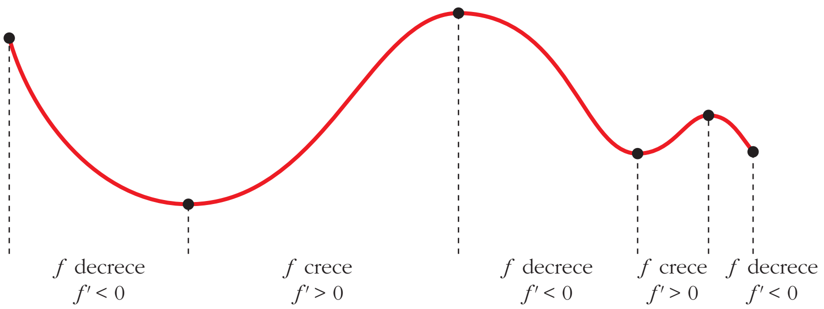
7 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Página 167

REFLEXIONA Y RESUELVE

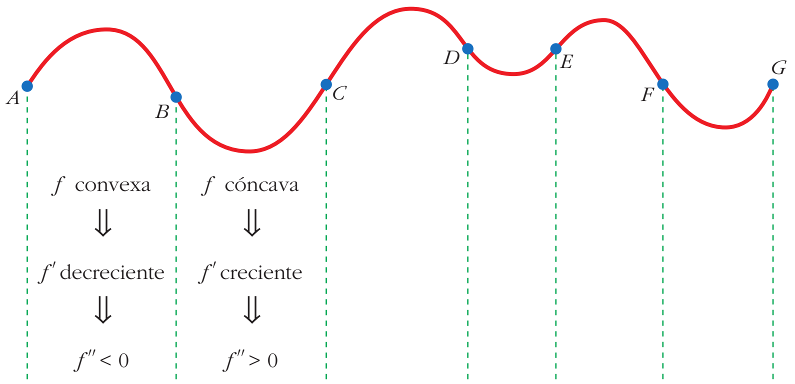
Relación del crecimiento con el signo de la primera derivada

■ **Analiza la curva siguiente:**



Relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada

■ **Describe el tramo *CD* y los tramos *DE*, *EF* y *FG* siguientes:**



$CD \rightarrow f$ convexa $\rightarrow f'$ decreciente $\rightarrow f'' < 0$

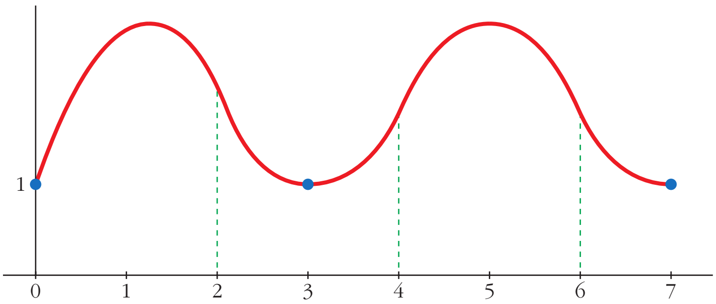
$DE \rightarrow f$ cóncava $\rightarrow f'$ creciente $\rightarrow f'' > 0$

$EF \rightarrow f$ convexa $\rightarrow f'$ decreciente $\rightarrow f'' < 0$

$FG \rightarrow f$ cóncava $\rightarrow f'$ creciente $\rightarrow f'' > 0$

■ **Dibuja la gráfica de una función, *f*, que cumpla las siguientes condiciones:**

- **La función está definida en [0, 7].**
- **Solo toma valores positivos.**
- **Pasa por los puntos (0, 1), (3, 1) y (7, 1).**
- **En el intervalo (1, 2), la función es convexa.**
- **En el intervalo (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En el intervalo (4, 6), f' es decreciente.**
- **En el intervalo (6, 7), f es cóncava.**



Página 168

1. Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$y(0) = 0$; $y(1) = 4$; $y(3) = 150$

- **Recta tangente en (0, 0):** $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- **Recta tangente en (1, 4):** $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- **Recta tangente en (3, 150):** $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

2. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva:

$$y = x^3 - 4x + 3$$

que sean paralelas a la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto.

$$y = x^3 - 4x + 3$$

Calculamos la derivada:

$$y' = 3x^2 - 4$$

Si son paralelas a la bisectriz del 2.° y 4.° cuadrante, la pendiente es –1. Por tanto:

$$3x^2 - 4 = 1 \;\to\; 3x^2 = 3 \;\to\; x^2 = 1 \;\to\; x = \pm 1$$

$$y(-1) = 6$$

$$y(1) = 0$$

Recta tangente en (–1, 6):

$$y = 6 - (x + 1) = -x + 5$$

Recta tangente en (1, 0):

$$y = 0 - (x - 1) = -x + 1$$

Página 169

1. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:

a) Dónde crece.

b) Dónde decrece.

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \;\to\; y' > 0 \;\to\; f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \;\to\; y' > 0 \;\to\; f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \;\to\; y' < 0 \;\to\; f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 171

2. Comprueba que la función $y = x^3/(x - 2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.

Averigua de qué tipo es cada uno de esos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)\,(3(x-2) - 2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x - 6 - 2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$y' = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 0$ hay un punto de inflexión.

$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 6$ hay un mínimo relativo.

3. a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$.

Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.

b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

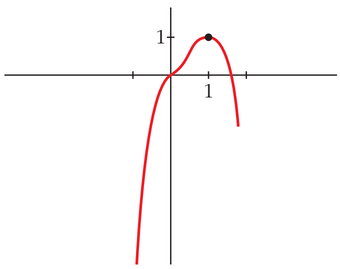
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x+1)$

$y' = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (1, 1) \end{cases}\Bigg\}$ Dos puntos singulares.

Los dos puntos están en el intervalo $[-1; 1{,}5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.
- En $(1, 1)$ hay un máximo relativo.



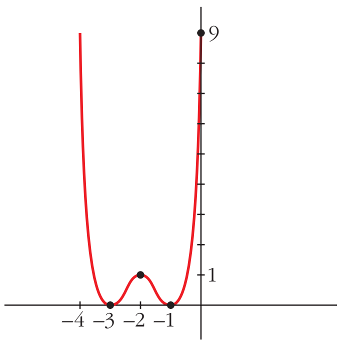
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x+1)(x+2)(x+3)$

$y' = 0 \;\begin{cases} x = -1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-3, 0) \end{cases}\Bigg\}$ Tres puntos singulares.

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4, 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un mínimo relativo en $(-3, 0)$, un máximo relativo en $(-2, 1)$ y un mínimo relativo en $(-1, 0)$.



