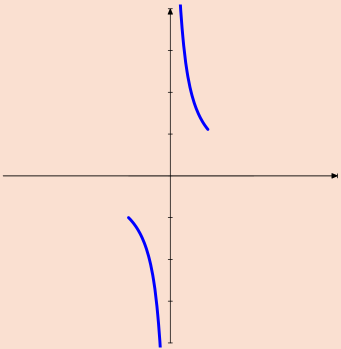
Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tiene como asíntota vertical el eje OY, $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



□

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
GRÁFICAS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejemplo 3.2. Halla la asíntotas de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Solución:

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tiene $x = 1$.

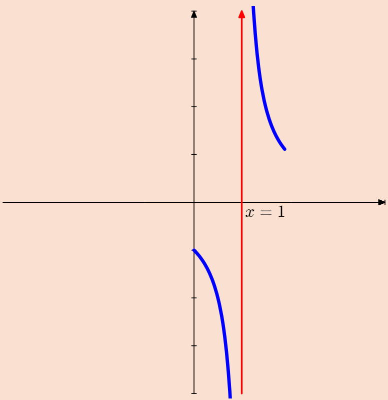
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

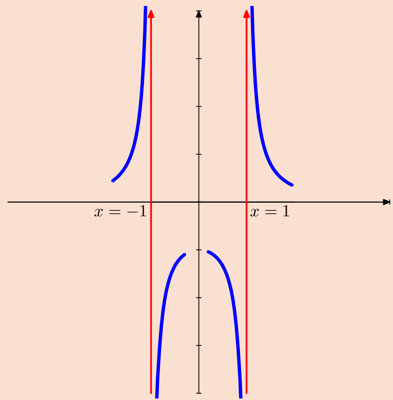
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ tiene $x = \pm 1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty$$





□

Ejemplo 3.3. Halla y representa la asíntota vertical de $y = \dfrac{1}{x^2 - 2\,x}$

Solución:

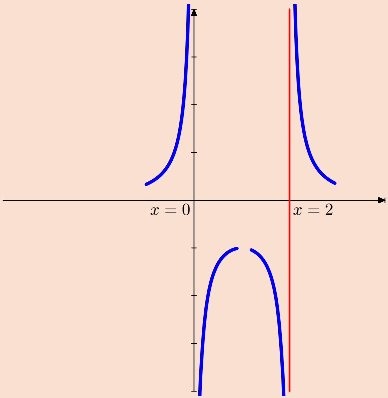
$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2\,x}$ dos asíntotas verticales $x = 0$ y $x = 2$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 - x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2 - x} = +\infty$$



□

Ejercicio 3. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas verticales de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2 + x}{3 - x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

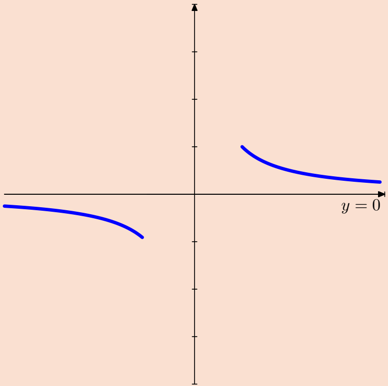
3.2. Asíntota Horizontal

Asíntota Horizontal
Cuando se tiene
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$
decimos que la función tiene la asíntota horizontal $y = L$

Ejemplo 3.4. Halla y representa la asíntota horizontal de $y = \dfrac{1}{x}$

Solución:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene $y = 0$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$
Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores grandes a x.
$$\text{Si } x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0$$
$$\text{Si } x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} < 0$$



□

Ejemplo 3.5. Halla y representa la asíntota horizontal de $y = \dfrac{x+1}{x}$

Solución:

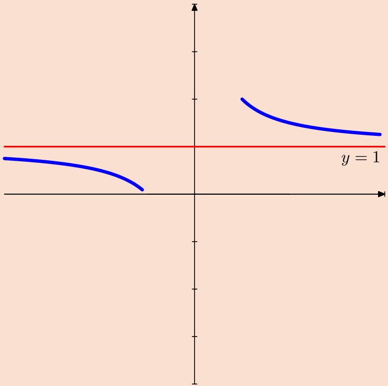
Asíntotas horizontal $y = 1$ pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Para dibujarla, lo más cómodo es dar valores «grandes» a x.

$$\text{Si } x = 10 \Longrightarrow \frac{10+1}{10} > 1$$

$$\text{Si } x = -10 \Longrightarrow \frac{(-10)+1}{-10} < 1$$



□

Ejercicio 4. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas horizontales de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

3.3. Asíntota Oblicua

Una función $f(x)$ en la proximidad del infinito $x \to \infty$ decimos que tiene como asíntota oblicua, cuando se aproxima a una recta

$$y = mx + n$$

Primero explicamos como calcularlas para las funciones racionales y después damos una expresión más general. Sea la función

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Si dividimos, la podemos expresar como

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

y para valores de x tan grandes como queramos, cuando $x \to \infty$, como $\dfrac{1}{x} \to 0$ tenemos que

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \approx \boxed{\mathrm{x}}$$

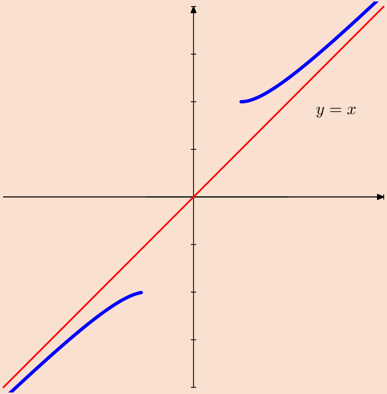
es decir para valores de x "grandes" la función toma valores cercanos a x, y por tanto su gráfica se aproxima a la recta $y = x$. Decimos que la asíntota oblicua es

$$y_o = x$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Aíntota oblicua $y = x$

$$\begin{array}{ll} x \to +\infty & f(x) > x \\ x \to -\infty & f(x) < x \end{array}$$



En general, la asíntota oblicua para las racionales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

es el cociente de la división, siempre y cuando el grado del numerador sea una **unidad mayor** que el grado del denominador.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Asíntota oblicua $y_o = C(x)$

Así pues para determinar la asíntota oblicua se dividen los polinomios y

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

se toma el cociente cuando es de grado uno, es decir una recta. En el siguiente ejemplo se muestra como se calcula.

