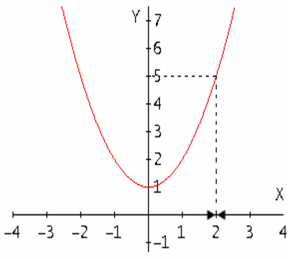
UNIDAD 5 LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO



Fíjate en el comportamiento de la función $f(x)=x^2+1$ cuando x toma valores cercanos a 2.

Si x se aproxima a 2, la función toma valores cercanos a 5.
Se escribe:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=5$$

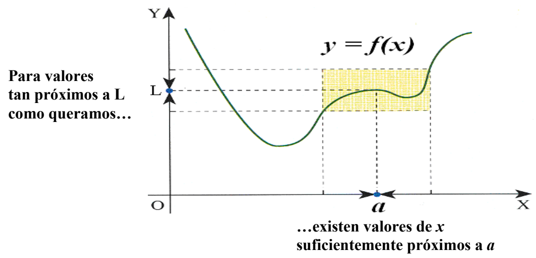
y decimos que 5 es el límite cuando x tiende a 2 de $f(x)=x^2+1$.

Se dice que L ***es el límite de una función*** f ***cuando*** x ***tiende a*** a $(x\to a)$, si al acercarse x cada vez más a a (pero x distinto de a), la diferencia $|f(x)-L|$ se hace tan "pequeña" como se quiera (es decir, $f(x)$ se aproxima a L tanto como se quiera).
Se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

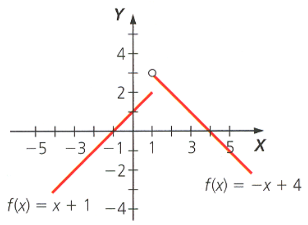
Si una función tiene límite en un punto a, este límite ***es único***.

Gráficamente: si x se aproxima a $a \Rightarrow f(x)$ se aproxima a L:



2. LÍMITES LATERALES

El comportamiento de una función cuando x se aproxima a un valor a, NO siempre coincide si nos acercamos con valores menores que a (izquierda de a), o con valores mayores que a (derecha de a).



Si x se aproxima a 1 "por la izquierda", $f(x)$ se aproxima a 2.
Se escribe: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$

Si x se aproxima a 1 "por la derecha", $f(x)$ se aproxima a 3.
Se escribe: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$

Por tanto:

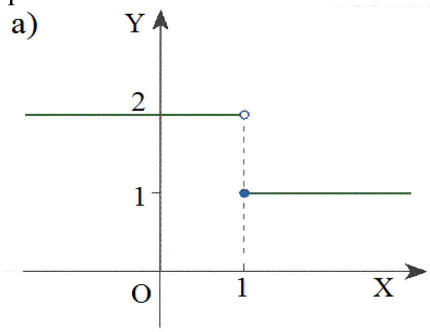
- Si x se aproxima a a con valores menores que a, obtenemos el ***límite lateral por la izquierda*** de f en a.
- Si x se aproxima a a con valores mayores que a, obtenemos el ***límite lateral por la derecha*** de f en a.

Estos límites reciben el nombre de ***límites laterales*** de f en a.

Propiedad: Una función tiene límite en un punto si existen los límites laterales en dicho punto y además coinciden, y recíprocamente.
En caso contrario, NO existe el límite en ese punto.
Propiedad: El límite, si existe, es único.

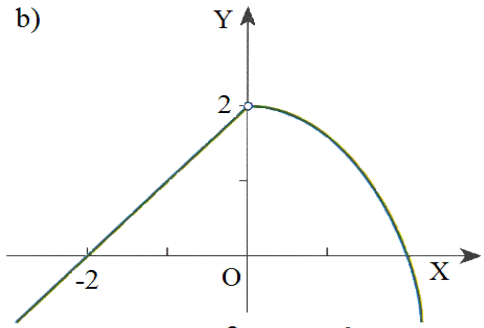
Ejemplo 1: Observa las siguientes gráficas y determina el límite de las funciones en los puntos que se indican:

a)



en $x = 0$ y $x = 1$

b)



en $x = -2$ y $x = 0$

Solución:

