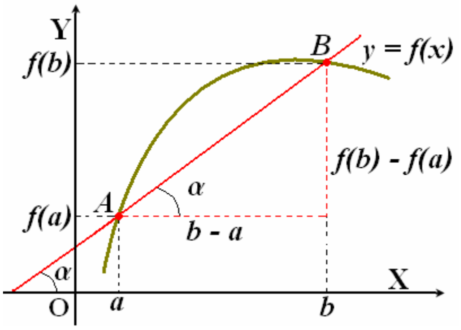
UNIDAD 6 DERIVADAS

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Se define la ***tasa de variación media*** de una función $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ como:



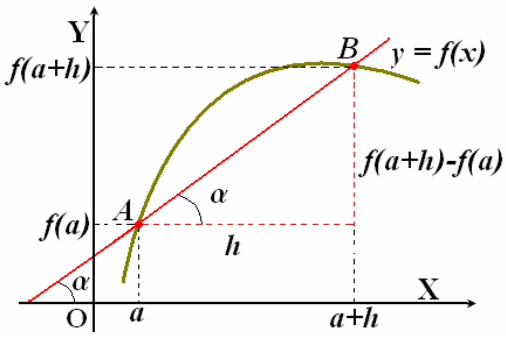
$$TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si considero la recta que une $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, su pendiente es:

$$m = tg\,\alpha = TVM[a,b]$$

Es usual escribir $[a,b] = [a, a+h]$, siendo $\begin{cases} a \rightarrow \text{Extremo inferior del intervalo.} \\ \text{a + h} \rightarrow \text{Extremo superior del intervalo.} \\ \text{h} \rightarrow \text{Longitud del intervalo.} \end{cases}$

Con lo cual:



$$m = tg\,\alpha = TVM[a, a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo: Halla la TVM de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en:

a) Los intervalos $[1, 2]$; $[1, 3]$; $[1, 4]$.

b) El intervalo $[1, 1+h]$.

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

Una función $y = f(x)$ ***es derivable en a***, si existe el siguiente límite y es finito:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

En cuyo caso al valor de este límite se le llama **derivada de f en a**, y se escribe $f'(a)$.

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

Si tomamos $x = a + h$ entonces $\begin{cases} x-a=h \\ x\to a \Rightarrow x-a\to 0 \Rightarrow h\to 0 \end{cases}$ con lo cual, la definición anterior de derivada de una función en un punto equivale a que exista:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$$

***Ejemplo*:** Sea la función $f(x) = x^2 + 3x$. Calcula, usando la definición de derivada, $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(3)$.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, hay que calcular un límite para obtener la derivada de una función en cada uno de los puntos en los que se nos pida, lo cual es un trabajo molesto y engorroso. Es preferible obtener la ***función derivada de $f(x)$***, es decir ***$f'(x)$***, que nos permita obtener fácilmente el valor de la derivada de esa función en un punto "cualquiera" simplemente sustituyendo.

Ejemplo: Halla la función derivada de $f(x) = x^2 + 3x$ y úsala para calcular de nuevo $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(3)$.

También se pueden calcular las ***derivadas sucesivas*** de una función:
Si derivamos dos veces la función $f(x)$ (es decir, hacemos la derivada de la función derivada $f'(x)$) obtenemos la ***derivada segunda*** $f''(x)$; si derivamos tres veces obtenemos la ***derivada tercera*** $f'''(x)$ y así sucesivamente (también se escribe $y', y'', y'''...$).

Dicho de un modo más formal:
Si f es una función derivable en todos los puntos de un intervalo abierto (a,b), entonces la función:

$$\begin{aligned} f' : (a,b) &\to \Re \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$ se llama ***función derivada*** de f.

Si a su vez f' es derivable en (a,b) obtenemos su derivada $(f')' = f''$:

$$\begin{aligned} f'' : (a,b) &\to \Re \\ x &\mapsto f''(x) \end{aligned}$$ que se llama ***función derivada segunda*** de f.

Análogamente se pueden definir $f''', f^{iv)}, f^{v)}...$

Sin embargo, para derivar funciones **NO es necesario hacerlo resolviendo límites** como en el ejemplo anterior.
Existen **sencillas reglas prácticas,** con las que se pueden hallar fácilmente las derivadas de las funciones elementales.

Veamos cuales son esas reglas.