Página 173

1. Estudia la curvatura de esta función:

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2; \quad f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48; \ f'''(0) \neq 0; \ f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. Estudia la curvatura de la función siguiente:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9; \quad f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Punto $(2, 2)$

$(f'''(x) = 6; \ f'''(2) \neq 0)$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 175

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

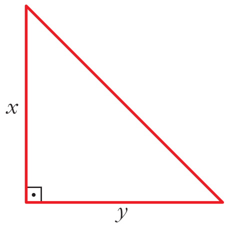
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \rightarrow f(5) = 10 \\ x = -5 \ \text{(no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y la función es continua en $(0, +\infty)$, hay un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2. **De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**



$x + y = 10 \quad \to \quad y = 10 - x$

$\text{Área} = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x \cdot (10 - x)}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$

Tenemos que maximizar la función:

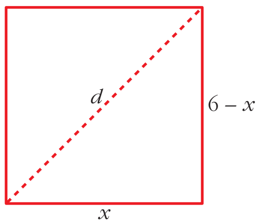
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \quad \to \quad x = 5 \quad \to \quad y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \dfrac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego en } x = 5 \text{ está el máximo} \right)$.

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3. **Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?**



$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

Tenemos que minimizar la función:

$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

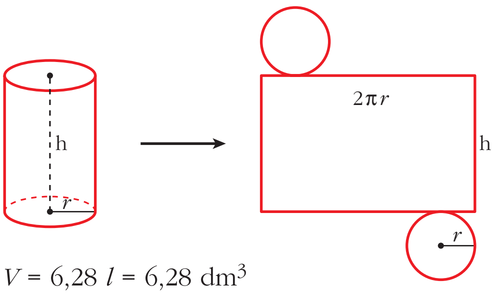
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6 + 2x = 0 \quad \to \quad x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24$; y $f(x)$ es continua. Luego en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4. **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ dm^3$

$\text{Área total} = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 =$

$= 2\pi r(\text{h} + r)$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \quad \to \quad \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2}$

Así: $\textit{Áreal total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \quad \to \quad -2 + 2r^3 = 0 \quad \to \quad r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \quad \to \quad \text{h} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá 1 dm de radio y 2 dm de altura.

Página 180

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos cuya abscisa se indica:**

a) $y = \dfrac{1 - 3x^2}{2}$ **en** $x = 1$

b) $y = (0{,}3x - 0{,}01x^2)^2$ **en** $x = 10$

c) $y = \sqrt{x + 12}$ **en** $x = -3$

d) $y = \dfrac{x + 5}{x - 5}$ **en** $x = 3$

e) $y = e^{-x}$ **en** $x = 0$

f) $y = sen\, x \cos x$ **en** $x = \dfrac{\pi}{2}$

g) $y = ln\,(x + 1)$ **en** $x = 0$

h) $y = x\, ln\, x$ **en** $x = e$

a) • Ordenada en el punto: $x = 1 \;\rightarrow\; y = -1$

• Pendiente de la recta: $y' = -3x \;\rightarrow\; y'(1) = -3$

Recta tangente: $y = -1 - 3 \cdot (x - 1) = -3x + 2$

b) • Ordenada en el punto: $x = 10 \;\rightarrow\; y = 2^2 = 4$

• Pendiente de la recta:

$y' = 2(0{,}3x - 0{,}01x^2)(0{,}3 - 0{,}02x) \;\rightarrow\; y'(10) = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$

Recta tangente: $y = 4 + 0{,}4(x - 10) = 0{,}4x$

c) • Ordenada en el punto: $x = -3 \;\rightarrow\; y = 3$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 12}} \;\rightarrow\; y'(-3) = \dfrac{1}{6}$

Recta tangente: $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x + 3) = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{2}$

d) • Ordenada en el punto: $x = 3 \;\rightarrow\; y = -4$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{-10}{(x - 5)^2} \;\rightarrow\; y'(3) = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2}$

Recta tangente: $y = -4 - \dfrac{5}{2} \cdot (x - 3) = \dfrac{-5}{2}x + \dfrac{7}{2}$

e) • Ordenada en el punto: $x = 0 \rightarrow y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = -e^{-x} \rightarrow y'(0) = -1$

Recta tangente: $y = 1 - 1 \cdot x = -x + 1$

f) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = cos^2 x - sen^2 x \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Recta tangente: $y = -1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -x + \frac{\pi}{2}$

g) • Ordenada en el punto: $x = 0 \rightarrow y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{1}{x+1} \rightarrow y'(0) = 1$

Recta tangente: $y = x$

h) • Ordenada en el punto: $x = e \rightarrow y = e$

• Pendiente de la recta: $y' = ln\, x + 1 \rightarrow y'(e) = 2$

Recta tangente: $y = e + 2 \cdot (x - e) = 2x - e$

s2 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 4x + 1$, que es paralela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$.**

Calculamos la pendiente de la recta $4x - 2y + 5 = 0$:

$$4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow \text{Pendiente } 2.$$

$$y' = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 1 - 4 + 1 = -2$$

La recta tangente tiene pendiente 2 y pasa por $(-1, -2)$:

$$y = -2 + 2 \cdot (x + 1) = 2x \rightarrow y = 2x$$

s3 **Halla las tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta que pasa por (0, 0) y por (1, –2).**

La pendiente de la recta que pasa por (0, 0) y (1, –2) es $m = \frac{-2-0}{1-0} = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada de la función sea igual a –2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$y' = -2 \rightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x = 0, \;\; y = 0 \\ x = 2, \;\; y = 2 \end{cases}$$

Los puntos son (0, 0) y (2, 4).

Las rectas tangentes son:

- $y - 0 = -2(x - 0) \to y = -2x$
- $y - 4 = -2(x - 2) \to y = -2x + 8$

s4 **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4x - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte son (0, 0) y (4, 0).

$$y' = 4 - 2x \begin{cases} y'(0) = 4 \ \text{ pendiente en } (0, 0) \\ y'(4) = -4 \ \text{ pendiente en } (4, 0) \end{cases}$$

Rectas tangentes:

En (0, 0) $\to y = 4x$

En (4, 0) $\to y = -4 \cdot (x - 4) = -4x + 16$

5 **Halla los puntos de tangente horizontal en las siguientes funciones y escribe la ecuación de la tangente en esos puntos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$ **b)** $y = -x^4 + x^2$

c) $y = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0$

- $x = 1 \to y = 0$, recta tangente en (1, 0).
- $x = \dfrac{1}{3} \to y = \dfrac{4}{27}$, recta tangente en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$.

b) $y' = -4x^3 + 2x = x \cdot (-4x^2 + 2) = 0$

- $x = 0 \to y = 0$, recta tangente en (0, 0).
- $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \to y = \dfrac{1}{4}$, recta tangente en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.
- $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \to y = \dfrac{1}{4}$, recta tangente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

c) $y' = \dfrac{6 \cdot (x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \to -6x^2 + 6 = 0$

- $x = 1 \to y = 3$, recta tangente en (1, 3).
- $x = -1 \to y = -3$, recta tangente en (–1, –3).

d) $y' = \dfrac{(2x - 5) \cdot x - (x^2 - 5x + 4) \cdot 1}{x^2} = 0 \to x^2 - 4 = 0$

- $x = 2 \to y = -1$, recta tangente en (2, –1).
- $x = -2 \to y = -9$, recta tangente en (–2, –9).