$a)$ $En\ x = 0;\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

$$En\ x = 1;\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$$

$b)$ $En\ x = -2;\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

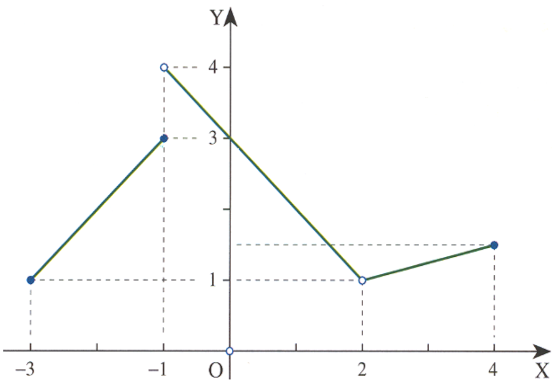
$$En\ x = 0;\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$$

Fíjate que en el apartado b) la función NO está definida en $x = 0$ pero esto no impide la existencia del límite en $x = 0$.

Ejemplo 2: Representa la función: $f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x \in [-3,-1] \\ 3-x & si \quad x \in (-1,2) \\ \dfrac{x+2}{4} & si \quad x \in (2,4] \end{cases}$

y determina su límite en $x = -1$, $x = 2$, $x = -3$ y $x = 4$.

Solución:



$$En\ x = -1;\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x)$$

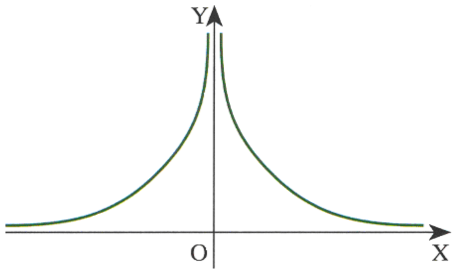
$$En\ x = 2;\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$$

$En\ x = -3;$ Sólo existe $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 1$ (No es posible "acercarse a -3 por su izquierda").

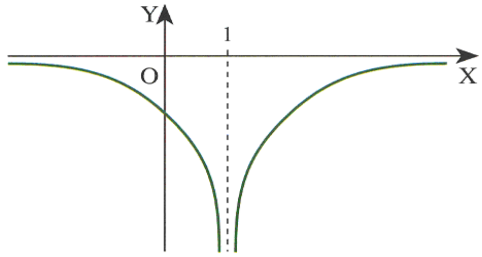
$En\ x = 4;$ Sólo existe $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \frac{3}{2}$ (No es posible "acercarse a 4 por su derecha").

3. LÍMITES INFINITOS

Observa las siguientes funciones:



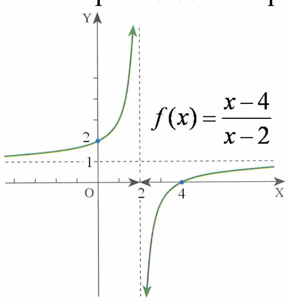
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$$



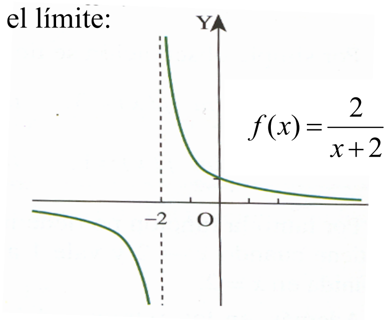
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$$

- Se dice que una función f ***tiene límite*** $+\infty$ ***cuando*** x ***tiende a*** a, si al aproximarse x a a los valores de $f(x)$ se hacen tan "grandes" como se quiera (mayores que un cierto número real k prefijado). Se escribe: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$
- Se dice que una función f ***tiene límite*** $-\infty$ ***cuando*** x ***tiende a*** a, si al aproximarse x a a los valores de $f(x)$ se hacen tan "pequeños" como se quiera (menores que un cierto número real k prefijado). Se escribe: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

Observa: También puede ocurrir que NO exista el límite:



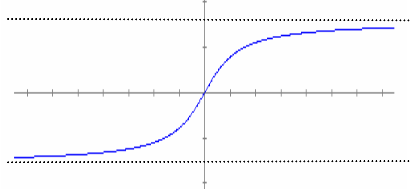
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$$

4. LÍMITES EN EL INFINITO

Observa la gráfica de la siguiente función:

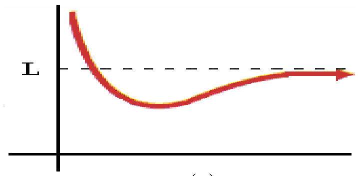


$$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\frac{3}{2}=1.5$$

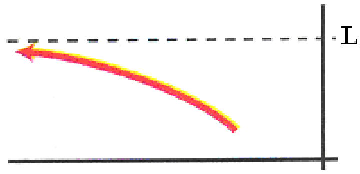
$$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\frac{3}{2}=-1.5$$