3. REGLAS DE DERIVACIÓN

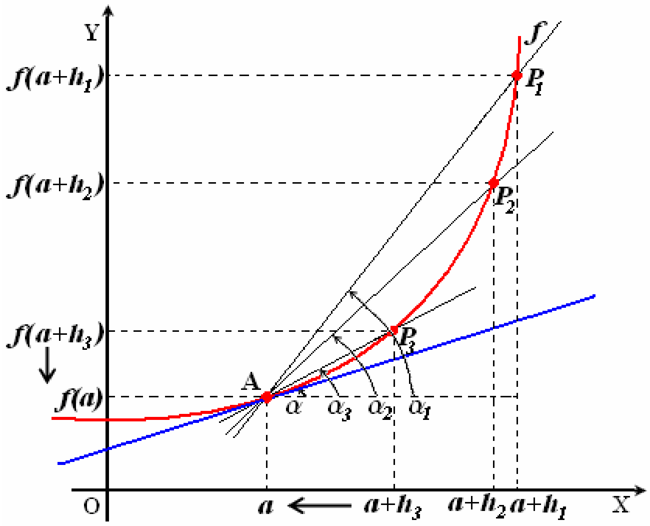
REGLAS DE DERIVACIÓN		
Suma y resta	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
Producto y cociente	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Producto por un número	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	
Composición de funciones	$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$ *Regla de la cadena*	

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES			
Funciones simples		**Funciones compuestas**	
$f(x)=k$	$f'(x)=0$		
$f(x)=x$	$f'(x)=1$		
$f(x)=k\cdot x$	$f'(x)=k$	$g=k\cdot f$	$g'=k\cdot f'$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$g=f^n$	$g'=n\cdot f^{n-1}\cdot f'$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$g=\sqrt{f}$	$g'=\dfrac{1}{2\sqrt{f}}\cdot f'$
$f(x)=\sqrt[n]{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$g=\sqrt[n]{f}$	$g'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{f^{n-1}}}.f'$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$g(x)=\ln f$	$g'(x)=\dfrac{f'}{f}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$	$g(x)=\log_a f$	$g'=\dfrac{f'}{f\cdot\ln a}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$g(x)=e^f$	$g'(x)=e^f\cdot f'$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot\ln a$	$g(x)=a^f$	$g'=a^f\cdot f'\cdot\ln a$
$f(x)=sen\,x$	$f'(x)=\cos x$	$g(x)=sen\,f$	$g'=\cos(f)\cdot f'$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-sen\,x$	$g(x)=\cos f$	$g'=-sen\,(f)\cdot f'$
$f(x)=tg\,x$	$f'(x)=1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$	$g(x)=tg\,f$	$g'=(1+tg^2 f)\cdot f'=\dfrac{f'}{\cos^2 f}=\sec^2(f)\cdot f'$
$f(x)=\cot g\,x$	$f'(x)=\dfrac{-1}{sen^2x}=-\cos ec^2\,x$	$g=\cot g\,f$	$g'=\dfrac{-f'}{sen^2 f}=-\cos ec^2(f)\cdot f'$
$f(x)=\sec x$	$f'(x)=tg\,x\cdot\sec x$	$g=\sec f$	$g'=tg\,f\cdot\sec(f)\cdot f'$
$f(x)=\cos ec\,x$	$f'(x)=-\cot g\,x\cdot\cos ec\,x$	$g=\cos ec\,f$	$g'=-\cot g\,f\cdot\cos ec\,(f)\cdot f'$
$f(x)=arcsen\,x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g=arcsen\,f$	$g'(x)=\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$g(x)=\arccos f$	$g'(x)=\dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$f(x)=arctg\,x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$g(x)=arctg\,f$	$g'(x)=\dfrac{f'}{1+f^2}$
$f(x)=arc\cot g\,x$	$f'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$	$g=arc\cot g\,f$	$g'=\dfrac{-f'}{1+f^2}$

4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

¿Qué ha ocurrido en la gráfica de $y = f(x)$ al tomar este límite "en la tasa de variación media"?

Todas estas rectas son *secantes* a la función con un punto común $A(a, f(a))$.



$$m_{AP_1} = tg\,\alpha_1 = TVM[a, a+h_1] = \frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1}$$

$$m_{AP_2} = tg\,\alpha_2 = TVM[a, a+h_2] = \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}$$

$$m_{AP_3} = tg\,\alpha_3 = TVM[a, a+h_3] = \frac{f(a+h_3) - f(a)}{h_3}$$

Si $h_i \to 0$ entonces $P_i \to A$, con lo cual la recta tangente a f en $A(a, f(a))$ se obtiene como límite de las rectas secantes.

