Ejemplos sobre optimización de funciones

En la resolución de **problemas de optimización** de funciones seguiremos los siguientes pasos:

1. Plantear la función que hay que maximizar o minimizar.

2. Plantear una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en caso de que haya más de una variable.

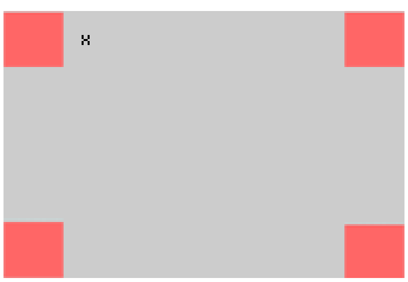
3. Despejar una variable de la ecuación y sustituirla en la función, de modo que nos quedé una sola variable.

4. Derivar la función e igualarla a cero, para hallar los extremos locales.

5. Realizar la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.

Ejemplo 1

Recortando convenientemente en cada esquina una lámina de cartón de dimensiones 80 cm. x 50 cm. un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que el volumen de dicha caja sea máximo.



$$V = (80-2x)(50-2x)x = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$

$$V' = 12x^2 - 520x + 4000$$

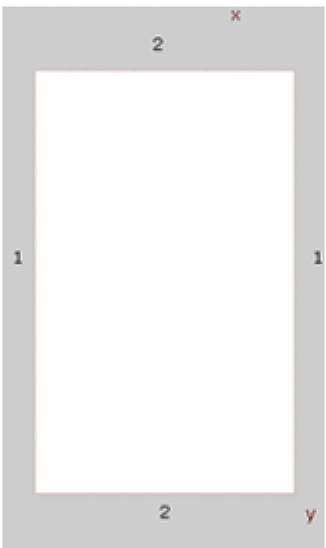
$$12x^2 - 520x + 4000 = 0$$

$x = 10$ $\qquad$ $x = 33.3$ (No es válida: $50 - 2x < 0$)

$V'' = 24x - 520$ $\qquad$ $V''(10) = 24 \cdot 10 - 520 < 0$

Ejemplo 2

Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm. de altura y márgenes laterales de 1 cm. de ancho. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.



$$S = xy$$

$$(x-2)(y-4) = 18 \qquad y = \frac{4x+10}{x-2}$$

$$S = x\,\frac{4x+10}{x-2} = \frac{4x^2+10x}{x-2}$$

$$S' = \frac{(8x+20)(x-2)-(4x^2+10x)}{(x-2)^2} = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}$$

$$\frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0 \qquad x = 5 \qquad x = -1 \text{ (No es válida)}$$

Ejemplo 3

Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuple del cuadrado del primero más el séxtuple del cuadrado del segundo sea un mínimo.

$$S = 5x^2 + 6y^2$$

$$x + y = 44 \qquad\qquad y = 44 - x$$

$$S = 5x^2 + 6(44 - x)^2$$

$$S' = 10x - 12(44 - x) = 22x - 528$$

$$22x - 528 = 0 \qquad\qquad x = 24 \qquad y = 20$$

$$S'' = 22 < 0$$

Ejemplo 4

El valor de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un diamante de 2 grs. en dos partes de forma que la suma de los valores de los dos diamantes formados sea mínima.

$$V = kx^2 + k(2 - x)^2 = k(2x^2 - 4x + 4)$$

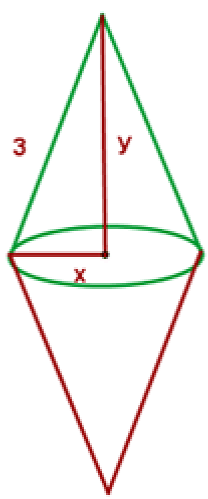
$$V' = k(4x - 4) \qquad\qquad 4x - 4 = 0 \qquad\qquad x = 1$$

$$V'' = 4k > 0$$

El diamante se ha de dividir en dos partes iguales de 1 gr.

Ejemplo 5

Una boya, formada por dos conos rectos de hierro unidos por sus bases ha de ser construida mediante dos placas circulares de 3 mts. de radio. Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.



$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

$x^2 + y^2 = 9$ $\qquad$ $x^2 = 9 - y^2$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \left(9 - y^2\right) y = \frac{2\pi}{3} \left(9y - y^3\right)$$

$V' = \frac{2\pi}{3}\left(9 - 3y^2\right)$ $\qquad$ $\frac{2\pi}{3}\left(9 - 3y^2\right) = 0$

$y = \sqrt{3}$ $\qquad$ $r = \sqrt{6}$

$$V'' = \frac{2\pi}{3}(-6y) < 0$$

Ejemplo 6

Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h \qquad h = \frac{1}{\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r\,\frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

$$A' = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = \frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2}$$

$$\frac{-2 + 4\pi r^3}{r^2} = 0 \qquad r^3 = \frac{1}{2\pi}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \qquad h = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

$$A'' = \frac{-4}{r^3} + 4\pi \qquad A''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) > 0$$