6 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde corta el eje de ordenadas.**

Punto de corte con el eje de ordenadas:

$$x = 0 \to y = e^{2-0} = e^2 \to (0, e^2)$$

Pendiente de la recta tangente:

$$f'(x) = -e^{2-x} \to f'(0) = -e^2$$

Ecuación de la recta tangente en $(0, e^2)$:

$$y = e^2 - e^2x = e^2(1 - x)$$

7 **Determina el punto de la curva $f(x) = x^2 - 5x + 8$ en el que la tangente es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Escribe la ecuación de dicha tangente.**

La pendiente de la bisectriz del primer cuadrante es 1.

Buscamos los puntos en los que $f'(x) = 1$:

$$f'(x) = 2x - 5 \to 2x - 5 = 1 \to x = 3$$

$$f(3) = 9 - 15 + 8 = 2$$

Ecuación de la tangente:

$$y = 2 + 1(x - 3) = x - 1$$

Máximos y mínimos

8 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x - 1)$

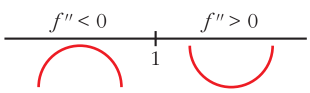
a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 6x + 9 = 0 \to$ No tiene solución.

No tiene ni máximos ni mínimos.

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \to x = 1$

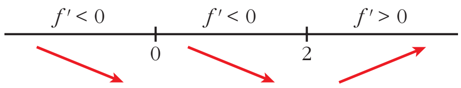


Hay un punto de inflexión en (1, 29).

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

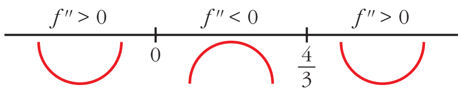
$f'(x) = \dfrac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -4/3 \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

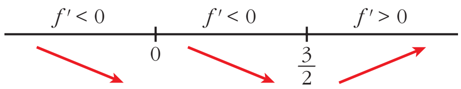
$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 4/3 \rightarrow y = -64/81 \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

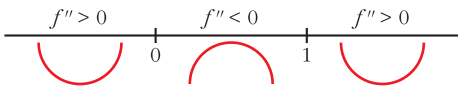
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -27/16 \end{cases}$



Hay un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

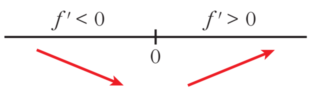
$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$



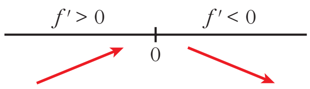
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

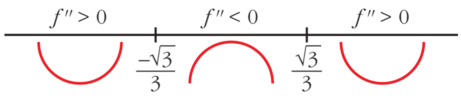
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

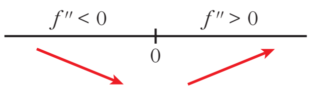
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

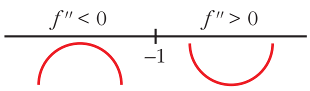
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x) $\rightarrow\; y = -1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

9 **Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones, y di si tienen máximos o mínimos:**

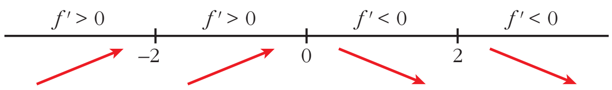
a) $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x^2 - 4}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}}$

c) $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}}$ **d)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2 - 1}{x}}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(0, \dfrac{-1}{4}\right)$.

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

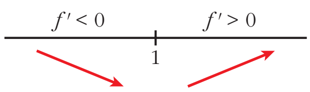
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$.

crece en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

10 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{x(x - 3)(x - 4)}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)} = \dfrac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

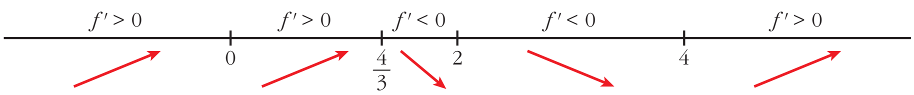
$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4, \ f(4) = -1/2 \\ x = 4/3, \ f(4/3) = -9/2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$.

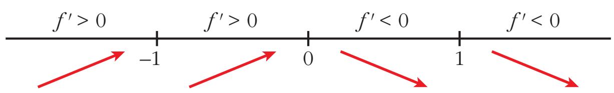
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; f(0) = -1$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

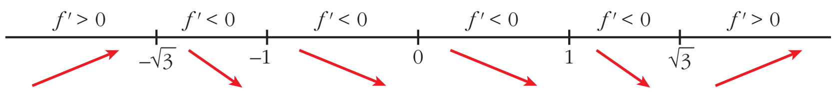
tiene un máximo en $(0, -1)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \;\begin{cases} x = 0,\; f(0) = 0 \\ x = -\sqrt{3},\; f(-\sqrt{3}) = (-3\sqrt{3})/2 \\ x = \sqrt{3},\; f(\sqrt{3}) = (3\sqrt{3})/2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

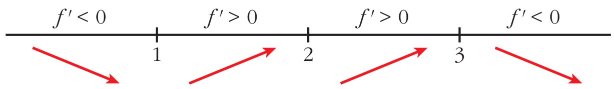
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 3,\; f(3) = -9 \\ x = 1,\; f(1) = -1 \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(1, -1)$.

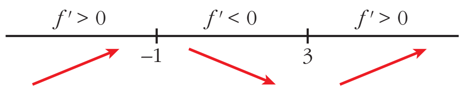
tiene un máximo en $(3, -9)$.

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 3,\; f(3) = -27 \\ x = -1,\; f(-1) = 5 \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

es decreciente en $(-1, 3)$.

tiene un máximo en $(-1, 5)$.

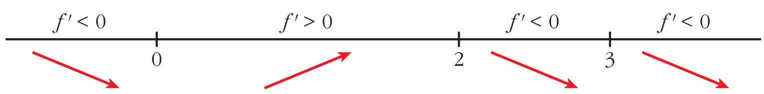
tiene un mínimo en $(3, -27)$.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -8x(3x - 6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\; \text{(no vale)} \\ x = 2,\; f(2) = -2 \end{array} \right.$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$.

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un máximo en $(2, -2)$.

11 **Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$

c) $y = (x - 2)^4$ **d)** $y = x\,e^x$

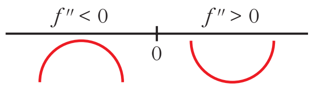
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ **f)** $y = \ln(x + 1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3;\ f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ 6x = 0 \ \rightarrow\ x = 0,\ f(0) = 4$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$.

es cóncava en $(0, +\infty)$.