- Se dice que L ***es el límite de una función*** f ***cuando*** x ***tiende hacia más infinito*** $(x\to +\infty)$, si $f(x)$ se aproxima a L tanto como se quiera cuando x toma valores suficientemente "grandes" (es decir, la diferencia $|f(x)-L|$ se hace tan "pequeña" como se quiera si x toma valores mayores que un cierto número real k prefijado). Se escribe: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=L$

- Se dice que L ***es el límite de una función*** f ***cuando*** x ***tiende hacia menos infinito*** $(x \to -\infty)$, si $f(x)$ se aproxima a L tanto como se quiera cuando x toma valores suficientemente "pequeños" (es decir, la diferencia $|f(x)-L|$ se hace tan "pequeña" como se quiera si x toma valores menores que un cierto número real k prefijado). Se escribe: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$

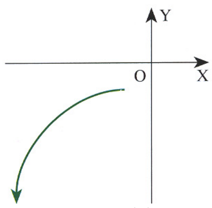


$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$

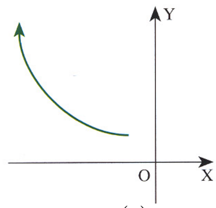


$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$

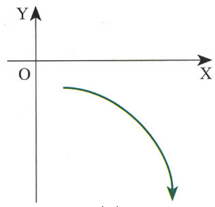
También puede suceder que si $x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to +\infty$ o bien $f(x) \to -\infty$, como puedes observar en las siguientes figuras:



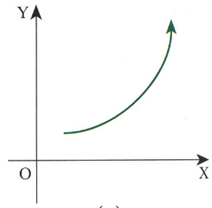
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

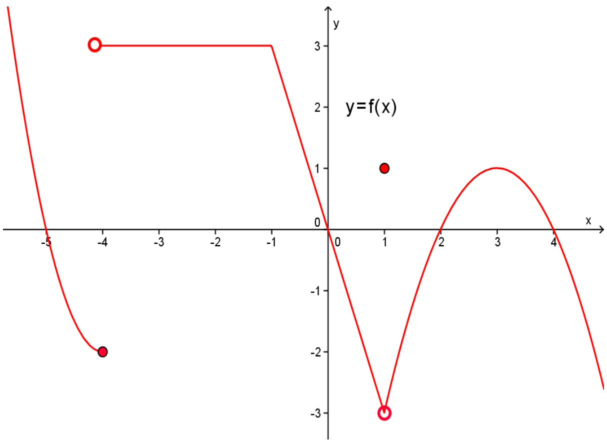


$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Igualmente puede ocurrir que no exista el límite como ocurre con $f(x) = senx$. ¿Por qué?

Ejemplo: *Fíjate en las gráficas y en el cálculo de los siguientes límites:*

a)



$Dom(f) = \Re \qquad \mathrm{Re}c(f) = \Re$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

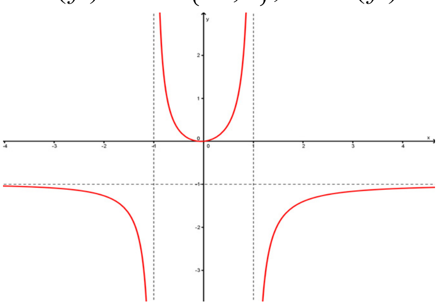
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = -2 \\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -4} f(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -3$

Observa que, sin embargo, $f(1) = 1$

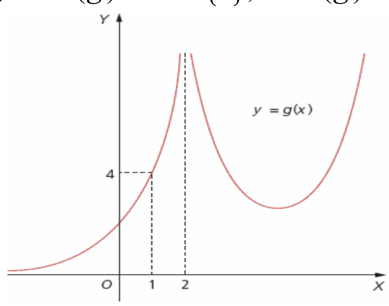
b) $Dom(f) = \Re - \{-1, 1\}$; $\mathrm{Re}c(f) = \Re - [-1, 0)$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$

$\nexists \lim\limits_{x\to -1} f(x) \qquad \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) $Dom(g) = \Re - \{2\}$; $\mathrm{Re}c(g) = (0, +\infty)$



$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 4 \qquad \lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$

5. CÁLCULO DE LÍMITES

El cálculo de un límite a partir de la gráfica de una función es una tarea fácil. Basta con observar con atención dicha gráfica. Sin embargo no siempre se dispondrá de ella por lo que habrá que recurrir a su expresión algebraica. No obstante, el cálculo analítico del límite de una función puede ser fácil de obtener, o bien dar lugar a una indeterminación que se debe resolver del modo adecuado.