Ejemplo 3.6. Veamos algunos ejemplos:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-1} = \boxed{x-1} + \frac{3}{x-1} \qquad y_o = x-1$$

$$g(x) = \frac{3x^2-1}{x+1} = \boxed{3x-3} + \frac{2}{x+1} \qquad y_o = 3x-3$$

$$h(x) = \frac{x^2+x+1}{1-x} = \boxed{-x-2} + \frac{3}{1-x} \qquad y_o = -x-2$$

$$j(x) = \frac{x^3+1}{x} = \boxed{x^2} + \frac{1}{x} \qquad \text{No hay oblicua}$$

$$k(x) = \frac{x+1}{x} = \boxed{1} + \frac{1}{x} \qquad y = 1 \text{ horizontal}$$

$$h(x) = \frac{2-x^2}{x} = \boxed{-x} + \frac{2}{x} \qquad y_o = -x$$

Ejercicio 5. Hallar y representar, si las hay, las asíntotas oblicuas de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2+x^2}{2+x}$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^2-2}{1-x}$

Ejemplo 3.7. Hallar y representar la oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

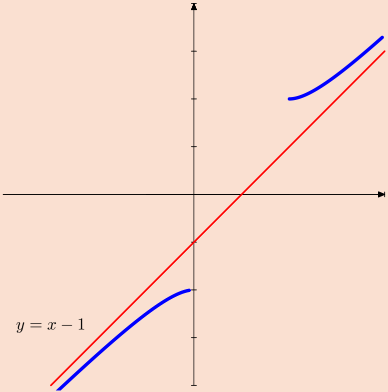
Solución:

Dividimos y

$$\frac{x^2}{x+1} = \boxed{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$y_o = x - 1$$

$$\bullet \underbrace{f(x) > x-1}_{x\to+\infty} \quad \underbrace{f(x) < x-1}_{x\to-\infty}$$



Para explicar la posición $\bullet$ de la curva respecto a la asíntota, lo más fácil, es dar un valor a x lo suficientemente grande, y comparar el valor de la función y de la asíntota. Por ejemplo en $x = 10$ y $x = -10$.

$$f(10) = 9{,}09 \quad y_0(10) = 9 \Longrightarrow f(x) > y_0$$

$$f(-10) = -11{,}11 \quad y_0(-10) = -11 \Longrightarrow f(x) < y_0$$

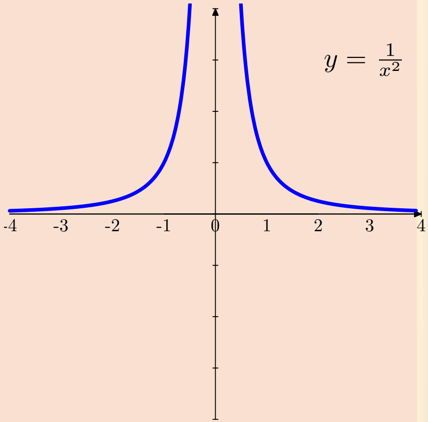
□

Ejemplo 3.8. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

Ramas del Infinito de $\frac{1}{x^2}$	
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}$	0
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}$	0



La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 0$
- una asíntota horizontal $y = 0$

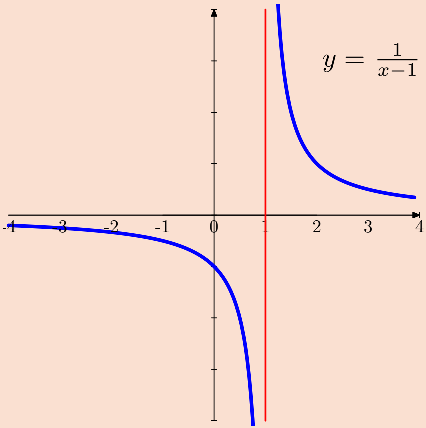
$\square$

Ejemplo 3.9. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x-1}$$

Solución:

Ramas del Infinito de $\frac{1}{x-1}$	
$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x-1}$	0
$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x-1}$	0



La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 1$
- una asíntota horizontal $y = 0$

$\square$

Ejercicio 6. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{x}{x-1}$$

Ejercicio 7. Estudiar y representar las asíntotas de la función

$$y = \frac{1}{x^2-1}$$

Ejercicio 8. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Ejercicio 9. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^2-4}{x+1}$$

Ejercicio 10. Estudia y representa con las asíntotas la función:

$$y = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$$

- **Caso general**

Para el caso general, queremos ver cuando la función se aproxima a la recta $y = mx + n$ en el infinito, es decir,

$$f(x) \simeq mx + n \qquad (x \to \pm\infty)$$

Dividiendo por x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{mx+n}{x} = \mathbf{m}$$

y

$$\mathbf{n} = \lim_{x\to\infty} (f(x) - \mathbf{m}x)$$

Así la asíntota oblicua para el caso general se determina con la expresión:

$$y_o = m\,x + n \qquad \left\{ \begin{array}{lcc} m & = & \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n & = & \displaystyle\lim_{x\to\infty} (f(x) - m\,x) \end{array} \right. \tag{1}$$

Ejemplo 3.10. Hallar la asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x} = 1$$

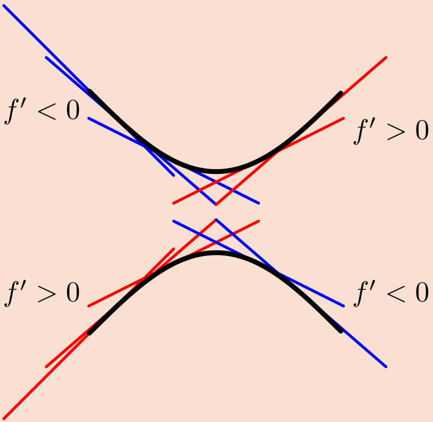
$$n = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^2+1}{x+1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{x+1} = -1$$

La asíntota oblicua cuando $x \to \pm\infty$, es $\boxed{y_o = x - 1}$.