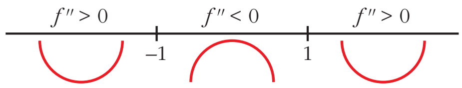
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x;\ f''(x) = 12x^2 - 12$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ 12(x^2 - 1) = 0 \ \begin{cases} x = -1,\ f(-1) = -5 \\ x = 1,\ f(1) = -5 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

es convexa en $(-1, 1)$.

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3;\ f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ x = 2,\ f(2) = 0$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

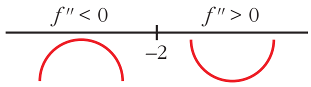
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x;\ f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ x = -2 \ \ (e^x \neq 0$ para todo $x),\ f(-2) = -2e^{-2}$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$.

es cóncava en $(-2, +\infty)$.

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

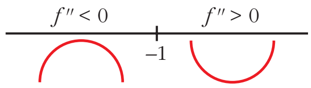
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x+1) - (2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$.

es cóncava en $(-1, +\infty)$.

no tiene puntos de inflexión.

f) $y = ln(x + 1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

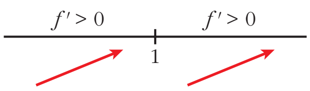
$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

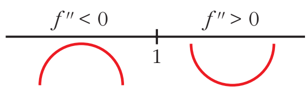
Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

12 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$ **c)** $y = 3 - (x - 1)^6$

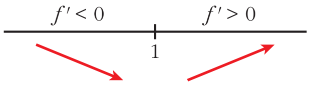
a) $f'(x) = 3(x - 1)^2$ $f''(x) = 6(x - 1)$

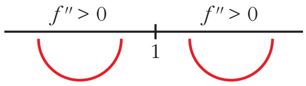




Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

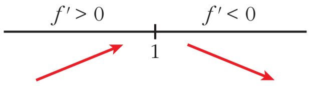
b) $f'(x) = 4(x-1)^3$ $\quad$ $f''(x) = 12(x-1)^2$

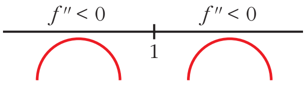




Hay un mínimo en $x = 1$.

c) $f'(x) = -6(x-1)^5$ $\quad$ $f''(x) = -30(x-1)^4$





Hay un máximo en $x = 1$.

Página 181

Problemas de optimización

13 **Una discoteca abre a las 10 de la noche y cierra cuando se han marchado todos sus clientes. La expresión que representa el número de clientes en función del número de horas que lleva abierta, t, es $N(t) = 80t - 10t^2$.**

a) ¿A qué hora el número de clientes es máximo? ¿Cuántos clientes hay en ese momento?

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

a) Buscamos los puntos en los que la derivada es igual a 0:

$N'(t) = 80 - 20t \;\rightarrow\; 80 - 20t = 0 \;\rightarrow\; t = 4$

$N''(t) = -20 < 0$; en $t = 4$, la función tiene un máximo.

El número de clientes es máximo a las 2 de la mañana (4 horas después de abrir). Este número de clientes es:

$N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$ personas

b) $N(t) = 0 \;\rightarrow\; 80t - 10t^2 = 0 \;\rightarrow\; 10t(8-t) = 0 \;\begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$

Cierra 8 horas después de abrir, a las 6 de la mañana.

14 **Una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento (n) de acuerdo con la expresión:**

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

Determina razonadamente:

a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios semanales.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

a) Buscamos los puntos en los que la derivada es igual a 0:

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96 \;\to\; -24n^2 + 120n - 96 = 0 \;\to$$

$$\to\; -n^2 + 5n - 4 = 0 \;\to\; n = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} \begin{cases} n = 1 \\ n = 4 \end{cases}$$

Para saber cuál es el máximo utilizamos la segunda derivada:

$$B''(n) = -48n + 120 \begin{cases} B''(1) = 72 > 0; \text{ en } n = 1 \text{ hay un mínimo.} \\ B''(4) = -72 < 0; \text{ en } n = 4 \text{ hay un máximo.} \end{cases}$$

Debe tener 4 tiendas para que los beneficios semanales sean máximos.

b) $B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 = 64$

Los beneficios semanales serán de 64 000 euros.

15 **El coste total de producción de x unidades de un producto es:**

$$C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$$

Se define la función *coste medio por unidad* como $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

Buscamos el máximo de la función $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, igualando a 0 su derivada:

$$C_m(x) = \frac{1/3x^2 + 6x + 192}{x} = \frac{1}{3}x + 6 + \frac{192}{x}$$

$$C'_m(x) = \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} \;\to\; \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} = 0 \;\to\; x^2 = 576 \begin{cases} x = 24 \\ x = -24 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Comprobamos que hay un mínimo en $x = 24$:

$$C''_m(x) = \frac{384}{x^3} \;\to\; C''_m(24) > 0$$

El coste medio por unidad es mínimo si se producen 24 unidades.

16 **Una empresa quiere producir $C(t) = 200 + 10t$ unidades de un producto para vender a un precio $p(t) = 200 - 2t$ euros por unidad, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la producción.**

a) Calcula el beneficio si $t = 10$.

b) Escribe, dependiendo de t, la función de beneficio $(0 \le t \le 60)$.

c) Deteremina cuándo el beneficio es máximo.

a) Si $t = 10 \begin{cases} C(10) = 200 + 10 \cdot 10 = 300 \text{ unidades} \\ p(10) = 200 - 2 \cdot 10 = 180 \text{ € por unidad} \end{cases}$

Beneficio: $C(10) \cdot p(10) = 300 \cdot 180 = 54\,000$ €

b) $B(t) = C(t) \cdot p(t) = (200 + 10t)\,(200 - 2t) = -20t^2 + 1\,600t + 40\,000$ si $0 \le t \le 60$

c) Para hallar el máximo, hacemos $B'(t) = 0$:

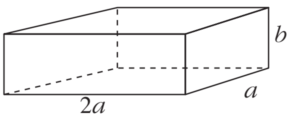
$B'(t) = -40t + 1\,600 = 0 \;\rightarrow\; t = 40$

Al cabo de 40 días se obtiene el máximo beneficio, que es:

$B(40) = -20 \cdot 40^2 + 1\,600 \cdot 40 + 40\,000 = 72\,000$ €

17 **Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro.**

Calcula las medidas que debe tener la caja y cuál será su volumen.



Volumen de la caja: $V = 2a \cdot a \cdot b = 2a^2b$

$a + 2a + b = 1 \;\rightarrow\; b = 1 - 3a$

$V = 2a^2(1 - 3a) = 2a^2 - 6a^3$

Para hallar el máximo volumen, derivamos e igualamos a cero:

$$V' = 4a - 18a^2 = 0 \;\rightarrow\; a(4 - 18a) = 0 \;\begin{cases} a = 0 \text{ (no vale)} \\ a = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Comprobamos si el volumen es máximo para $a = \dfrac{2}{9}$:

$$V'' = 4 - 36a \;\rightarrow\; V''\left(\frac{2}{9}\right) = 4 - 36 \cdot \frac{2}{9} = -4 < 0, \text{ máximo.}$$

Si $a = \dfrac{2}{9}$ m, el largo será $2 \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{9}$ m, y el alto, $1 - \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{3}$ m.

