

Proyecto MaTeX

Derivada-Aplicaciones

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES

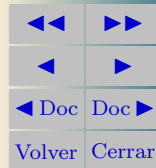


Tabla de Contenido

1. Función creciente
2. Función decreciente
3. Puntos singulares
 - Máximo • Mínimo • Punto de inflexión
 - 3.1. Clasificación Máximos y mínimos
4. Curvatura
 - 4.1. Punto de Inflexión

Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES

◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar

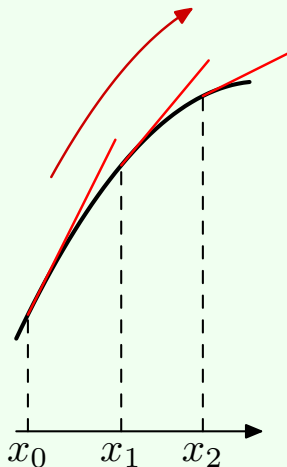
1. Función creciente

Definición 1.1 Sea f una función definida en un intervalo I . La función f es **estrictamente creciente** en el intervalo I si cumple

$$x_0 < x_1 < x_2 \implies f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$$

- Si la función es creciente, en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente positiva.
- Recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.
- Si $f(x)$ es derivable se tiene que

$$f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ Creciente}$$



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



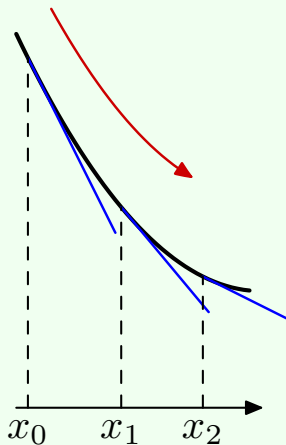
2. Función decreciente

Definición 2.1 Sea f una función definida en un intervalo I . La función f es **estrictamente decreciente** en el intervalo I si cumple

$$x_0 < x_1 < x_2 \implies f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$$

- Si la función es decreciente, en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente negativa.
- Recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.
- Si $f(x)$ es derivable se tiene que

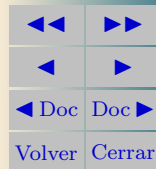
$$f'(x) < 0 \implies f(x) \text{ Decreciente}$$



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES





3. Puntos singulares

Definición 3.1 Sea f una función definida en un intervalo I . Los puntos de la función que tienen tangente horizontal se llaman **puntos singulares**.

Como la tangente es horizontal su pendiente vale 0. En los puntos singulares se tiene que la derivada vale 0. $f'(x) = 0$.

Hay tres casos:

- El punto c_1 se llama punto de mínimo relativo.

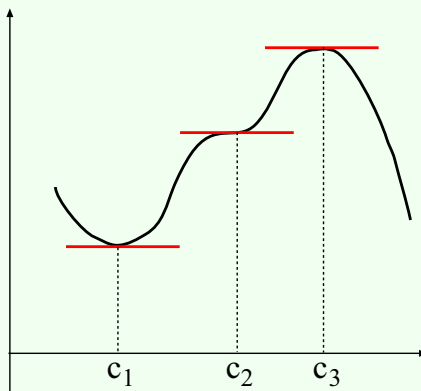
$$f'(c_1) = 0$$

- El punto c_2 se llama punto de inflexión.

$$f'(c_2) = 0$$

- El punto c_3 se llama punto de máximo relativo.

$$f'(c_3) = 0$$

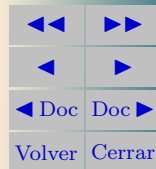


A continuación estudiamos en detalle cada uno de ellos.

MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES





● **Máximo**

Observa el gráfico.

- A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada

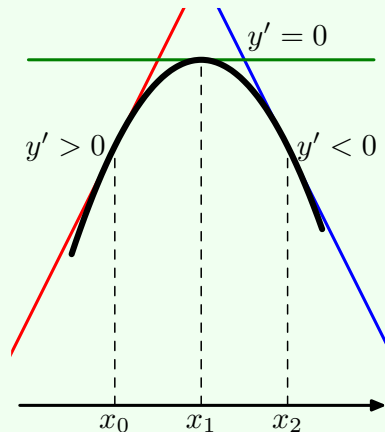
$$y' > 0$$

- A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada

$$y' < 0$$

- En el punto x_1 la tangente es horizontal y hay un máximo

$$y'(x_1) = 0$$



	Máximo relativo		
	x_1		
y'	+	0	-
$y = f(x)$	↗ creciente	$f(x_1)$	↘ decreciente

MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES

◀◀	▶▶
◀	▶
◀ Doc	Doc ▶
Volver	Cerrar

● **Mínimo**

Observa el gráfico.