Propiedades:

Si $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} g(x)=M$

Entonces:

$a)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} [f(x)\pm g(x)]=L\pm M$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} f(x)\cdot g(x)=L\cdot M$

$c)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}\ (Si\ M\neq 0)$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} f(x)^{g(x)}=L^M$

NOTA: Si L y/o M son límites infinitos ó M=0, pueden aparecer indeterminaciones en las expresiones anteriores. Se resolverán de un modo específico.

Casos de indeterminación:

$a)\left[\frac{k}{0}\right]\quad b)\left[\frac{0}{0}\right]\quad c)\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\quad d)[\infty-\infty]\quad e)[0\cdot\infty]\quad f)\left[1^\infty\right]\quad g)\left[\infty^0\right]\quad h)\left[0^0\right]$

5.1. Cálculo de límites cuando $x\to a$

a) Casos inmediatos

Se obtiene el límite calculando $f(a)$, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to3} x^2=3^2=9$ $\qquad b)\lim\limits_{x\to2}\frac{5x}{x-5}=-\frac{10}{3}$ $\qquad c)\lim\limits_{x\to7}\sqrt{3x+4}=\sqrt{3\cdot7+4}=\sqrt{25}=5$

$d)\lim\limits_{x\to0}(5+2x)^x=5^0=1$ $\qquad e)\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{x}=\nexists$ $\qquad f)\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cos x+e^{2x}}{\ln(x+1)+x^3+1}=\frac{0^2\cdot\cos0+e^{2\cdot0}}{\ln1+0^3+1}=1$

$g)\lim\limits_{x\to2}(-2x^3+2x^2-1)=-2\cdot2^3+2\cdot2^2-1=-9$ $\qquad h)\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$ $\qquad i)\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{x}=\nexists$ $\qquad j)\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=\nexists$

$k)\lim\limits_{x\to12}\sqrt{x-3}=3$ $\qquad l)\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{x-2}=\nexists$ $\qquad m)\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{x-2}=0$ $\qquad n)\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x-2}=\nexists$

b) Cociente de polinomios

Objetivo: calcular $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas.

$\boxed{\textbf{Caso 1º}}$ $\boldsymbol{Q(a)\neq 0}$

Sigue siendo un caso inmediato.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to1}\frac{x+8}{x^2-4}=\frac{9}{-3}=-3$ $\qquad b)\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{0}{2}=0$

$\boxed{\textbf{Caso 2º}}$ $\boldsymbol{P(a)\neq 0}$ y $\boldsymbol{Q(a)=0}$. ***Indeterminación*** $\frac{k}{0}$

Se resuelve obteniendo el valor de los límites laterales.

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\left(\dfrac{6}{0}\right)$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}$$

$b)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{(x-3)^2}=\left(\dfrac{6}{0}\right)$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{(x-3)^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{(x-3)^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{(x-3)^2}=+\infty$$

$\boxed{\text{Caso 3º}}$ $\boldsymbol{P(a)=0}$ y $\boldsymbol{Q(a)=0}$. ***Indeterminación*** $\dfrac{0}{0}$

Se resuelve factorizando el numerador y el denominador.

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x+5}=\dfrac{-1}{7}$$

$b)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-2}=3$$

$c)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}=\left(\dfrac{2}{0}\right)$$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$$

c) Cálculo de límites de funciones definidas a trozos

Ejemplo: Hallar el límite de la función $f(x)=\begin{cases}2x-5 & si\ x<3\\ -x+7 & si\ 3\le x<6\\ x/6 & si\ x\ge 6\end{cases}$ en 1, 3 y 6.

$\boxed{\text{En } x=1}$

$$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x-5)=-3$$

$\boxed{\text{En } x=3}$ Límites laterales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-5)=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(-x+7)=4\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$$

$\boxed{\text{En } x=6}$ Límites laterales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(-x+7)=1\\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{x}{6}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 6} f(x)=1$$

5.2. Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$

a) Casos inmediatos

En el caso de funciones polinómicas tendremos en cuenta el signo del coeficiente del término de mayor grado.