El volumen máximo es:

$$V = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243} \text{ m}^3$$

PARA RESOLVER

18 **Prueba que la recta $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla el punto de tangencia y estudia si esa recta corta a la curva en otro punto distinto al de tangencia.**

$y' = 3x^2 - 12x + 8$

Veamos para qué valor de x tiene pendiente -1:

$3x^2 - 12x + 8 = -1$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \;\begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = -3 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 3 \end{cases}$$

El punto $(3, -3)$ verifica la ecuación $y = -x$.

Veamos los puntos de corte:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = -x \ \rightarrow \ x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0 \ \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \\ x = 3 \ \rightarrow \ y = -3 \end{cases}$$

El otro punto de corte es $(0, 0)$.

s19 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 12x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

- Hallamos el punto de inflexión:

  $y' = 12x^2 - 24x \ \rightarrow \ y'' = 24x - 24 \ \rightarrow \ y''' = 24$

  $y'' = 0 \ \rightarrow \ 24x - 24 = 0 \ \rightarrow \ x = 1, \ y = 4 - 12 - 10 = -18$

  Comprobamos que $(1, -18)$ es un punto de inflexión:

  $y'''(1) = 24 \neq 0$

- Pendiente de la recta tangente:

  $m = y'(1) = 12 \cdot 1 - 24 \cdot 1 = -12$

- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -18 - 12(x - 1) \ \rightarrow \ y = -12x - 6$

s20 Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

$$y = ax^2 + bx + c$$

La pendiente de la recta $y = 2x - 3$ es 2. Debe ser $y'(2) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2ax + b \ \rightarrow \ y'(2) = 2 \ \rightarrow \ 4a + b = 2 \\ \text{Pasa por } A(2, 1) \ \rightarrow \ y(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ \text{Pasa por } B(5, -2) \ \rightarrow \ y(5) = 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\}$$

Solución del sistema: $a = -1, \ b = 6, \ c = -7 \ \rightarrow \ y = -x^2 + 6x - 7$

21 La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en $(2, 1)$. Calcula a, b y c.

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-1) = 0 & \rightarrow & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \rightarrow & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \rightarrow & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}}\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

22 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y que en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

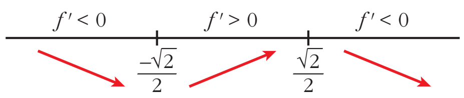
a) $f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$. La pendiente de la recta es –3.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \;\rightarrow\; a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \;\rightarrow\; 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 4$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -3(2x^2 - 1) = 0 \;\left\langle\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\; f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\; f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

es creciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

tiene un mínimo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

s23 **De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que:**

— Tiene un mínimo en $x = 2$.

— Su gráfica pasa por el punto (2, 2).

Teniendo en cuenta estos datos, ¿cuánto vale la función en $x = 1$?

$f'(x) = 2x + a$

Además:

"Tiene un mínimo en $x = 2$" $\rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 2 \cdot 2 + a = 0 \rightarrow a = -4$

"Su gráfica pasa por (2, 2)" $\rightarrow f(2) = 2 \rightarrow 2^2 + (-4) \cdot 2 + b = 2 \rightarrow$

$\rightarrow b - 4 = 2 \rightarrow b = 6$

Por tanto: $f(1) = 1^2 + a + b = 1 + (-4) + 6 = 3$

s24 **Calcula p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto $(-2, 1)$ y presente un mínimo en $x = -3$.**

$y = x^2 + px + q \rightarrow f'(x) = 2x + p$

$f(-2) = 4 - 2p + q = 1$

$f'(-3) = 2(-3) + p = 0 \rightarrow p = 6 \xrightarrow{(1)} 4 - 2 \cdot 6 + q = 1 \rightarrow q = 9$

(1) Sustituimos en $f(-2)$.

Por tanto: $p = 6$ y $q = 9$

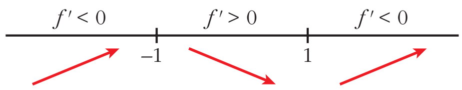
25 **Estudia los intervalos de crecimiento y de concavidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2}$ **b)** $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

a) $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{3(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

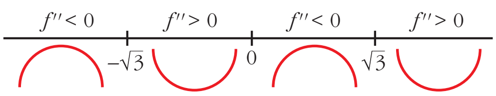
Signo de la derivada:



Crece en $(-1, 1)$ y decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$f''(x) = \dfrac{6x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = \sqrt{3}, \; x = -\sqrt{3}$

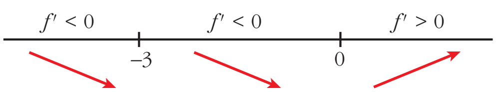


Es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$.

b) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = -3$

Signo de la derivada:

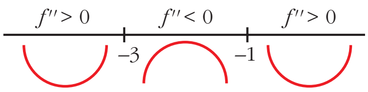


Crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 48x + 36$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -3, \ x = -1$

Signo de la segunda derivada:



Es cóncava en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ y convexa en $(-3, -1)$.

26 **Comprueba y justifica que la función $f(x) = e^{-3x}$ es siempre decreciente y cóncava.**

$f(x) = e^{-3x}$

$f'(x) = -3e^{-3x} < 0$ para cualquier valor de x

Por tanto, $f(x)$ es siempre decreciente.

$f''(x) = 9e^{-3x} > 0$ para todo x

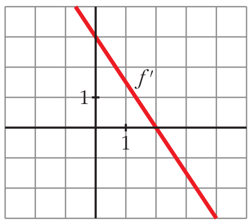
Así, $f(x)$ es cóncava en todo su dominio.

Página 182

27 **Observando la gráfica de la función f', derivada de f, di:**

a) Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) ¿Tiene f máximos o mínimos?

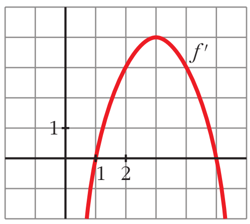


a) f es creciente $(f' > 0)$ en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decreciente $(f' < 0)$ en $(2, +\infty)$.

b) f tiene un máximo en $x = 2$. ($f'(2) = 0$ y la función pasa de creciente a decreciente).

28 **Esta es la gráfica de la función derivada de $f(x)$.**

Explica si $f(x)$ tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión en $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.



$x = 1$: en este punto, la función tiene un mínimo, porque pasa de ser decreciente $(f' < 0)$ a creciente $(f' > 0)$, y $f'(1) = 0$.

$x = 3$: en este punto, f tiene un punto de inflexión, ya que $f''(3) = 0$.