- A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada

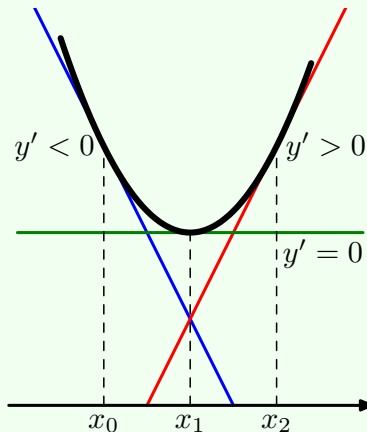
$$y' < 0$$

- A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada

$$y' > 0$$

- En el punto x_1 la tangente es horizontal y hay un mínimo

$$y'(x_1) = 0$$



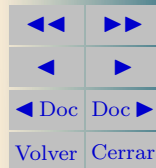
	Mínimo relativo		
	x_1		
y'	-	0	+
$y = f(x)$	↘ decreciente	$f(x_1)$	↗ creciente



MaTeX

DERIVADA

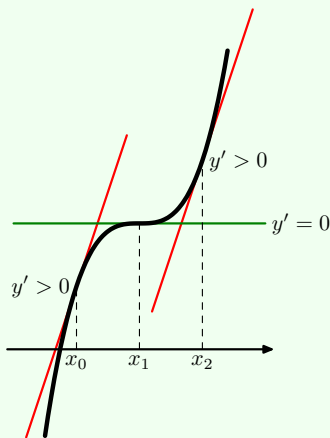
APLICACIONES



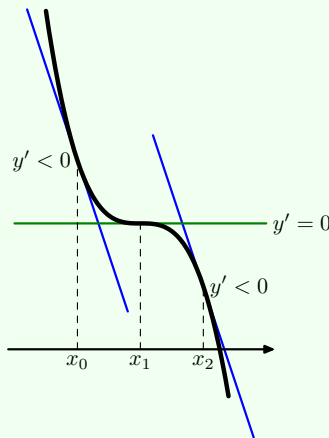


• **Punto de inflexión**

Cuando la derivada es cero $y' = 0$, no siempre hay máximo o mínimo, pues depende como crezca o decrezca a la izquierda y derecha del punto.



	Punto inflexión		
	x_1		
y'	+	0	+
$y = f(x)$	↗	$f(x_1)$	↗



	Punto inflexión		
	x_1		
y'	-	0	-
$y = f(x)$	↘	$f(x_1)$	↘

MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES

Navigation controls: back, forward, search, and document icons.

Así pues para estudiar si una función tiene o no, máximos o mínimos calculamos los puntos que anulan la derivada y' , estudiando a continuación el signo de la misma.

3.1. Clasificación Máximos y mínimos

Teorema 3.1. (Test de Clasificación) Sea $f(x)$ una función y c un punto donde $f'(c) = 0$

- a) **Test de Máximo** Si f' es positiva a la izquierda de c y f' es negativa a la derecha de c , entonces c es un máximo local.
- b) **Test de Mínimo** Si f' es negativa a la izquierda de c y f' es positiva a la derecha de c , entonces c es un mínimo local.
- c) **Test de Inflexión** Si $f'(c) = 0$ no cambia de signo a la izquierda y a la derecha de c , entonces c es un punto de inflexión.



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejemplo 3.1. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^2 - 1$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero. $f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$
- Estudiamos el signo de la derivada dando valores a la izquierda y a la derecha de 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y		\searrow 0 \nearrow	

- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$. $x = 0$ es un mínimo.

□

Ejemplo 3.2. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3$.