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
GRÁFICAS
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

4. Crecimiento y Decrecimiento

En las funciones del gráfico se observa que donde la curva es creciente las tangentes en rojo tienen pendiente positiva, es decir , la derivada es $f' > 0$, y donde la curva es decreciente las tangentes en azul tienen pendiente negativa, es decir , la derivada es $f' < 0$. La tangente amarilla tiene pendiente nula, $f' = 0$

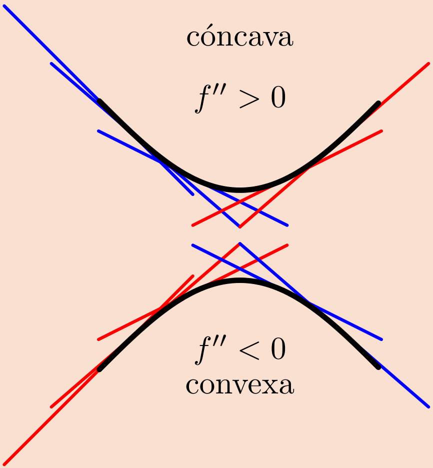


	Mínimo relativo			Máximo relativo		
		$x = a$			$x = a$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\exists f(a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\exists f(a)$	$\searrow$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

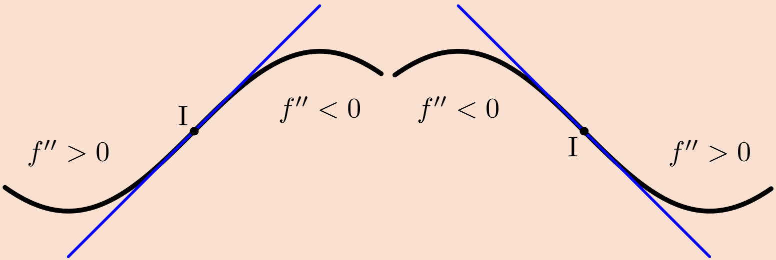
5. Curvatura

A partir del gráfico se observa que donde la curva es **cóncava** $\cup$, las tangentes están por debajo de la función, y, donde la curva es **convexa** $\cap$, las tangentes están por encima de la función. Por otra parte en la gráfica superior las pendientes van aumentando, es decir $f'(x)$ es creciente y por tanto su derivada es positiva $f''(x) > 0$



	Mínimo relativo			Máximo relativo		
		$x = a$			$x = a$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\exists f(a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\exists f(a)$	$\searrow$

5.1. Punto de Inflexión

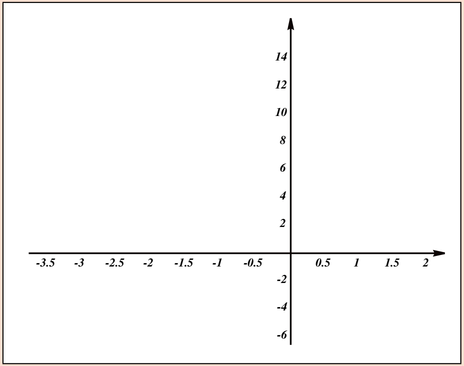


	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	$\exists f(a)$	$\cap$

	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$\exists f(a)$	$\cup$

Cuando en un punto $(a, f(a))$ la función cambia de curvatura se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.

Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

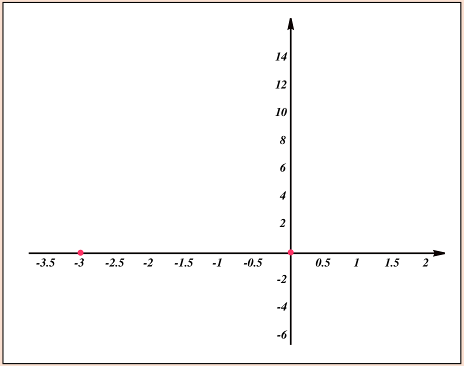


Puntos de corte

Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \Longrightarrow x = 0; -3$$



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

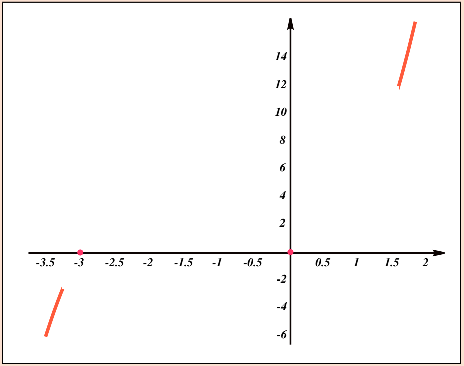
Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

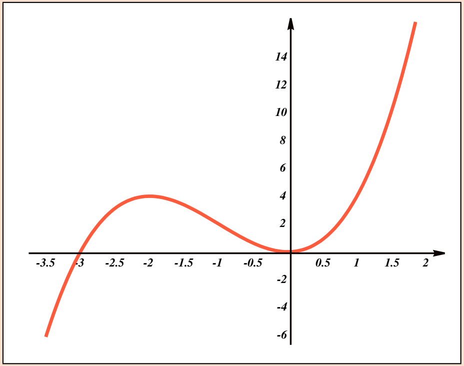
$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \Longrightarrow x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$



Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$



Puntos de corte

$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \Longrightarrow x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 5.1. $f(x) = x^3 + 3x^2$

Puntos de corte

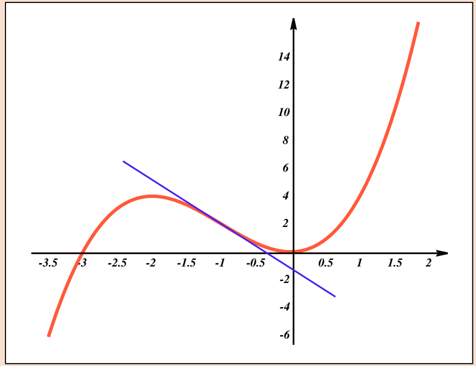
$$y = 0 = x^3 + 3x^2 \Longrightarrow x = 0; -3$$

Ramas del infinito.