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to+\infty} (3x^2 - 7x) = +\infty$ $b)\ \lim_{x\to+\infty} (-4x^2 + 5x) = -\infty$ $c)\ \lim_{x\to+\infty} (5x^2 - 30x) = +\infty$

$d)\ \lim_{x\to+\infty} (x^3 - 5000x^2) = +\infty$ $e)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$ $f)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+7} = +\infty$

$g)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3-x} = \nexists$

b) Cociente de polinomios

Surge la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Se resuelve analizando los términos de mayor grado del numerador y del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} +\infty \ \text{ó} \ -\infty & si\ n > m,\ y\ \ \frac{a_n}{b_m} > 0,\ o\ \ bien,\ \frac{a_n}{b_m} < 0 \\ \frac{a_n}{b_m} & si\ \ n = m \\ 0 & si\ \ n < m \end{cases}$$

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2-7x+3} = +\infty$ $b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-7x}{-5x^2+3x-2} = -\infty$ $c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+5x^2+1}{6x^3+3x+1} = -\frac{1}{3}$

$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^7+3x+1}{2x^7+5} = 2$ $e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{5x^2+2} = 0$ $f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{3x^2+5x-2} = 0$

5.3. Cálculo de límites cuando $x \to -\infty$

Tendremos en cuenta que:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)}$$

y calcularemos el límite de la expresión resultante.

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 5x + 3) = \lim_{x\to+\infty} ((-x)^2 - 5(-x) + 3) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 + 5x + 3) = +\infty.$

$b)\ \lim_{x\to-\infty} (3x^3 + 2x - 1) = \lim_{x\to+\infty} (3(-x)^3 + 2(-x) - 1) = \lim_{x\to+\infty} (-3x^3 - 2x - 1) = -\infty.$

$c)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-7}{3x^2+2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(-x)-7}{3(-x)^2+2(-x)-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-7}{3x^2-2x-1} = 0.$

5.4. Límites de funciones irracionales. Indeterminación $\frac{0}{0}$ e $\infty - \infty$

Se resuelven multiplicando y dividiendo la función por la expresión radical conjugada.

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{4}.$$

$b) \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}.$$

$c) \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right) = (\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4-x^2+2}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}} = \frac{6}{+\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right) = 0.$$

$d) \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = (\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{Indet.}$$

Se divide por x el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \frac{1}{2}.$$

$e) \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{\left[(\sqrt{x+1})^2-2^2\right](\sqrt{x+6}+3)}{\left[(\sqrt{x+6})^2-3^2\right](\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+1-4)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6-9)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3} = \frac{3}{2}.$$

5.5. Indeterminación $0\cdot\infty$ y otros casos de $\infty-\infty$

Se opera previamente y pasamos a un caso de indeterminación conocida tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ ó $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Ejemplos:

$a) \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x+1}{x^2-3}\cdot\dfrac{x^2-4}{4x}\right) = (0\cdot\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{5x^3+x^2-20x-4}{4x^3-12x}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{5x+1}{x^2-3}\cdot\frac{x^2-4}{4x}\right) = \frac{5}{4}.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x^4-1}{x^2+5}\right)=(0\cdot\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^4-2}{x^3+5x}\right)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot\frac{x^4-1}{x^2+5}\right)=+\infty.$$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+4}{x-3}-\dfrac{4x+5}{2}\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(2x^2+4)-(4x+5)(x-3)}{2(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+8-4x^2+12x-5x+15}{2x-6}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+23}{2x-6}=\frac{7}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+4}{x-3}-\frac{4x+5}{2}\right)=\frac{7}{2}.$$

$d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+5x}{2x+5}-\dfrac{6x^2+9x}{4x-1}\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+5x)(4x-1)-(6x^2+9x)(2x+5)}{(2x+5)(4x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-31x^2-50x}{8x^2+18x-5}=-\frac{31}{8}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+5x}{2x+5}-\frac{6x^2+9x}{4x-1}\right)=-\frac{31}{8}.$$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}:\dfrac{x-1}{x^2+5}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Aunque no es una indeterminación del tipo que estamos estudiando, también se resuelve operando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+10}{x^2-x}\right)=2\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}:\frac{x-1}{x^2+5}\right)=2.$$

5.6. Indeterminación 1^∞

Para resolverla tendremos en cuenta que:

Si $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} g(x)=\infty$ (ya sea $+\infty$ o bien $-\infty$) entonces:

$$\lim_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=1^\infty$ Indeterminación.