Solución: Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \implies x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	+
y		\nearrow 0 \nearrow	

La función es siempre creciente El punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

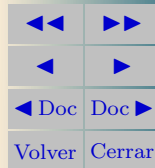
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejemplo 3.3. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \implies x = 0, \pm 1$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores

$$f'(-2) = -24 < 0 \quad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} < 0 \quad f'(2) = 24 > 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f		\searrow	-1	\nearrow	0	\searrow	-1	\nearrow

- La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$
- La función es creciente en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$.
- Hay dos mínimos en $m(-1, -1)$ y $m(1, -1)$.
- Hay un máximo en $M(0, 0)$.

□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejemplo 3.4. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$x(3x - 4) = 0 \implies x = 0, x = \frac{4}{3}$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores

$$f'(-1) = 7 > 0 \quad f'(1) = -1 < 0 \quad f'(2) = 4 > 0$$

x	$-\infty$	0	$4/3$	$+\infty$		
g'		+	-	+		
g		\nearrow	0	\searrow	$f(4/3)$	\nearrow

- La función es decreciente en $(0, \frac{4}{3})$.
- La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$.
- Hay un mínimo en $x = \frac{4}{3}$.
- Hay un máximo en $x = 0$.

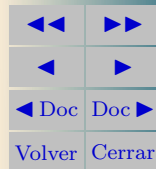
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES





Ejercicio 1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

$$a) f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$b) g(x) = 4x^3 - x^4$$

Ejercicio 2. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

$$a) f(x) = x^2 - \ln x^2$$

$$b) g(x) = \frac{1}{(x+1)(x-4)}$$

Ejercicio 3. Sea la función $f(x) = ax + \frac{1}{x}$. Hallar valores de a para que $f(x)$ sea decreciente en $x = 2$

Ejercicio 4. La función $f(x) = 3x^2 + mx + 8$, tiene un mínimo en $x = 1$. Calcular m y el valor del mínimo.

Ejercicio 5. Hallar a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$, tenga un mínimo igual a 3 en $x = 2$.

Ejercicio 6. En un día desapacible, la temperatura T en grados centígrados varió con el tiempo t en horas según la función

$$T(t) = t^2 - 9t + 8$$

para $0 \leq t \leq 12$.

- a) La temperatura a las dos de la mañana
 b) ¿Cuál fue la temperatura mínima? ¿A que hora?

MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



- c) ¿A que hora hubo 0 grados?
 d) Halla $T'(2)$ y explica su significado

Ejercicio 7. El consumo de gasolina de cierto coche viene dado por la función

$$C(x) = \frac{x^2}{400} - \frac{9x}{20} + \frac{113}{4}$$

donde x es la velocidad en km/h y $C(x)$ es el consumo en litros cada 100 km.

- a) Calcula cuál es el consumo mínimo y a qué velocidad se obtiene.
 b) Estudia (representando la función) el consumo de gasolina en función de la velocidad.

EJERCICIO 8. Clasifica los máximos y mínimos de las funciones:

(a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

(b) $f(x) = (x - 1)e^x$.

(c) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

(d) $f(x) = x \ln x$.

(e) $f(x) = x \ln^2 x$.

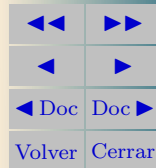
(f) $f(x) = x^2 \ln x$.



MaTEX

DERIVADA

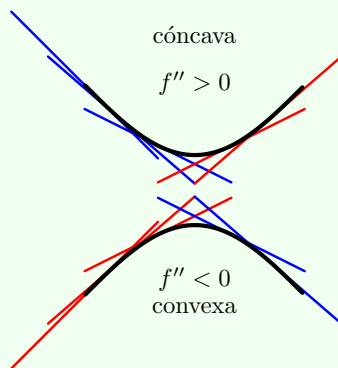
APLICACIONES



4. Curvatura

A partir del gráfico se observa que donde la curva es **cóncava** \cup , las tangentes están por debajo de la función, y, donde la curva es **convexa** \cap , las tangentes están por encima de la función.

Por otra parte en la gráfica superior las pendientes van aumentando, es decir $f'(x)$ es creciente y por tanto su derivada es positiva $f''(x) > 0$



	Mínimo relativo			Máximo relativo		
	$x = a$			$x = a$		
f'	-	0	+	+	0	-
f	\searrow	$\exists f(a)$	\nearrow	\nearrow	$\exists f(a)$	\searrow



MaTeX

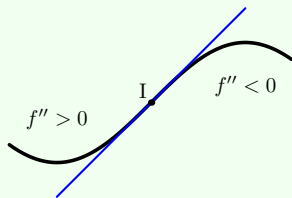
DERIVADA

APLICACIONES

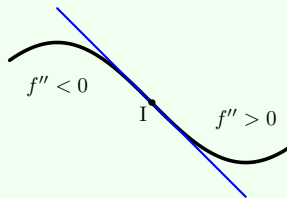


4.1. Punto de Inflexión

Cuando en un punto $(a, f(a))$ la función cambia de curvatura se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.