$x = 5$: en este punto, f tiene un máximo, pues pasa de ser creciente a decreciente y $f'(5) = 0$.

29 **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$**:**

a) Halla su función derivada.

b) ¿Tiene f algún punto en el que $f'(x) = 0$?

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f.

d) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$.

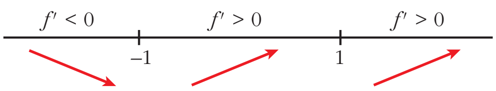
$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

No es derivable en $x = 1$ porque $f'(1^-) = 2 \ne f'(1^+) = 1$.

b) $f'(x) = 0$ solo puede darse para $2x + 2 = 0 \to x = -1$

c) Signo de la derivada:



Crece en $(-1, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, -1)$.

d) La pendiente de la recta en $x = 0$ es: $m = f'(0) = 2$

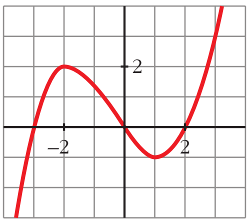
Por tanto:

$y = f(0) + m(x - 0)$

$y = -1 + 2(x - 0)$

$y = 2x - 1$

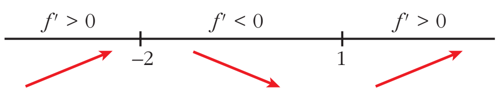
30 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**



a) Indica el signo que tendrá f' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ y $(1, +\infty)$.

b) ¿En qué puntos la gráfica de f' cortará al eje OX?

a)



b) En $x = -2$ y en $x = 1$.

31 **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$ en su punto de inflexión.**

$y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$

$y' = 6x^2 - 48x + 72$

$y'' = 12x - 48$

El punto de inflexión será:

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x - 48 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow (4, 17)$$

En ese punto, la pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(4) = -24$$

Así, la ecuación de la recta pedida es:

$$y = f(4) + m(x - 4)$$

$$y = 17 - 24(x - 4)$$

$$y = -24x + 113$$

32 **Dada la curva $y = x^4 - 4x^3$:**

a) ¿Cuál es la función que nos da la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera?

b) Halla el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

a) La función pedida es la de su función derivada: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

b) Para ello hay que hallar el máximo de la función f':

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$

Hallamos la tercera derivada:

$f'''(x) = 24x - 24$

$f'''(0) = -24 < 0 \rightarrow (0, 0)$ es un máximo.

$f'''(2) = 24 > 0 \rightarrow (2, -16)$ es un mínimo.

El punto pedido es el (0, 0).

33 **Una feria ganadera permanece abierta al público desde las 10 hasta las 20 horas. Se sabe que el número de visitantes diarios viene dado por:**

$$N(t) = -20(A - t)^2 + B, \quad 10 \le t \le 20$$

Sabiendo que a las 17 horas se alcanza el número máximo de 1 500 visitantes, determina el valor de A y de B.

La función pasa por el punto (17, 1 500). Su derivada es igual a 0 en $t = 17$, punto en el que alcanza el máximo:

$N(17) = -20(A - 17)^2 + B = 1\,500$

$N'(t) = 40(A - t) \;\to\; N'(17) = 40(A - 17) = 0 \;\to\; A = 17$

$N(17) = -20(17 - 17)^2 + B = 1\,500 \;\to\; B = 1\,500$

Comprobamos que hay un máximo en $t = 17$:

$N''(t) = -40 < 0$, es un máximo.

34 **El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:**

$$N(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si } 0 \le t \le 9 \\ 10 - \left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si } 9 \le t \le 24 \end{cases}$$

donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0:00 h.

a) ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaba por el peaje?

b) ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos? ¿Cuántos fueron?

a) Para saber cuándo la función es creciente, estudiaremos el signo de su derivada.

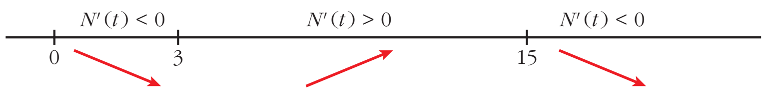
Las funciones con las que $N(t)$ está definida son continuas y derivables si $0 \le t < 9$ y si $9 < t \le 24$. Estudiamos la derivabilidad en $t = 9$:

$$N'(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-3}{3}\right) & \text{si } 0 \le t < 9 \\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-15}{3}\right) & \text{si } 9 < t \le 24 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} N'(9^-) = \dfrac{4}{3} \\ N'(9^+) = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \; N \text{ es derivable en } t = 9.$$

$$N'(t) = 0 \;\begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-3}{3}\right) = 0 \;\to\; t = 3 \\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-15}{3}\right) = 0 \;\to\; t = 15 \end{cases}$$

Signo de $N'(t)$:



El número de vehículos aumentó entre las 3 h y las 15 h.

b) El máximo absoluto de una función continua definida en un intervalo cerrado se encuentra entre los máximos relativos de la función o en los extremos del intervalo:

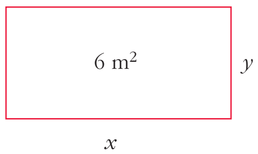
$N(0) = 3; \quad N(15) = 10; \quad N(24) = 1$

El mayor número de vehículos pasó a las 15 h, y fueron 10 vehículos.

35 **Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,50 € y el de tramo vertical, 3 €.**

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



a) Área $= x \cdot y = 6 \;\rightarrow\; y = \dfrac{6}{x}$

Perímetro $= 2x + 2y$

Coste $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$C = 5x + \dfrac{36}{x}$

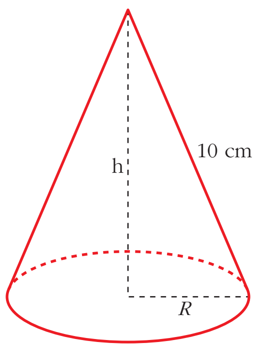
$C' = 5 - \dfrac{36}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \simeq 2{,}68 \text{ m} \;\rightarrow\; y = \sqrt{5} \simeq 2{,}24 \text{ m}$

$\left(C'' = \dfrac{72}{x^3};\; C''\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \text{ es mínimo}\right).$

Las dimensiones son $x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ m e $y = \sqrt{5}$ m.

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \simeq 26{,}83$ €

36 **Se quiere construir un recipiente cónico cuya generatriz mida 10 cm y que tenga capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$\text{h}^2 + R^2 = 100 \;\rightarrow\; R^2 = 100 - \text{h}^2$

Volumen $= \dfrac{1}{3}\pi R^2\text{h} = \dfrac{1}{3}\pi(100 - \text{h}^2)\text{h} = \dfrac{1}{3}\pi(100\text{h} - \text{h}^3)$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$f(\text{h}) = \dfrac{1}{3}\pi(100\text{h} - \text{h}^3)$

$f'(\text{h}) = \dfrac{1}{3}\pi(100 - 3\text{h}^2)$

$f'(\text{h}) = 0 \;\rightarrow\; 100 - 3\text{h}^2 = 0 \;\rightarrow\; \text{h} = \pm\sqrt{\dfrac{100}{3}}$

(consideramos la raíz positiva, pues $\text{h} \geq 0$).