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x-1)(x-3)}{x^2+2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}}=e^3\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=e^3.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{x-2}=1^\infty$ Indeterminación.

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\left(\frac{3x+1}{3x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{3x}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{x-2}=\sqrt[3]{e}.$$

$$c)\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=1^{\infty}\quad \text{Indeterminación.}$$

$$e^{\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{2x(x-2)}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}}=e^{\frac{-1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}=\frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}.$$

$$d)\lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}}=1^{\infty}\quad \text{Indeterminación.}$$

$$e^{\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 6}\frac{x^2-5x-6}{(x-4)(x-6)}}=e^{\frac{0}{0}}$$ De nuevo tenemos una indeterminación.

$$e^{\lim_{x\to 6}\frac{(x+1)(x-6)}{(x-4)(x-6)}}=e^{\lim_{x\to 6}\frac{x+1}{x-4}}=e^{\frac{7}{2}}=\sqrt{e^7}=e^3\sqrt{e}\Rightarrow \lim_{x\to 6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}}=e^3\sqrt{e}.$$

6. ASÍNTOTAS

Ramas infinitas: Tramos de la curva que se "alejan" indefinidamente del origen de coordenadas.
Asíntota: Recta a la que se "ciñe" (aproxima) una rama infinita (la distancia entre la recta y la curva tiende a cero).
Rama asintótica: Rama infinita que se "ciñe" a una asíntota.

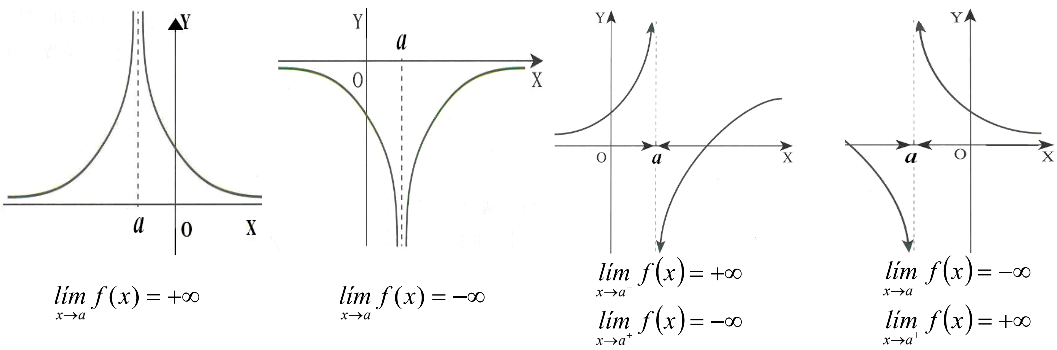
6.1. RAMAS INFINITAS EN $x=a$. ASÍNTOTAS VERTICALES

Si

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \text{ ó } -\infty \qquad \text{y/o} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \text{ ó } -\infty}$$

entonces la función tiene una rama infinita por la derecha o por la izquierda (o por las dos), y la recta $x=a$ es una ***asíntota vertical.***

- ***Situación de la curva respecto a la asíntota:***



Observación:

- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ racional, ***los candidatos a asíntotas verticales*** son los valores de x que anulan el denominador.
- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.

Ejemplo 1: Calcula las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

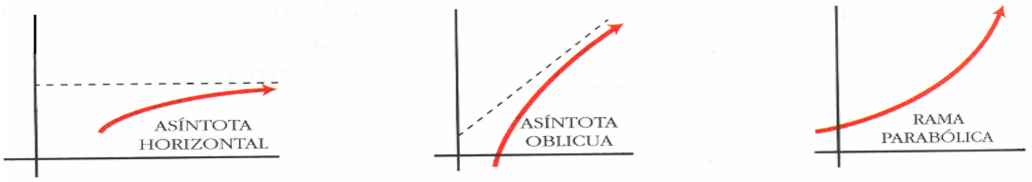
$$a)\ f(x)=\frac{5}{x-3} \quad b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-x-2} \quad c)\ f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2} \quad d)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$$

Ejemplo 2: ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la función $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-16}$?

(La Rioja. Junio 1998)

6.2. RAMAS INFINITAS CUANDO $x\to+\infty$ (ó $x\to-\infty$)

Se pueden presentar tres casos:



a) ASÍNTOTAS HORIZONTALES.