Ejemplo 7

Se tiene un alambre de 1 mt. de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y, con el otro, un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

$$S = \pi r^2 + l^2$$

$$2\pi r + 4l = 1 \qquad l = \frac{1 - 2\pi r}{4}$$

$$S = \pi r^2 + \left(\frac{1 - 2\pi r}{4}\right)^2$$

$$S' = 2\pi r + 2\frac{1-2\pi r}{4}\left(-\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left[r(8+2\pi)-1\right]$$

$$\frac{\pi}{4}\left[r(8+2\pi)-1\right] = 0 \qquad r = \frac{1}{8+2\pi}$$

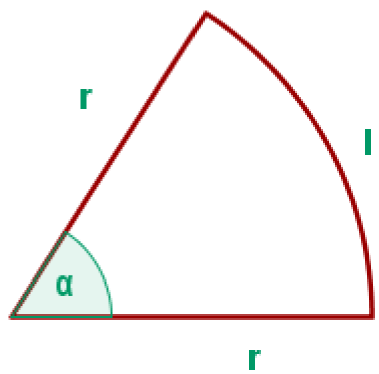
$$\text{Trozo del círculo} = 2\pi\frac{1}{8+2\pi} = 0.439\text{ m}$$

$$\text{Trozo del cuadrado} = 1 - 0.439 = 0.661\text{ m}$$

$$S'' = \frac{\pi}{4}(8+2\pi) > 0$$

Ejemplo 8

Un sector circular tiene un perímetro de 10 mts. Calcular El radio y la amplitud del sector de mayor área.



$$S = \frac{1}{2} l \cdot r \qquad l = \alpha \cdot r$$

$$2r + l = 10 \quad l = 10 - 2r$$

$$S = \frac{1}{2}(10-2r)\cdot r = 5r - r^2$$

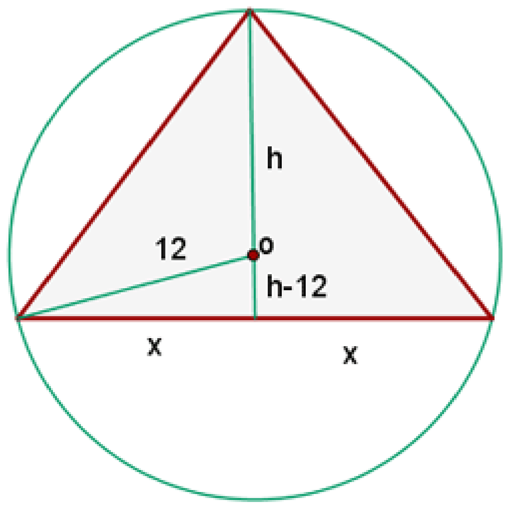
$$S' = 5 - 2r \qquad 5 - 2r = 0 \quad r = \frac{5}{2}$$

$$r = \frac{5}{2}\text{m} \qquad l = 5\text{m} \qquad \alpha = 2\text{rad}$$

$S'' = -2 < 0$

Ejemplo 9

Obtener el triángulo isósceles de área máxima inscrito en un círculo de radio 12 cm.



$$S = \frac{1}{2} 2x\, h = x\, h$$

$$12^2 = x^2 + (h-12)^2 \qquad x = \sqrt{24h - h^2}$$

$$S = h\sqrt{24h - h^2} = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

$$S' = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = \frac{2h\left(36h - 2h^2\right)}{2h\sqrt{24h - h^2}} = \frac{36h - 2h^2}{\sqrt{24h - h^2}}$$

$$36h - 2h^2 = 0 \qquad h = 0 \qquad h = 18 \qquad x = 6\sqrt{3}$$

Base: $2x = 12\sqrt{3}$

Lado: $l = \sqrt{x^2 + h^2}$ $\quad l = \sqrt{36 \cdot 3 + 18^2}$ $\quad l = 12\sqrt{3}$

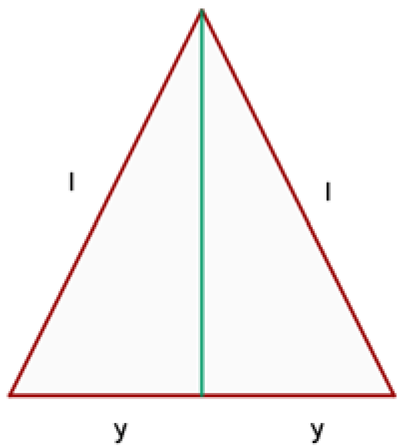
$$S'' = \frac{(36 - 4h)\sqrt{24h - h^2} - \left(36h - 2h^2\right)\dfrac{24 - 2h}{2\sqrt{24h - h^2}}}{24h - h^2}$$

$$S''(18)=\frac{(36-4\cdot(18))\sqrt{24\cdot(18)-(18)^2}-\left[36\cdot(18)-2(18)^2\right]\frac{24-2(18)}{2\sqrt{24\cdot(18)-(18)^2}}}{24\cdot(18)-(18)^2}$$

$$S''(18)=\frac{(-)\cdot(+)-0\cdot\ \ldots}{+}=\frac{(-)-0}{+}=\frac{(-)}{+}=-$$

Ejemplo 10

Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm. gira alrededor de su altura generando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$x=r$ $\qquad$ $l^2=h^2+r^2$

$2l+2x=30$ $\qquad$ $l=15-x$

$(15-x)^2=h^2+r^2$ $\qquad$ $h=\sqrt{225-30x}$

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{225-30x}$$

$$V'=\frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{225-30x}-\frac{15x^2}{\sqrt{225-30x}}\right)=\pi\frac{150x-25x^2}{\sqrt{225-30x}}$$

$150x-25x^2=0$ $\qquad$ $x=0$ $\qquad$ $x=6$

Base = 12 cm

$$V'' = \pi \frac{(150-50x)\sqrt{225-30x} - (150x-25x^2)\frac{-15}{\sqrt{225-30x}}}{225-30x}$$

$$V''(6) = \pi \frac{(150-50\cdot(6))\sqrt{225-30\cdot(6)} - \left[150\cdot(6)-25\cdot(6)^2\right]\frac{-15}{\sqrt{225-30\cdot(6)}}}{225-30\cdot(6)} =$$

$$V''(6) = \frac{(-)\cdot(+)-0\cdot\ldots}{+} = \frac{-}{+} = -$$