Pero además, la pendiente m de la recta tangente a la función f en $A(a, f(a))$ es:

$$m = tg\;\alpha = \underset{\alpha_i \to \alpha}{lím}\; tg(\alpha_i) = \underset{h \to 0}{lím} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a), \text{ es decir:}$$

$$\boxed{m = f'(a)}$$

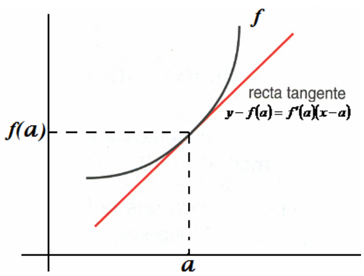
El resultado anterior $(que\ m = f'(a))$ se conoce como ***Interpretación geométrica de la derivada*** y nos dice que:

$$\boxed{\textbf{\textit{Derivada de una funcion } } f \textbf{\textit{ en }} a = \begin{cases} \textbf{\textit{Pendiente de la recta tangente a la gráfica}} \\ \textbf{\textit{de la función }} f \textbf{\textit{ en el punto }} A(a, f(a)) \end{cases}}$$

5. RECTAS TANGENTE Y NORMAL A UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

5.1. RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN $y = f(x)$ EN UN PUNTO $A(a, f(a))$

La ecuación de la recta tangente en su forma punto pendiente es $y - f(a) = m(x - a)$.



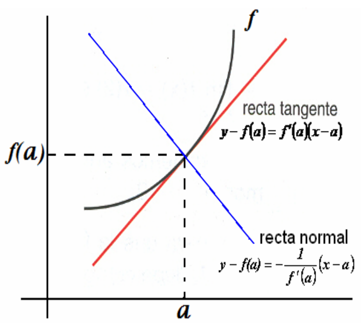
Pero $m = f'(a)$ (Por la interpretación geométrica de la derivada).

Por tanto:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)} \leftarrow \begin{cases} \textit{Ecuación de la recta tangente} \\ \textit{a la gráfica de } f \textit{ en el punto} \\ A(a, f(a)) \end{cases}$$

5.2. RECTA NORMAL A UNA FUNCIÓN $y = f(x)$ EN UN PUNTO $A(a, f(a))$

La ecuación de la recta normal en su forma punto pendiente es $y - f(a) = m'(x - a)$.



Las rectas tangente y normal son perpendiculares entre sí.
Condición de perpendicularidad:

$$m \cdot m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(a)}$$

Por tanto:

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)} \leftarrow \begin{cases} \textit{Ecuación de la recta normal} \\ \textit{a la gráfica de } f \textit{ en el punto} \\ A(a, f(a)) \end{cases}$$

Ejemplo 1: Calcula la función derivada de $f(x)=x^3-2x^2+3$ y halla:

a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas $-1, 1$ y 3.

b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

Ejemplo 2: Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)=x^2-5x$ en el punto de abscisa $x=-1$.

6. DERIVADAS LATERALES

A los siguientes límites, si existen y son finitos, se les llama:

$$f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\rightarrow \text{Derivada } \textbf{\textit{por la derecha}} \text{ de } f \text{ en } a.$$

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\rightarrow \text{Derivada } \textbf{\textit{por la izquierda}} \text{ de } f \text{ en } a.$$

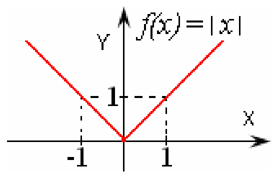
Ambos límites reciben el nombre de ***derivadas laterales*** de la función f en a.

Propiedad:

$$f \textit{ es derivable en } a \Leftrightarrow \textit{Existen } \begin{cases} f'(a^+) \\ f'(a^-) \end{cases}, \textit{ son finitos y } f'(a^+)=f'(a^-)$$

En cuyo caso, $f'(a)=f'(a^+)=f'(a^-)$

Ejemplo: Comprueba que la función valor absoluto $f(x)=|x|$, que es continua en $x=0$, no es derivable en $x=0$. Represéntala.



Solución: $f(x)=|x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$

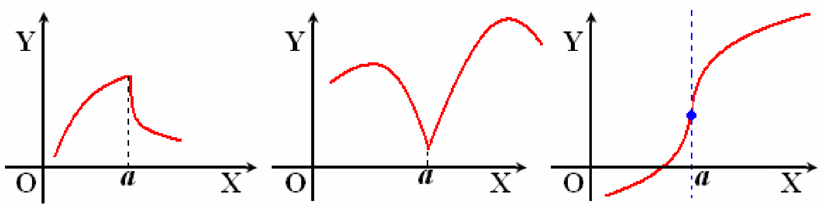
$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h}=-1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)$$

Por tanto, la función **no** es derivable en $x=0$.

7. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si observas el ejemplo anterior está claro que ***"Una función continua en a NO tiene por qué ser derivable en a" (<u>podrá serlo o no</u>).***

Si ***f es continua en a pero no derivable en a***, tendremos puntos "angulosos" (con pico) como en las dos primeras figuras, o puntos de tangente vertical como en la tercera:



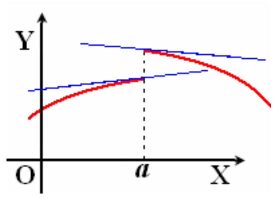
Funciones ***continuas*** *en* ***<u>a</u>*** *pero* ***no derivables*** *en* ***<u>a</u>***

Sin embargo:

Propiedad:
Si f es derivable en a $\Rightarrow$ *f es continua en a*

Por tanto:

Si f ***NO*** *es continua en a* $\Rightarrow$ ***NO*** *puede ser derivable en a*



Función ***no continua*** *en* ***<u>a</u>*** *y, por tanto,* ***no derivable*** *en* ***<u>a</u>***

Una función derivable tendrá una gráfica ***"suave"*** *sin* ***"puntos angulosos"***.

Ejercicios:

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=x^5+x^4-3x^2+1$ $b)\ f(x)=3x+5$ $c)\ f(x)=x+\sqrt{x}$

$d)\ f(x)=\dfrac{1}{x}+x^3$ $e)\ f(x)=\dfrac{4}{3x}$ $f)\ f(x)=x^5+5^x$

$g)\ f(x)=2\sqrt{x}+6+\dfrac{5}{x}$ $h)\ f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $i)\ f(x)=4x^2(1+x)^5$

$j)\ f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ $k)\ f(x)=-\dfrac{2}{3}x^4+3x^2-7$ $l)\ f(x)=x^e+e^x$

$m)\ f(x)=\dfrac{sen\,x}{x}$ $n)\ f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $ñ)\ f(x)=\ln x+\log_3 x$

$o)\ f(x)=sen\,x+\cos x$ $p)\ f(x)=\cos x+tg\,x$ $q)\ f(x)=x\cdot sen\,x$

$r)\ f(x)=sen\,x\cdot\cos x$ $s)\ f(x)=\dfrac{3x^2+5}{x+1}$ $t)\ f(x)=(1-3x)\cdot tg\,x$ $u)\ f(x)=\dfrac{sen\,x+x}{\sqrt{x}}$

2. Utiliza la regla de la cadena para hallar la derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=(x^2+x+1)^6$ $b)\ f(x)=(3-x)^3$ $c)\ f(x)=(x^2-1)^3$

$d)\ f(x)=(2x-3)^3(2x+4)$ $e)\ f(x)=\sqrt{2x+3}$ $f)\ f(x)=3\cos 5x$

$g)\ f(x)=\ln(4x^3-7x^2-2x+1)$ $h)\ f(x)=\ln(sen\,x)$ $i)\ f(x)=\sqrt{sen\,x}$

$j)\ f(x)=\cos^2 x$ $k)\ f(x)=e^{8x^2+5}$ $l)\ f(x)=(2^x+x^3)\cdot e^{7x-2}$

$m)\ f(x)=sen(\cos x)$ $n)\ f(x)=\log_5(1-3x)$ $ñ)\ f(x)=tg\sqrt{2x}$

$o)\ f(x)=4^{3\cos 2x}$ $p)\ f(x)=sen\,2x\cdot tg\,3x$ $q)\ f(x)=sen^2x+\cos^2 x$

3. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x)=x^2-2x+1$ en $x=2$.

b) $f(x)=\ln x$ en $x=1$.

c) $f(x)=\ln x$ en $x=e$.

4. Estudie la continuidad y derivabilidad de las funciones:

$a)\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & si\ x<-1 \\ 2x+2 & si\ -1\le x\le 2 \\ -x^2+8x & si\ x>2 \end{cases}$. $b)\ f(x)=\begin{cases} -2 & si\ x\le -2 \\ x^2+1 & si\ x>-2 \end{cases}$.

5. Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & si\ \ 0\le x<2 \\ 2x+a & si\ \ 2\le x\le 4 \\ -x^2+10x+b & si\ \ x>4 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que f sea continua en su dominio.

b) Estudia la derivabilidad de f para esos valores de a y b.

6. Obtén los valores de a y b sabiendo que es derivable la función: $f(x)=\begin{cases} ax+3 & si\ x\le 1 \\ 2x^2-b & si\ x>1 \end{cases}$.