Si

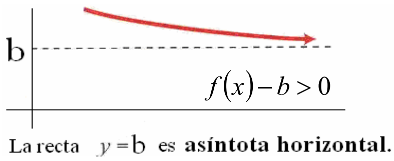
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad (b\in\Re)}$$

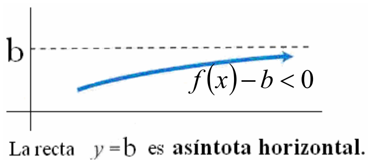
entonces la función f tiene una rama infinita cuando $x\to+\infty$ y la recta $\boldsymbol{y=b}$ es una ***asíntota horizontal*** en $+\infty$.

- ***Situación de la curva respecto de la asíntota:***

  Estudiamos el signo de $f(x)-b$ para <u>valores "grandes"</u> de x :

  - Si $f(x)-b>0 \Rightarrow$ curva por encima de la asíntota.
  - Si $f(x)-b<0 \Rightarrow$ curva por debajo de la asíntota.





Análogamente si $x\to-\infty$.

Observaciones:

- Una función tendrá, a lo sumo, dos asíntotas horizontales, una en $+\infty$ y otra en $-\infty$.
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es un cociente de polinomios, la función tendrá la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$. Será necesario que $Grado\,P(x)\le Grado\,Q(x)$.

Ejemplo: Calcula las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2-x} \quad b)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-2x+1} \quad c)\ f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-3}$$

b) ASÍNTOTAS OBLICUAS

Si

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0$$

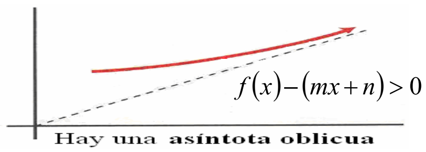
entonces la función f tiene una rama infinita cuando $x\to+\infty$ y la recta $\boldsymbol{y=mx+n}$ es una ***asíntota oblicua*** en $+\infty$.

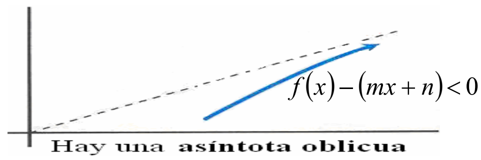
Para calcularla: $\boxed{m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \qquad n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]}$

- ***Situación de la curva respecto de la asíntota:***

  Estudiamos el signo de $f(x)-(mx+n)$ para <u>valores "grandes"</u> de x:

  - Si $f(x)-(mx+n)>0 \Rightarrow$ curva por encima de la asíntota.
  - Si $f(x)-(mx+n)<0 \Rightarrow$ curva por debajo de la asíntota.





Análogamente si $x\to-\infty$.

Observaciones:

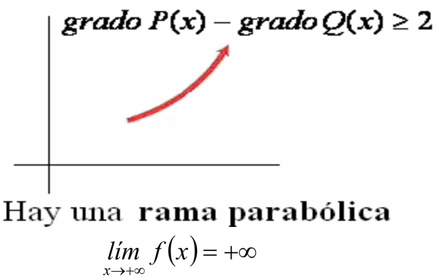
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es un cociente de polinomios, la función tendrá asíntota oblicua si $Grado\ P(x)-Grado\ Q(x)=1$. En este caso, la asíntota oblicua se podrá obtener como el cociente de la división de polinomios.
- Una función tendrá, a lo sumo, dos asíntotas oblicuas, una en $+\infty$ y otra en $-\infty$.
- Si hay asíntota horizontal $\Rightarrow$ No hay asíntota oblicua y viceversa.

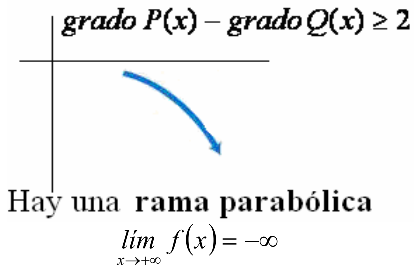
Ejemplo: Calcula las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{2x^2+5x+3}{x+4} \qquad\qquad b)\ f(x)=\frac{4x^3-3x^2+1}{2x^2-1}$$

c) RAMAS PARABÓLICAS (<u>en funciones racionales</u>)

Si $Grado\ P(x)-Grado\ Q(x)\geq 2$ entonces hay una rama parabólica "hacia arriba" o "hacia abajo" dependiendo de que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=+\infty$ ó $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=-\infty$ respectivamente.