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$



	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

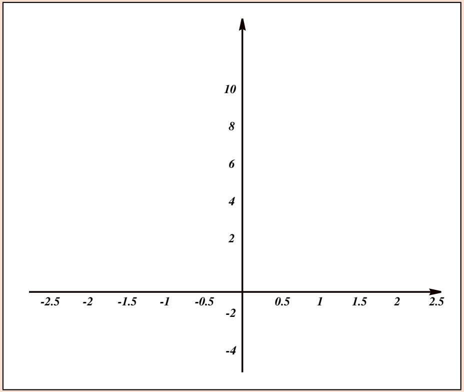
Curvatura.

$$f''(x) = 6x + 6$$

	$-\infty$		-1		$+\infty$
y"		$-$	0	$+$	
y		$\cap$	2	$\cup$	

Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

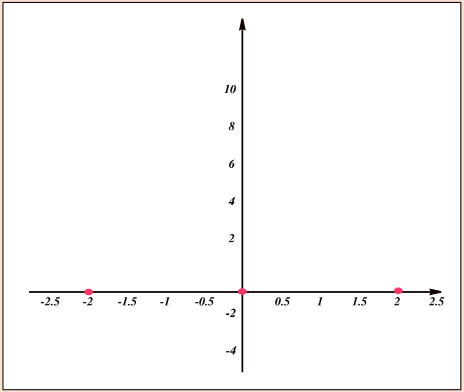
Puntos de corte



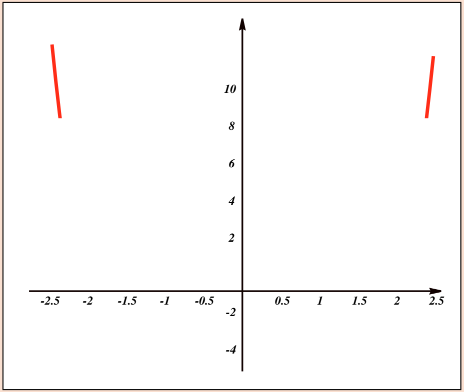
Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$

Puntos de corte

$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \Longrightarrow x = -2; 0; 2$$



Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$



Puntos de corte

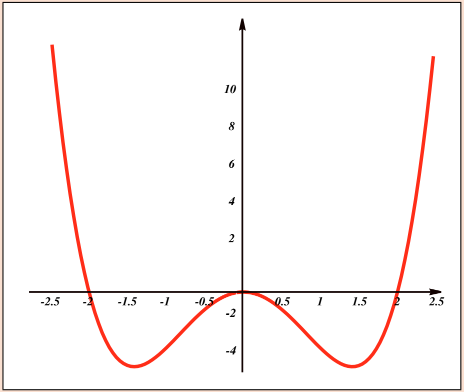
$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \Longrightarrow x = -2; 0; 2$$

Ramas del infinito

$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
GRÁFICAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$



Puntos de corte

$$y = 0 = x^2(x^2-4) \Longrightarrow x = -2; 0; 2$$

Ramas del infinito

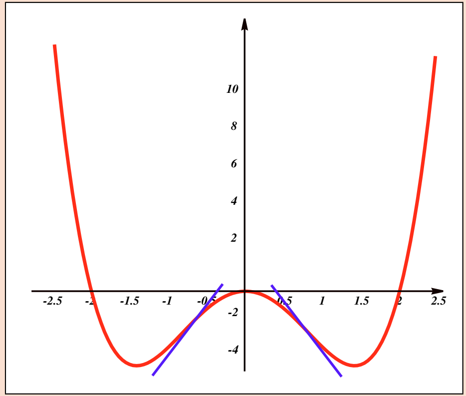
$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 4x^3-8x \Longrightarrow x = 0; \pm\sqrt{2}$$

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Ejemplo 5.2. $f(x) = y = x^4 - 4x^2$



Puntos de corte

$$y = 0 = x^2(x^2 - 4) \Longrightarrow x = -2; 0; 2$$

Ramas del infinito

$$f(-\infty) = \infty \quad f(\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \Longrightarrow x = 0; \pm\sqrt{2}$$

	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

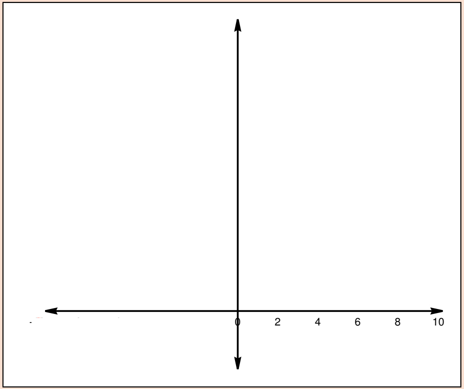
Curvatura.

$$f''(x) = 12x^2 - 8$$

	$-\infty$		$-\sqrt{2/3}$		$\sqrt{2/3}$		$+\infty$
y”		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cup$	$-20/9$	$\cap$	$-20/9$	$\cup$	

Ejemplo 5.3. $y = \dfrac{x+1}{x^2}$

Puntos de corte



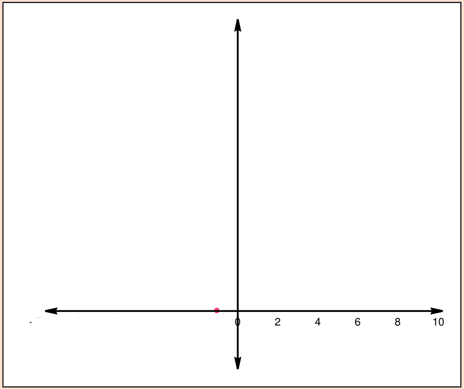
MaTEX
GRÁFICAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 5.3. $y = \dfrac{x+1}{x^2}$

Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \Longrightarrow x = -1$$

Ramas del infinito



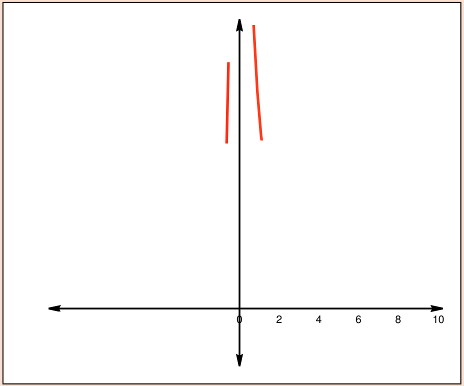
Ejemplo 5.3. $y = \dfrac{x+1}{x^2}$

Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \Longrightarrow x = -1$$

Ramas del infinito

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$



Ejemplo 5.3. $y = \dfrac{x+1}{x^2}$

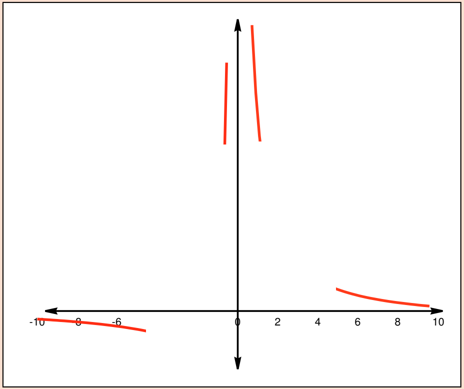
Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \Longrightarrow x = -1$$

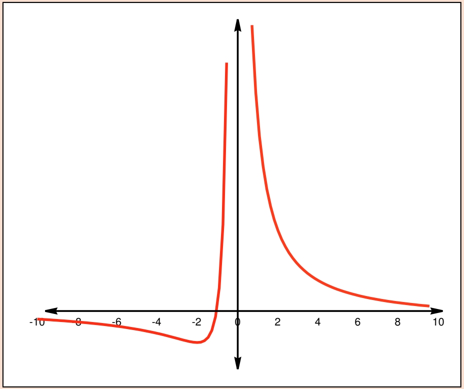
Ramas del infinito

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(+\infty) = 0$$



Ejemplo 5.3. $y = \dfrac{x+1}{x^2}$



Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \Longrightarrow x = -1$$

Ramas del infinito

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

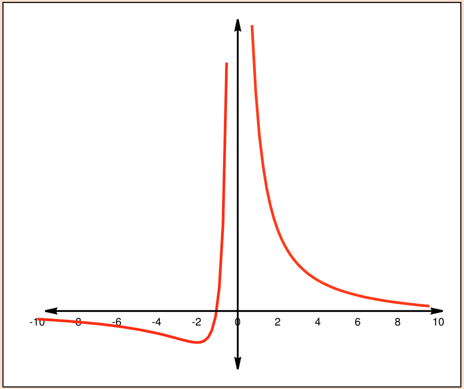
$$f(+-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{-(x+2)}{x^3} \Longrightarrow x = -2$$

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	
y		$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	

Ejemplo 5.3. $y = \dfrac{x+1}{x^2}$



Puntos de corte

$$y = 0 = \frac{x+1}{x^2} \Longrightarrow x = -1$$

Ramas del infinito

$$f(0^-) = +\infty \quad f(0^+) = +\infty$$

$$f(+-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{-(x+2)}{x^3} \Longrightarrow x = -2$$

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	
y		$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	

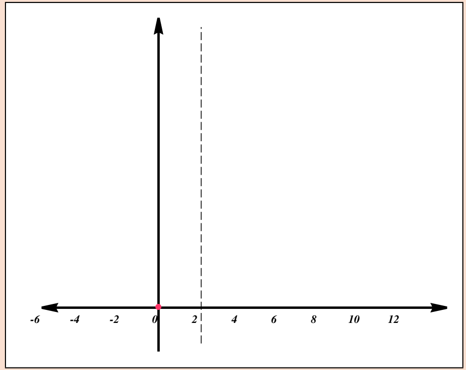
Curvatura

$$f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4} \Longrightarrow x = -3$$

	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y"		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	
y		$\cap$	$-2/9$	$\cup$	$\nexists$	$\cup$	

Ejemplo 5.4. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

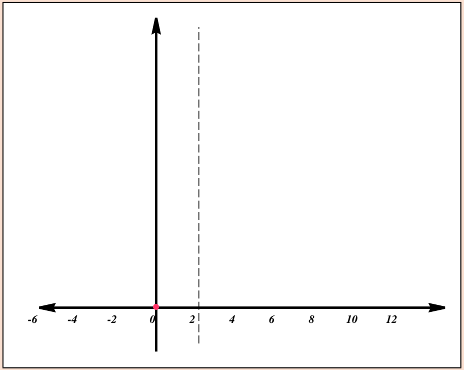


Ejemplo 5.4. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \Longrightarrow x = 0$$

Ramas del infinito:



◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

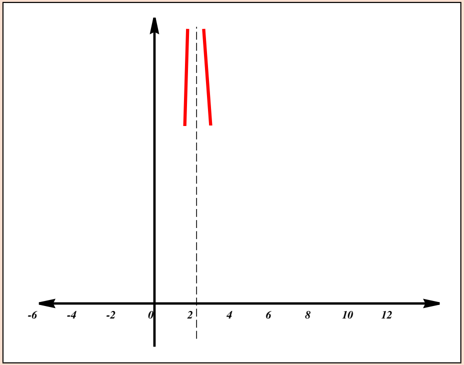
Ejemplo 5.4. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \Longrightarrow x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$



Ejemplo 5.4. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

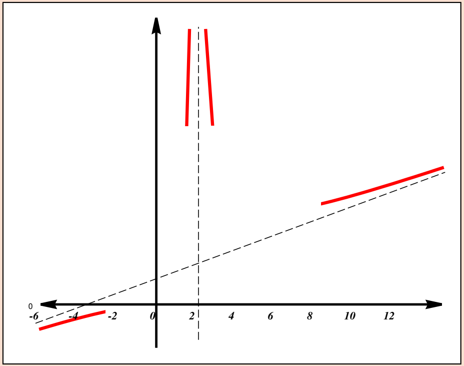
$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \Longrightarrow x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{\text{x+4}} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$