	Punto Inflexión		
	$x = a$		
f''	+	0	-
f	∪	∃ $f(a)$	∩



	Punto Inflexión		
	$x = a$		
f''	-	0	+
f	∩	∃ $f(a)$	∪

EJERCICIO 9. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

(c) $f(x) = x^4 + 2x^2$.

(e) $f(x) = e^x(x - 1)$.

(b) $f(x) = x^4 - 2x^3$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

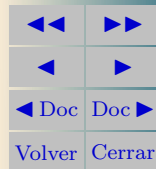
(f) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$.



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 10. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

- Hallar a para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$
- Representar $f(x)$ cuando $a = 3$
- Hallar la derivada de $f(x)$ en $x = -1$ y $x = 1$

Ejercicio 11. Sea la función $f(x) = x \ln \frac{x}{a}$, $a > 0$. Hallar el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$

Ejercicio 12. La función $f(x) = 90x^2 - 0,2x^4$ el beneficio en miles de euros que se obtiene por la fabricación de x unidades de cierto producto

- ¿Cuántas unidades de este producto se han de fabricar para obtener un beneficio máximo?
- ¿Cuál es este beneficio máximo?

Ejercicio 13. En una empresa el coste $C(x)$ de un artículo se calcula a partir de la cantidad x de un producto que se pide cada vez que la empresa se queda sin él. Dicho coste viene expresado por la función

$$C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400$$



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



¿Cuál es la cantidad del producto x que minimiza el coste para la empresa?

Ejercicio 14. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c .

Ejercicio 15. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c .

Ejercicio 16. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto de inflexión $(1, 0)$, la recta $y = -3x + 3$, y presenta un extremo en el punto de abscisa $x = 0$

Ejercicio 17. Hallar el valor de b y m para que la curva $y = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 1)$, y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.

Ejercicio 18. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto $(1, 1)$, la recta $y = -x + 2$, y presenta un extremo en el punto $(0, 2)$.

Ejercicio 19. Determinar el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que tiene 1 y 2 como raíces, pasa por $(-1, 24)$ y tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Test. Si una función $f(x)$ tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ entonces existe $f'(a)$

(a) Verdadero

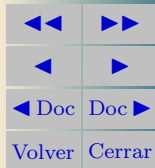
(b) Falso



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Test. Si $f'(c)$ no existe entonces existe $x = c$ es un punto crítico.

(a) Verdadero

(b) Falso

EJERCICIO 20. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 4.$

(b) $f(x) = x^4 - 6x^2.$

(c) $f(x) = (x - 2)^4.$

(d) $f(x) = xe^x.$

(e) $f(x) = \ln(x + 1).$

(f) $f(x) = \frac{2 - x}{x + 1}.$

Ejercicio 21. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de

$$f(x) = x|x|$$

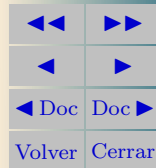
y comprueba que existe un punto de inflexión en $x = 0$ a pesar de que no existe $f''(0)$.



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Con $Dom(f) = R - \{2\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in R - \{2\}$$

Luego f es estrictamente decreciente.

b) Sea $g(x) = 4x^3 - x^4$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \implies 4x^2(3-x) = 0 \implies x = 0, 3$$

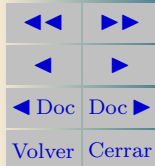
x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
g'		+ 0	+ 0	-
g		↗ 0	↗ 27	↘

Ejercicio 1

MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



**Ejercicio 2.**

a) Sea $f(x) = x^2 - \ln x^2$. Con $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
f	\searrow	1	\nearrow	\searrow	1	\nearrow

b) Sea $g(x) = \frac{1}{(x+1)(x-4)}$. Con $Dom(g) = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = -\frac{2x-3}{(x+1)^2(x-4)^2} = 0 \implies x = 3/2$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g	\searrow	$f(\frac{3}{2})$	\nearrow

MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES

Ejercicio 2



Ejercicio 3. Siendo

$$f(x) = ax + \frac{1}{x}$$

para que $f(x)$ sea decreciente en $x = 2$, (siendo $f(x)$ derivable en) es necesario que $f'(2) \leq 0$

$$f'(x) = a - \frac{1}{x^2}$$

luego

$$f'(2) \leq 0 \implies a - \frac{1}{4} \leq 0 \implies \boxed{a \leq \frac{1}{4}}$$

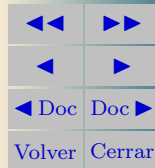
Ejercicio 3



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 4. Como $f(x) = 3x^2 + mx + 8$,

$$f'(x) = 6x + m$$

- tiene un mínimo en $x = 1$, luego

$$f'(1) = 0 \implies f'(1) = 6(1) + m = 0 \implies \boxed{m=-6}$$

- el valor del mínimo es

$$f(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 8 = 17$$

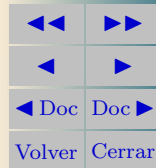
Ejercicio 4



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 5. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + b$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

- tiene un mínimo en $x = 2$, luego

$$f'(2) = 0 \implies f'(2) = 3(2)^2 + 2a(2) = 0 \implies \boxed{a = -3}$$

- el valor del mínimo es 3, luego

$$f(2) = 3 \implies (2)^3 - 3(2)^2 + b = 3 \implies \boxed{b = 7}$$

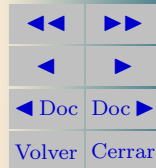
Ejercicio 5



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 6. Como

$$T(t) = t^2 - 9t + 8 \quad 0 \leq t \leq 12$$

a) La temperatura a las dos de la mañana será

$$T(2) = (2)^2 - 9(2) + 8 = -6$$

b) Hallamos $T'(t)$

$$T'(t) = 2t - 9 = 0 \implies \boxed{t = 4,5}$$

a las 4,5 horas se alcanzó la temperatura mínima de $T(4,5) = -12,25$

c) ¿A que hora hubo 0 grados? resolvemos $T(t) = 0$

$$T(t) = t^2 - 9t + 8 = 0 \implies \boxed{t = 1} \quad \boxed{t = 8}$$

d) Halla $T'(2)$ y explica su significado

$$T'(2) = 2(2) - 9 = -5$$

significa que a esa hora la temperatura está bajando a razón de 5 grados centígrados por hora.

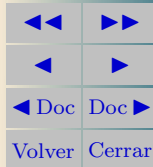
Ejercicio 6



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



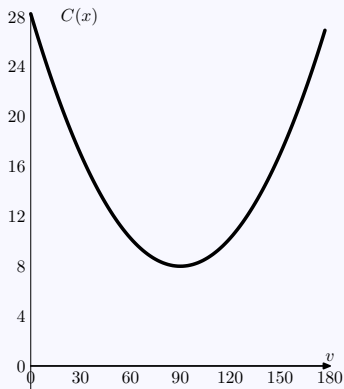
Ejercicio 7. Siendo el consumo $C(x) = \frac{x^2}{400} - \frac{9x}{20} + \frac{113}{4}$

$$a) C'(x) = \frac{x}{200} - \frac{9}{20}$$

$$C'(x) = \frac{x}{200} - \frac{9}{20} = 0 \implies \boxed{x = 90}$$

a 90 km/h se alcanza el consumo mínimo que vale $C(90) = 8$ litros.

b) La gráfica de $C(x)$ es una parábola de mínimo (90; 8).



MaT_EX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 7

Ejercicio 8(a) Sea $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x - 1 = 0 \implies x = 1/4$$

x	$-\infty$	$1/4$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f		$\searrow f(1/4)$	\nearrow

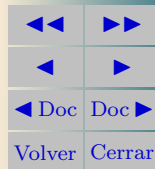
Mínimo $m\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

□



MaTEX

DERIVADA
APLICACIONES



Ejercicio 8(b) Sea $f(x) = (x - 1)e^x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = x e^x = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	$f(0) = -1$	\nearrow

Mínimo $m(0, -1)$

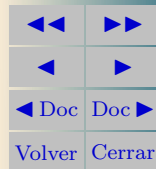
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 8(c) Sea $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \implies x^3 - 2 = 0 \implies x = \sqrt[3]{2}$$