$\left(f'(\text{h}) > 0 \text{ a la izquierda de } \text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}} \text{ y } f'(\text{h}) < 0 \text{ a la derecha de } \text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}.\right.$

$\left.\text{Luego en } \text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}} \text{ hay un máximo}\right).$

Por tanto, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - \text{h}^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \rightarrow R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

37 **Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Su precio $P(t)$, en miles de euros, estaba relacionado con el tiempo, t, en años, que este llevaba en el mercado por la función:**

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $P(t)$.

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo?

c) ¿Cuál fue la tasa de variación media del precio durante los últimos 6 años?

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) $P'(t) = \begin{cases} 8t & 0 < t < 2 \\ -5/2 & 2 < t < 8 \end{cases}$ (No existe $P'(2)$, pues $P'(2^-) \neq P'(2^+)$).

$P(t)$ es creciente en $0 < t < 2$ pues $P'(t) > 0$.

$P(t)$ es decreciente en $2 < t < 8$ pues $P'(t) < 0$.

b) El máximo se alcanza en $t = 2$, $P(2) = 20$.

c) T.V.M. $[2, 8] = \dfrac{P(8) - P(2)}{8 - 2} = \dfrac{5 - 20}{6} = \dfrac{-15}{6} = \dfrac{-5}{2} = -2{,}5$

Página 183

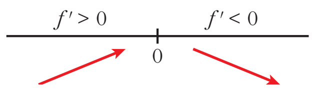
CUESTIONES TEÓRICAS

s38 **La función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$.**

¿Puede presentar f un máximo relativo en el punto a? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3 \qquad f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

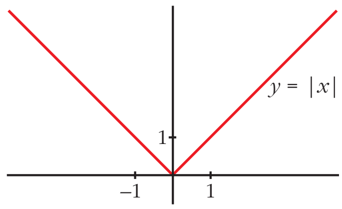
39 **Considera la función $|x|$ (valor absoluto de x):**

a) ¿Presenta un mínimo relativo en algún punto?

b) ¿En qué puntos es derivable?

Razona tus respuestas.

a)



$f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$.

De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

b) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.

Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

40 **Si $f'(a) = 0$, ¿qué proposición es cierta?:**

a) f tiene un máximo o un mínimo en el punto de abscisa $x = a$.

b) f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

c) f tiene en el punto $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

41 **Comprueba si existe algún valor de a para el cual la función:**

$$f(x) = a \ln x + x^3$$

tenga un punto de inflexión en $x = 1$.

Para que exista punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$:

$$f(x) = a \ln x + x^3 \rightarrow f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 = \frac{a}{x} + 3x^2$$

$$f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x \rightarrow f''(1) = -a + 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

Comprobamos con f''' si existe punto de inflexión:

$$f''(x) = -\frac{6}{x^2} + 6x \;\rightarrow\; f'''(x) = \frac{6}{x^3} + 6 \;\rightarrow\; f'''(1) \neq 0$$

Para $a = 6$, la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

PARA PROFUNDIZAR

42 **Estudia la existencia de máximos y de mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$. ¿Tiene puntos de inflexión?**

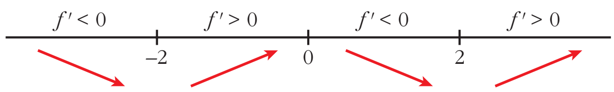
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:



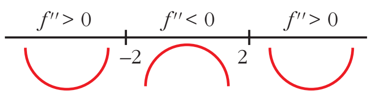
- La función tiene un máximo relativo en (0, 4).

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$.

- Tiene un mínimo relativo en (–2, 0) y otro en (2, 0). En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \ge 0$ para todo x.
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Signo de f'':



- Tiene dos puntos de inflexión: (–2, 0) y (2, 0). Coinciden con los dos mínimos absolutos.

43 **Estudia el crecimiento, los máximos y los mínimos de la función:**

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \ne f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \ne f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

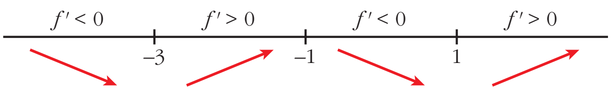
  $2x + 2 = 0 \quad \to \quad x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1 \ \to \ f(-1) = 4$.

- Signo de la derivada:



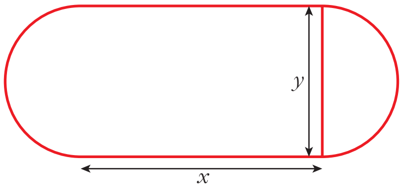
- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

  tiene un máximo en $(-1, 4)$.

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$. Son los puntos donde f no es derivable.

44 **Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y de dos semicírculos adosados a dos lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de la pista sea de 200 m, halla las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.**



Perímetro de la pista $= 2x + \pi \cdot y = 200$

Despejamos: $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

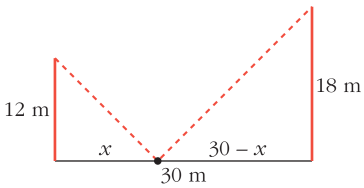
Área del rectángulo $= x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivamos:

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \;\rightarrow\; x = 50 \text{ m} \;\rightarrow\; y = \frac{100}{\pi} \text{ m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\; A''(50) < 0 \;\rightarrow\; x = 50 \text{ es máximo}\right).$$

45 **Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?**



La longitud total del cable es:

$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}$; es decir:

$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \;\rightarrow\; x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$

$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0$

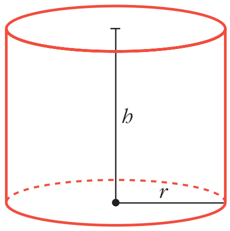
$x^2 + 48x - 720 = 0$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \quad \text{(no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

46 Determina el radio de la base y la altura de un cilindro de 54 cm² de área total para que su volumen sea máximo.



Área total $= 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2$

$$2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 = 54 \;\to\; \text{h} = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Volumen $= \pi r^2\text{h}$

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$$

Buscamos el máximo de V:

$$V' = 27 - 3\pi r^2 \;\to\; 27 - 3\pi r^2 = 0 \;\to\; r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \;\to$$

$$\to\; r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ (la solución negativa no vale).}$$

Comprobamos si el volumen es máximo:

$$V'' = -6\pi r \;\to\; V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) < 0, \text{ es un máximo.}$$

$$\text{Si } r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \;\to\; \text{h} = \frac{27 - \pi(9/\pi)}{\pi(3/\sqrt{\pi})} = \frac{18\sqrt{\pi}}{3\pi} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}$$

Por tanto, para que el volumen sea máximo debe ser:

$$r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \simeq 1{,}7 \text{ cm} \;\text{ y }\; \text{h} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi} \simeq 3{,}4 \text{ cm}$$

Página 183

AUTOEVALUACIÓN

1. Dada la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$:

a) Halla la pendiente de la recta r que une los puntos de la parábola de abscisas $x = 0$ y $x = 3$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r del apartado a).

a) El punto de la parábola de abscisa $x = 0$ es el $(0, -3)$ y el de $x = 3$ es el $(3, 0)$.