Ejemplo 5.4. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

Puntos de corte

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \Longrightarrow x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

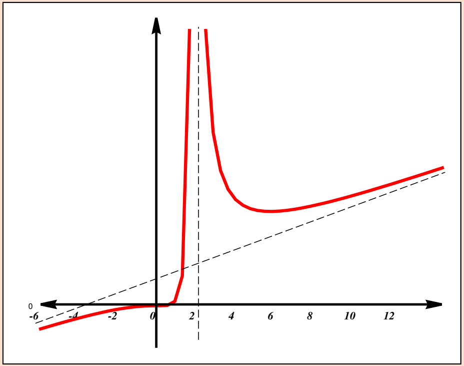
A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{\text{x+4}} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$

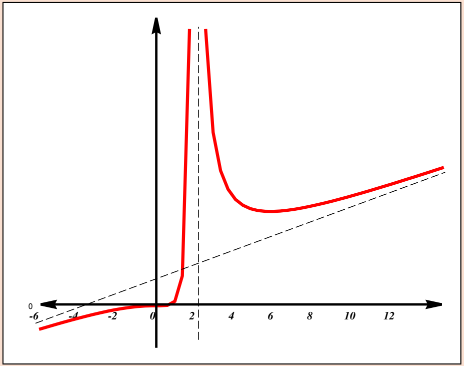
Crecimiento

$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \Longrightarrow x = 0; 6$$

	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
y'		+	0	+	$\nexists$	$-$	0	+	
y		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	13,5	$\nearrow$	



Ejemplo 5.4. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$



Puntos de corte

$$f(x) = 0 = \frac{x^3}{(x-2)^2} \Longrightarrow x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(2^-) = +\infty \quad f(2^+) = +\infty$$

A. Oblicua

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} = \boxed{\text{x+4}} + \frac{12x-16}{(x-2)^2}$$

Crecimiento

$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \Longrightarrow x = 0; 6$$

	$-\infty$		0		2		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	13,5	$\nearrow$	

Curvatura

$$f''(x) = \frac{24x}{(x-2)^4} \Longrightarrow x = 0$$

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y”		$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	
y		$\cap$	0	$\cup$	$\nexists$	$\cup$	

Ejercicio 11. Representar la función: $y = x^3 - 3x^2 + 3$

Ejercicio 12. Representar la función: $y = 3x^4 + 4x^3$

Ejercicio 13. Representar la función: $y = \sqrt{x}$

Ejercicio 14. Representar la función: $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Ejercicio 15. Representar la función: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3\,x} \Longrightarrow D_f = R - \{0\}$.

b) $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1} \Longrightarrow D_g = R - \{\pm 1\}$.

c) $h(x) = \dfrac{x}{1 + x} \Longrightarrow D_h = R - \{-1\}$.

Ejercicio 1

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{5} \Longrightarrow D_f = R.$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \Longrightarrow D_g = R - \{2; 3\}.$

c) $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x} \Longrightarrow D_h = R - \{0; 3\}.$

Ejercicio 2

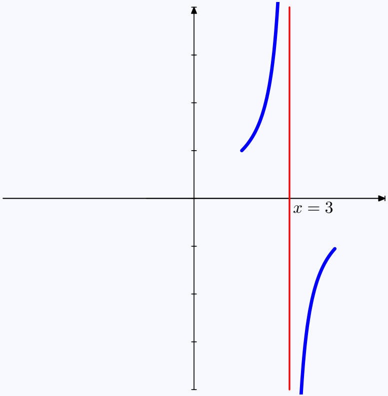
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3.

$$f(x) = \frac{2+x}{3-x} \text{ en } x = 3$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2+x}{3-x} = -\infty$$

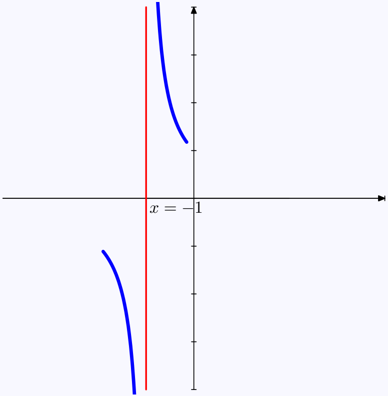
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2+x}{3-x} = +\infty$$



$$g(x) = \frac{x^2}{x+1} \text{ en } x = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty$$



Ejercicio 3

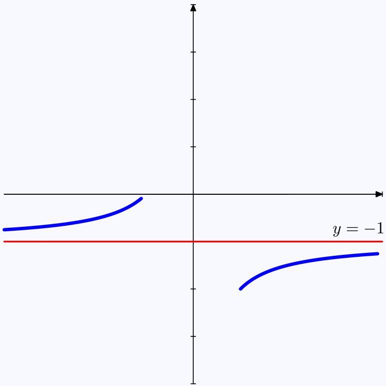
Ejercicio 4.

$f(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$ tiene $y - 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{3-x} = -1$$

$$\text{Si } x = 10 \Longrightarrow \frac{2+10}{3-10} < -1$$

$$\text{Si } x = -10 \Longrightarrow \frac{2-10}{3+10} > -1$$

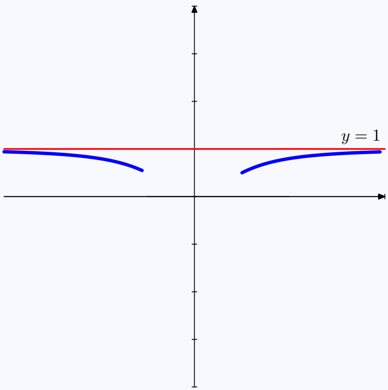


$g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ tiene $y = 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$$\text{Si } x = 10 \Longrightarrow \frac{100}{100+1} < 1$$

$$\text{Si } x = -10 \Longrightarrow \frac{100}{100+1} < 1$$



Ejercicio 4

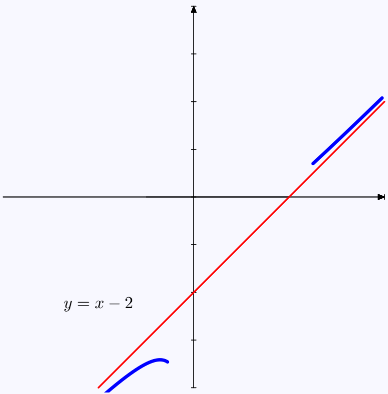
Ejercicio 5.