Punto crítico $x = \sqrt[3]{2}$, pues $x = 0 \notin Dom(f)$

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$	
f'	$+$	\neq	$-$	0	$+$
f	\nearrow	\neq	\searrow	$f(\sqrt[3]{2})$	\nearrow

Mínimo $m\left(\sqrt[3]{2}, f(\sqrt[3]{2})\right)$

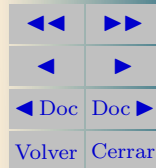
□



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 8(d) Sea $f(x) = x \ln x$.

$$\text{Dom}(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \implies x = e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
f'	-	0	+
f		\searrow $f(e^{-1})$ \nearrow	

Mínimo $m(e^{-1}, -e^{-1})$

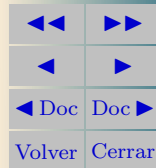
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 8(e) Sea $f(x) = x \ln^2 x$.

$$\text{Dom}(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x(\ln x + 2) = 0 \implies x = 1, e^{-2}$$

x	0	e^{-2}	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	\nearrow	$4e^{-2}$	\searrow	0	\nearrow

Máximo $M(e^{-2}, 4e^{-2})$ Mínimo $m(1, 0)$

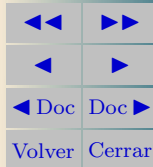
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 8(f) Sea $f(x) = x^2 \ln x$.

$$\text{Dom}(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1) = 0 \implies x = e^{-1/2}$$

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\searrow	$f(e^{-1/2})$	\nearrow

Mínimo $m(e^{-1/2}, -\frac{1}{2e})$

□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES





Ejercicio 9(a) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \implies 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \implies x = 1, 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'		+ 0	- 0	+
f		↗ 4	↘ 0	↗

Máximo $M(1, 4)$ Mínimo $m(3, 0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \implies 6(x - 2) = 0 \implies x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''		- 0	+
f		∩ $f(2) = 2$	∪

Punto de inflexión $I(2, 2)$

□

MaTEX

DERIVADA
APLICACIONES





Ejercicio 9(b) Sea $f(x) = x^4 - 2x^3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \implies 2x^2(2x - 3) = 0 \implies x = 0, 3/2$$

x	$-\infty$	0	$3/2$	$+\infty$		
f'	$-$	0	$-$	0	$+$	
f		\searrow	$f(0)$	\searrow	$f(3/2)$	\nearrow

$$\text{Mínimo } m\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \implies 12x(x - 1) = 0 \implies x = 0, 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		\cup	$f(0)$	\cap	$f(1)$	\cup

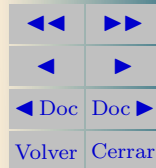
Puntos de inflexión $I_1(0, 0)$ $I_2(1, -1)$

□

MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 9(c) Sea $f(x) = x^4 + 2x^2$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \implies 4x(x^2 + 1) = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f		\searrow $f(0)$ \nearrow	

Mínimo $m(0, 0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x \implies \text{no se anula}$$

no tiene puntos de inflexión. Como

$$f''(x) > 0 \forall x$$

la función es cóncava.

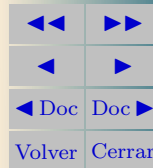
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 9(d) Sea $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \implies 2x = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f		$\nearrow f(0)$	\searrow

Máximo $M(0,1)$

$$f'' = 0 \implies f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \implies 6x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$	
f''	+	0	-	0	+
f		$\cup f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\cap f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	\cup	

Puntos de inflexión $I_1(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ $I_2(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 9(e) Sea $f(x) = e^x(x - 1)$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = xe^x = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f		\searrow $f(0)$ \nearrow	

Mínimo $m(0, -1)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f'(x) = (x + 1)e^x = 0 \implies (x + 1) = 0 \implies x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f		\cap $f(-1)$ \cup	

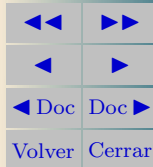
Punto de inflexión $I(-1, -2e^{-1})$

□



MaTEX

DERIVADA
APLICACIONES



Ejercicio 9(f) Sea $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. Con $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0$$

Como $f'(x) > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$ es siempre creciente.
Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$$

Como $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in Dom(f)$ no tiene puntos de inflexión. □



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES





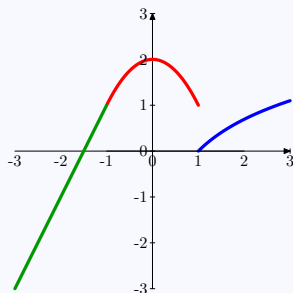
Ejercicio 10. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$

$$f(-1^-) = -2 + a = f(-1^+) = 1 \implies a = 3$$

b) Representar cuando $a = 3$



c) Es derivable en $x = -1$, pues:

$$f'(-1^-) = 2 \quad f'(-1^+) = (-2x) = 2$$

y no es derivable en $x = 1$, ya que no es continua.

MaTEX

DERIVADA
APLICACIONES



Ejercicio 11. Siendo

$$f(x) = x \ln \frac{x}{a}, a > 0$$

para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$, (siendo $f(x)$ derivable en) es necesario que $f'(1) = 0$

$$f'(x) = \ln \frac{x}{a} + x \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{1}{a} = \ln \frac{x}{a} + 1$$

luego

$$f'(1) = 0 \implies \ln \frac{1}{a} + 1 = 0 \implies \ln a = 1 \implies \boxed{a = e}$$

Para comprobar que es mínimo se calcula

$$f''(x) = \frac{1}{x} \quad f''(e) > 0 \implies \text{es un mínimo}$$

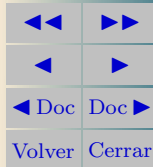
Ejercicio 11



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 12. Sea $f(x) = 90x^2 - 0,2x^4$ da el beneficio en miles de euros que se obtiene por la fabricación de x unidades

a) Buscamos el máximo

$$f'(x) = 180x - 0,8x^3 = 0 \implies x(180 - 0,8x^2) = 0 \implies$$

$$x = 0 \quad x = \pm 15$$

b) El beneficio máximo es $f(15) =$

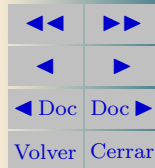


MaTEX

Ejercicio 12

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 13. Siendo

$$C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400$$

buscamos el mínimo con la condición $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -\frac{200}{x^2} + \frac{1}{2}$$

luego

$$f'(x) = 0 \implies -\frac{200}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \implies x = \pm 20$$

Para comprobar si $x = 20$ es máximo, hallamos $f''(20)$

$$f''(x) = +\frac{400}{x^3} \quad f''(20) > 0 \implies \text{es un mínimo}$$

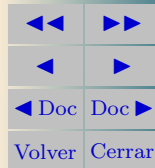
Ejercicio 13



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 14. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \implies \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1, 1)$ luego $\implies f'(1) = 0 \implies \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \implies \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Ejercicio 14



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 15. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \implies \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1, 1)$ luego $\implies f'(1) = 0 \implies \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \implies \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Ejercicio 15



MaTEX

DERIVADA
APLICACIONES



Ejercicio 16. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

■ $(1, 0)$ es punto de inflexión $\implies f''(1) = 0 \implies \boxed{6a+2b=0}$

■ $y = -3x + 3$ es tangente en $(1, 0)$, luego $f'(1) = -3$

$$\boxed{3a+2b+c=-3}$$

■ f pasa por $(1, 0)$, luego $f(1) = 0 \implies \boxed{a+b+c+d=0}$

■ En $x = 0$, hay un extremo, luego $f'(0) = 0 \implies \boxed{c=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

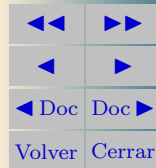
Ejercicio 16



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 17. Como $f(x) = x^3 + bx^2 + mx + 1$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + m \quad f''(x) = 6x + 2b$$

■ $(0, 1)$ es punto de inflexión, luego $f''(0) = 0 \implies \boxed{2b=0}$

■ Derivada en $x = 0$ vale 1, luego $\implies f'(0) = 1 \implies \boxed{m=1}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$b = 0 \quad m = 1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 + x + 1$

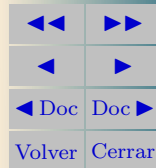
Ejercicio 17



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 18. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(1, 1)$, luego $f(1) = 1 \implies \boxed{a+b+c+d=1}$
- f pasa por $(0, 2)$, luego $f(0) = 2 \implies \boxed{d=2}$
- La pendiente en $x = 1$ es $-1 \implies f'(1) = -1 \implies \boxed{3a+2b+c=-1}$
- Un extremo en $x = 0$, luego $\implies f'(0) = 0 \implies \boxed{c=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