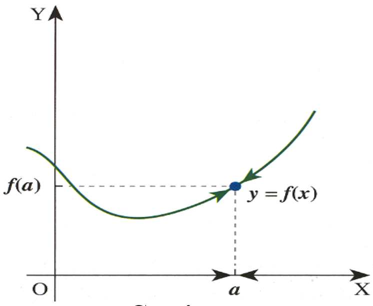
Análogamente si $x\to-\infty$.

Ejemplo: Estudia si las siguientes funciones tienen ramas parabólicas:

$$a)\ f(x)=\frac{x^3-5x^2}{-x+3} \qquad\qquad b)\ f(x)=\frac{x^5+3x^2+1}{x^2+3}$$

7. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

7.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO



Continua en *a*

Una función f ***es continua en*** a si $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$.

Esta definición implica que se cumplan ***tres*** condiciones:

1) Existe $f(a)$ (Es decir, $a \in Dom(f)$.)
2) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y <u>es finito.</u>
3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (Es decir, 1) y 2) coinciden).

Si no se cumple alguna de estas tres condiciones, diremos que la función es ***discontinua*** en a.

7.2. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

f es **continua en (a, b)** si lo es en todo punto de ese intervalo.
f es **continua en [a, b]** si es continua en (a, b) y, además, es continua por la derecha en *a* y por la izquierda en *b*.

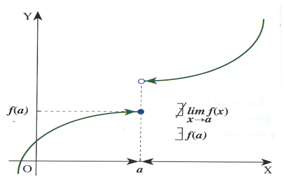
Nota:

f es ***continua por la derecha en*** a si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

f es ***continua por la izquierda en*** b si $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

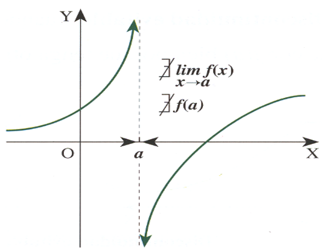
7.3. TIPOS DE DISCONTINUIDADES

a) Discontinuidad inevitable de salto finito: *Presenta un salto en ese punto.*
Existen los límites laterales y son finitos, pero distintos.



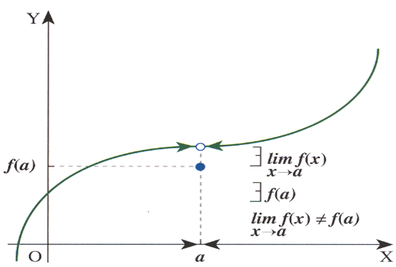
Discontinua en *a* (inevitable salto finito)

b) Discontinuidad inevitable de salto infinito: *Tiene ramas infinitas en ese punto*
Uno o los dos límites laterales son infinitos.

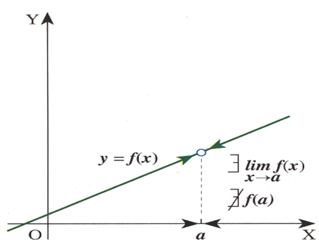


Discontinua en *a* (inevitable salto infinito)

c) Discontinuidad evitable: *Tiene ese punto desplazado o bien le falta ese punto.*
En este caso existe $\lim_{x\to a} f(x)$, pero no coincide con $f(a)$, o bien no existe $f(a)$.



Discontinua en *a* (evitable)



Discontinua en *a* (evitable)

Propiedad: Si f y g son funciones continuas en a, las siguientes funciones también son continuas en a:

$$a)\ f \pm g \qquad b)\ f \cdot g \qquad c)\ k \cdot g \quad k \in \Re \qquad d)\ f / g \quad si\ \ g(a) \neq 0 \qquad e)\ f \circ g$$

Las funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus compuestas, son continuas en su dominio de definición.

Ejemplo 1: Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 11 & si \quad x < -2 \\ x^2 + 1 & si \quad -2 \leq x \leq 2 \\ -2x + 3 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Representarla gráficamente.

Ejemplo 2: Determine el valor de a y b para que $f(x) = \begin{cases} -4x + a & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si \quad -2 < x < 1 \\ bx + 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ sea continua.

(Cataluña. Junio 2007)

Ejemplo 3: Halle el valor de k para que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & si \quad x \neq 2 \\ k & si \quad x = 2 \end{cases}$ sea continua en $x = 2$.

(La Rioja. Septiembre 2006)