$$f(x) = \frac{2+x^2}{2+x} \qquad\qquad g(x) = \frac{x^2-2}{1-x}$$

Oblicua $y_o = x - 2$

$$f(10) = 8{,}5 > y_o(10) = 8$$

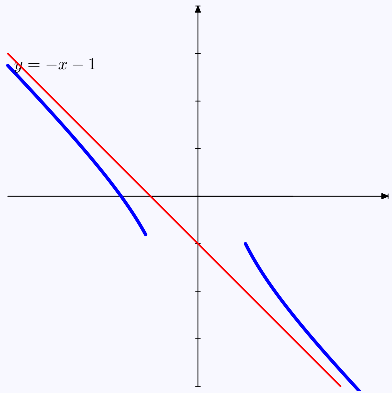
$$f(-10) = -12{,}75 < y_o(-10) = -12$$



Oblicua $y_o = -x - 1$

$$h(10) = -10{,}8 > y_o(10) = -11$$

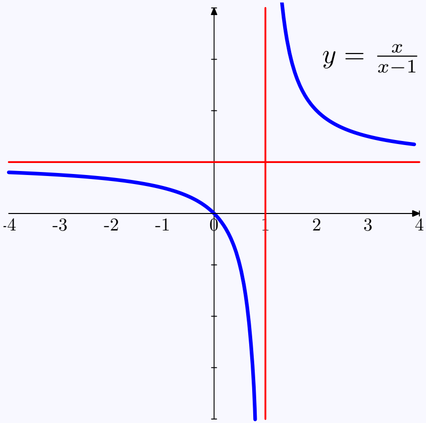
$$h(-10) = 8{,}9 < y_o(-10) = 9$$



Ejercicio 5

Ejercicio 6.

Ramas del Infinito de $\dfrac{x}{x-1}$	
$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1}$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{x-1}$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-1}$	1
$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x-1}$	1



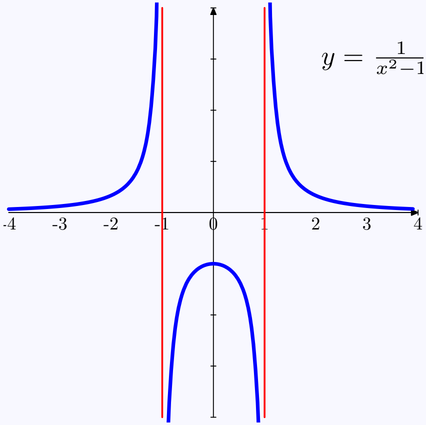
La función presenta:

- una asíntota vertical en $x = 1$
- una asíntota horizontal $y = 1$

Ejercicio 6

Ejercicio 7.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$	
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	0
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	0



La función presenta:

- dos asíntotas verticales en $x = \pm 1$
- una asíntota horizontal $y = 0$

Ejercicio 7

Ejercicio 8.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$$

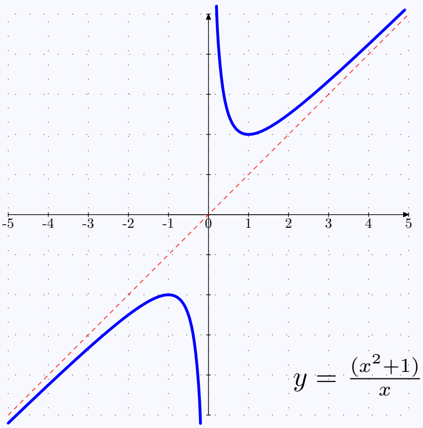
- Oblicua $y_o = x$, pues

$$\frac{x^2+1}{x} = \boxed{x} + \frac{1}{x}$$

Posición:

$$f(10) = 10{,}1 > y_0(10) = 10$$

$$f(-10) = -10{,}1 < y_0(-10) = -10$$



Ejercicio 8

Ejercicio 9.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x+1} = +\infty$$

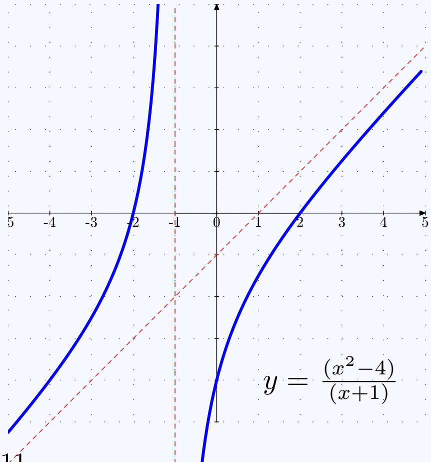
- Oblicua $y_o = x - 1$, pues

$$\frac{x^2-4}{x+1} = \boxed{x-1} - \frac{3}{x-1}$$

Posición:

$$f(10) = 8{,}72 < y_0(10) = 9$$

$$f(-10) = -10{,}66 > y_0(-10) = -11$$



Ejercicio 9

Ejercicio 10.