Por tanto, la pendiente de la recta que los une es:

$$m = \frac{-3 - 0}{0 - 3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

La ecuación de la recta es $y = x - 3$.

b) Cualquier recta paralela a r tiene la pendiente igual a 1. Buscamos los puntos en los que la derivada de la curva es igual a 1:

$$y' = -2x + 4 \;\rightarrow\; -2x + 4 = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2},\; y = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{4}$$

El punto de tangencia es $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Ecuación de la recta tangente:

$$y = \frac{3}{4} + 1\left(x - \frac{3}{2}\right) \;\rightarrow\; y = x - \frac{3}{4}$$

2. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $y = \dfrac{x - 1}{x + 3}$. ¿Tiene máximos o mínimos?

Estudiamos el signo de la función derivada:

$$y' = \frac{(x + 3) - (x - 1)}{(x + 3)^2} = \frac{4}{(x + 3)^2}$$

El numerador y el denominador son positivos para cualquier valor de x.

La función es creciente en todo su dominio, $\mathbb{R} - \{3\}$, porque su derivada es positiva.

No tiene máximos ni mínimos, porque es siempre creciente.

3. Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de la función:

$$y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 - \frac{1}{10}$$

- Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que la derivada es igual a 0.

$$y' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 = x^4 - 4x^3 + 3x^2 \;\rightarrow\; y' = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \;\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Los posibles máximos y mínimos están en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$.

Comprobamos en la segunda derivada:

$y'' = 4x^3 - 12x^2 + 6x$

$y''(0) = 0$

$y''(1) < 0 \;\rightarrow\;$ máximo $\left(1, \frac{1}{10}\right)$

$y''(3) > 0 \;\rightarrow\;$ mínimo $\left(3, -\frac{11}{2}\right)$

- Buscamos los puntos de inflexión:

$$y'' = 0 \;\rightarrow\; 4x^3 - 12x^2 + 6x = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2x(2x^2 - 6x + 3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 0 \;\begin{cases} x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \simeq 2{,}4 \\ x = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}6 \end{cases}$$

Comprobamos en $y''' = 12x^2 - 24x + 6$: $\begin{cases} y'''(0) \neq 0 \\ y'''(2{,}4) \neq 0 \\ y'''(0{,}6) \neq 0 \end{cases}$

Puntos de inflexión:

$\left(0, -\frac{1}{10}\right)$, $(2{,}4; -3{,}4)$, $(0{,}6; 0{,}014)$

4. **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber un punto de inflexión en $x = 1$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\; f(1) = 1 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ \bullet\; f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ \bullet\; f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos: $a = -3$, $b = 3$, $c = 0$

Por tanto, la función buscada es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

5. **El número de personas ingresadas en un hospital por una infección después de t semanas viene dado por la función:**

$$N(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} \quad \text{siendo } t \geq 0$$

Calcula el máximo de personas ingresadas y la semana en que ocurre. ¿A partir de qué semana, después de alcanzar el máximo, el número de ingresados es menor que 25?

- Para calcular el máximo, derivamos e igualamos a cero:

$$N'(t) = \frac{350(2t^2 - 3t + 8) - 350t(4t - 3)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = \frac{350(-2t^2 + 8)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; -2t^2 + 8 = 0 \;\rightarrow\; t^2 = 4 \left\langle \begin{array}{l} t = -2 \;\; (\text{no vale, pues } t \geq 0) \\ t = 2 \;\rightarrow\; N(2) = \dfrac{350 \cdot 2}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 8} = 70 \end{array}\right.$$

El número máximo de personas ingresadas es 70, y ocurre en la 2.ª semana.

- Hemos de ver cuándo $\dfrac{350t}{2t^2 - 3t + 8} < 25$.

$$350t < 50t^2 - 75t + 200 \;\rightarrow\; 50t^2 - 425t + 200 > 0 \;\rightarrow\; 2t^2 - 17t + 8 > 0$$

Resolvemos la inecuación:

$$f(t) = 2t^2 - 17t + 8 = 0 \left\langle \begin{array}{l} t = 8 \\ t = 0{,}5 \end{array}\right.$$

$f(t) > 0$		$f(t) < 0$		$f(t) > 0$
	0,5		8	

$f(t) > 0$ para $t \in (0;\, 0{,}5) \cup (8, +\infty)$.

Después de alcanzar el máximo en $t = 2$, a partir de $t = 8$, el número de personas ingresadas es menor que 25.

6. **Sea $B(x) = ax + b\sqrt{x}$ la función de beneficios, en miles de euros, de una empresa. El beneficio máximo es de 50 miles de euros para $x = 100$ unidades producidas. Calcula a y b.**

$B(x) = ax + b\sqrt{x}$

Sabemos que $B(100) = 50$ y $B'(100) = 0$

$B(100) = 100a + 10b = 50$

$$B'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} \rightarrow B'(100) = a + \frac{b}{20} = 0$$

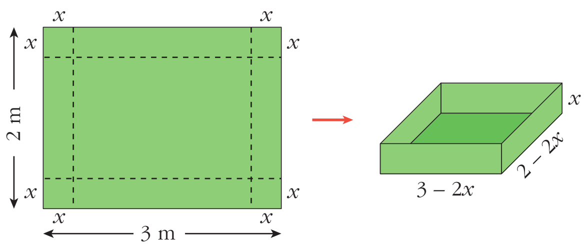
Resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ a + \dfrac{b}{20} = 0 \rightarrow a = -\dfrac{b}{20} \end{cases}$$

$$100\left(-\frac{b}{20}\right) + 10b = 50 \rightarrow \frac{-b}{2} + b = 5 \rightarrow -b + 2b = 10 \rightarrow b = 10;\ a = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $B(x) = -\dfrac{x}{2} + 10\sqrt{x}$.

7. **Con una cartulina rectangular de 2 m × 3 m, se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recorta un cuadrado de cada uno de los vértices. Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.**



El volumen de la caja es:

$V(x) = (3 - 2x) \cdot (2 - 2x) \cdot x,\ \ x \in (0, 1)$

$V(x) = 6x - 10x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 6 - 20x + 12x^2$

$$V'(x) = 0 \rightarrow 6 - 20x + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{12} \begin{cases} 1{,}27 \text{ (no vale)} \\ 0{,}39 \end{cases}$$

$V''(x) = -20 + 24x;\ \ V''(0{,}39) < 0 \Rightarrow x = 0{,}39$

Si $x = 0{,}39$ m, el volumen es máximo.