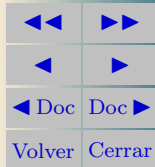
Ejercicio 18



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES





Ejercicio 19. Como $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad p''(x) = 6ax + 2b$$

■ f pasa por $(-1, 24)$, luego $p(-1) = 24 \implies \boxed{-a+b-c+d=24}$

■ $x = 1$ es una raíz, luego $p(1) = 0 \implies \boxed{a+b+c+d=0}$

■ $x = 2$ es una raíz, luego $p(2) = 0 \implies \boxed{8a+4b+2c+d=0}$

■ Un mínimo en $x = 1$, luego $\implies p'(1) = 0 \implies \boxed{3a+2b+c=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -2 \quad b = 8 \quad c = -10 \quad d = 4$$

y el polinomio pedido es $p(x) = -2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$

Ejercicio 19

MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 20(a) Sea $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x = 0 \implies x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap	$f(0)$	\cup

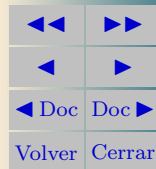
Punto de inflexión $I(0, 4)$

□



MaTEX

DERIVADA
APLICACIONES



Ejercicio 20(b) Sea $f(x) = x^4 - 6x^2$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \quad f''(x) = 12x^2 - 12$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	\cup	$f(-1)$	\cap	$f(1)$	\cup

Puntos de inflexión $I_1(-1, 5)$ $I_2(1, 5)$

□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 20(c) Sea $f(x) = (x - 2)^4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4(x - 2)^3 \quad f''(x) = 12(x - 2)^2$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12(x - 2)^2 = 0 \implies x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	+	0	+
f	∪	$f(2)$	∪

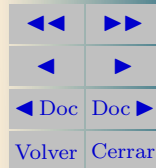
No tiene puntos de Inflexión.

□



MaTEX

DERIVADA
APLICACIONES



Ejercicio 20(d) Sea $f(x) = xe^x$. Hallamos f''

$$f'(x) = (x+1)e^x \quad f''(x) = (x+2)e^x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = (x+2)e^x = 0 \implies (x+2) = 0 \implies x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	\cap	$f(-2)$	\cup

Punto de inflexión $I(-2, -2e^{-2})$

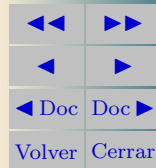
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 20(e) Sea $f(x) = \ln(x + 1)$. $Dom(f) = (-1, \infty)$. Hallamos f''

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Como $f'' < 0 \quad \forall x \in Dom(f)$, es siempre convexa.

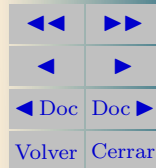
□



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 20(f) Sea $f(x) = \frac{2-x}{x+1}$. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Hallamos f''

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \quad f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	\neq	$+$
f	\cap	\neq	\cup

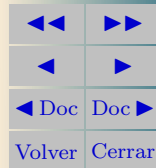
□



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES



Ejercicio 21. Siendo

$$f(x) = x|x| \implies \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 < x \end{cases}$$

Como

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''		$-$	$+$
f		\cap	\cup

El punto $x = 0$ es un punto de Inflexión y $f''(0)$ no existe.

Ejercicio 21

MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Soluciones a los Tests

Solución al Test: Puede existir la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ sin que exista la derivada en dicho punto. Por ejemplo la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

tiene en el origen $x = 0$ como tangente vertical el eje OY y sin embargo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

no existe $f'(0)$.

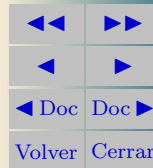
Final del Test



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Solución al Test: Es falso. Para que $x = c$ sea un punto crítico no basta que no exista $f'(c)$, además c tiene que estar en el dominio de f .

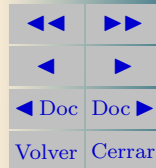
Final del Test



MaTEX

DERIVADA

APLICACIONES



Índice alfabético

curvatura, 15

función

cóncava, 15

convexa, 15

creciente, 3

decreciente, 4

Máximo, 6

Mínimo, 7

Punto de inflexión, 8, 16

punto de inflexión, 16

Puntos singulares, 5

clasificación, 9



MaTeX

DERIVADA

APLICACIONES