- Horizontal no tiene
- Vertical $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

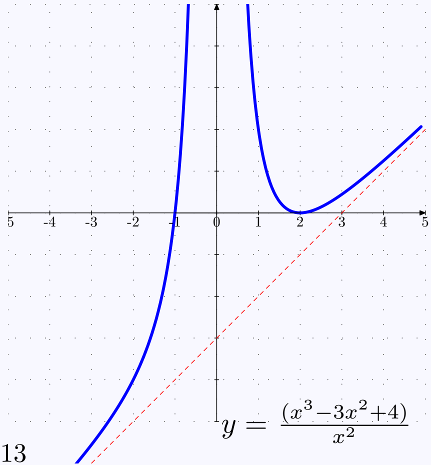
- Oblicua $y_o = x - 3$, pues

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = \boxed{x - 3} + \frac{4}{x^2}$$

Posición:

$$f(10) = 7{,}04 > y_0(10) = 7$$

$$f(-10) = -12{,}96 > y_0(-10) = -13$$



Ejercicio 10

Ejercicio 11.

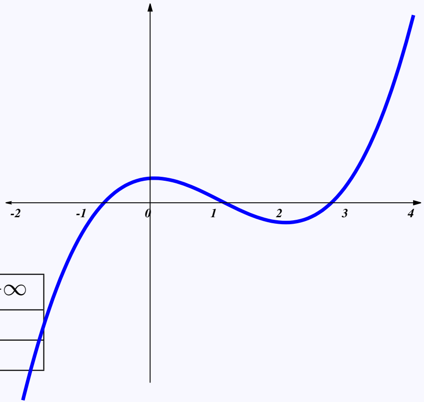
Ramas del infinito:

$$f(-\infty) = -\infty \quad f(+\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 3x(x-2) \Longrightarrow x = 0; 2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	



Curvatura

$$f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y"		$-$	0	$+$	
y		$\frown$	1	$\smile$	

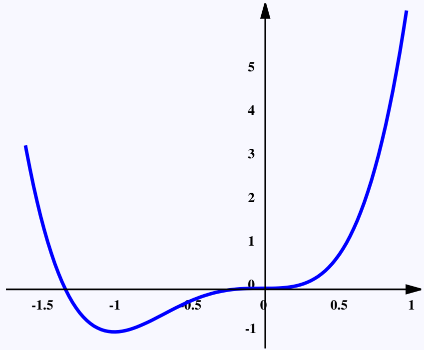
$$m(2,-1)$$
$$M(0,3)$$
$$I(1,1)$$

Ejercicio 11

Ejercicio 12.

Puntos de corte

$$y = 0 = 3x^4 + 4x^3 \Longrightarrow x = 0; -4/3$$



Ramas del infinito:

$$f(-\infty) = \infty \quad f(+\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = 12x^2(x+1) \Longrightarrow x = 0; -1$$

x	$-\infty$		0		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Curvatura

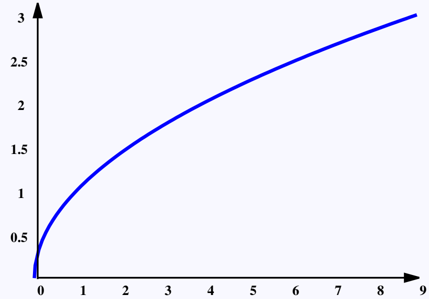
$$f''(x) = 36x^2 + 24x \Longrightarrow x = 0; -2/3$$

x	$-\infty$		$-2/3$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\smile$	$-\dfrac{16}{27}$	$\frown$	0	$\smile$	

$$m(-1,-1)$$
$$I_1(0,0)$$
$$I_2(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{27})$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13.



Puntos de corte

$$y = 0 = \sqrt{x} \Longrightarrow x = 0$$

Ramas del infinito:

$$f(+\infty) = \infty$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow f' > 0$$

x	0		$+\infty$
y'	∞	$+$	
y	0	$\nearrow$	

Curvatura

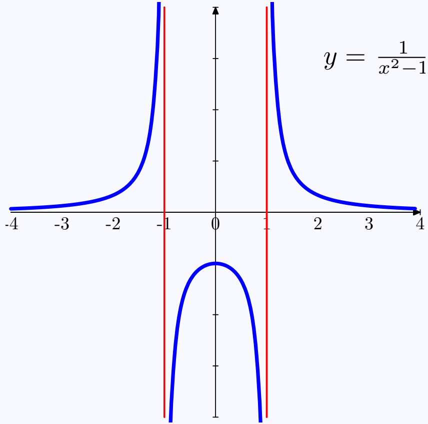
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Longrightarrow f'' < 0$$

x	0		$+\infty$
y''	∞	$-$	
y	0	$\frown$	

función creciente
función convexa

Ejercicio 13

Ejercicio 14.



$$y = 0 = \frac{1}{x^2 - 1} \Longrightarrow y \neq 0$$

Ramas del infinito

$$f(1^-) = -\infty \quad f(1^+) = +\infty$$

$$f(-1^-) = +\infty \quad f(-1^+) = -\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \Longrightarrow x = 0$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Curvatura

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \Longrightarrow f'' \neq 0$$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y"		$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	
y		$\cup$	$\nexists$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

Ejercicio 14

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 15.

$$y = 0 = \frac{x}{x^2 - 1} \Longrightarrow x = 0$$

Ramas del infinito

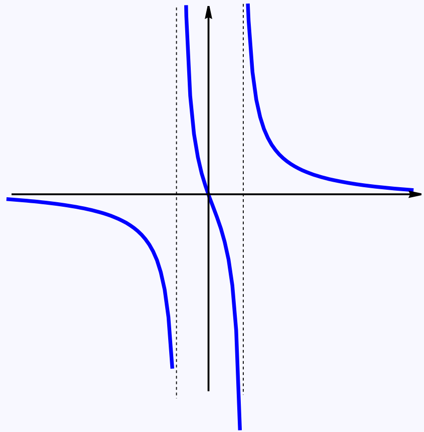
$$f(1^-) = -\infty \quad f(1^+) = +\infty$$

$$f(-1^-) = -\infty \quad f(-1^+) = +\infty$$

$$f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 0$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \Longrightarrow f' < 0$$



Asintotas Verticales

$x = -1, x = 1$

Asintota Horizontal

$y = 0$

$I(0, 0)$

Curvatura $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \Longrightarrow x = 0$

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y"		$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	
y		$\cap$	$\nexists$	$\cup$	$\nexists$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

Ejercicio 15

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
GRÁFICAS
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar