

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

- a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.
- b) Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

4.a) Damos nomes aos sucesos:  $R = \text{"ter rosas"}$  e  $C = \text{"ter camelias"}$ .

Sabemos que  $P(C) = 0.4$ ,  $P(R) = 0.35$  e  $P(C \cap R) = 0.21$ . As probabilidades pedidas son, por orde, as seguintes:

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0.4 + 0.35 - 0.21 = 0.54$ .
- En virtude dunha das leis de De Morgan,  $\bar{C} \cap \bar{R} = \overline{C \cup R}$ . Consecuentemente,  $P(\bar{C} \cap \bar{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0.54 = 0.46$ .
- $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0.21}{0.35} = 0.6$ .
- $P(R|C) = \frac{P(C \cap R)}{P(C)} = \frac{0.21}{0.4} = 0.525$ .
- $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = P(R \cap \bar{C}) + P(C \cap \bar{R})$ , xa que os sucesos  $R \cap \bar{C}$  e  $C \cap \bar{R}$  son incompatibles. De  $P(R) = P(R \cap C) + P(R \cap \bar{C})$  dedúcese que  $P(R \cap \bar{C}) = 0.35 - 0.21 = 0.14$ , e de  $P(C) = P(C \cap R) + P(C \cap \bar{R})$  que  $P(C \cap \bar{R}) = 0.4 - 0.21 = 0.19$ . Por último,  $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = 0.14 + 0.19 = 0.33$ .

Alternativa para o cálculo de  $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R}))$  (ver debuxo):

$$P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = P(R \cup C) - P(R \cap C) = 0.54 - 0.21 = 0.33.$$



4.b)  $X = \text{"n.º de persoas nadas no mes de xaneiro, de entre as 50"}$ .

$X \rightarrow B\left(50, \frac{1}{12}\right)$ , é dicir,  $X$  segue unha distribución binomial de parámetros  $n = 50$  e  $p = \frac{1}{12} = 0.08\bar{3}$ ; logo  $q = 1 - p = \frac{11}{12} = 0.91\bar{6}$ . Pídesse  $P(X \geq 2)$ .

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$

Posto que  $P(X = 0) = \binom{50}{0} p^0 q^{50} = \left(\frac{11}{12}\right)^{50} \approx 0.0129$  e  $P(X = 1) = \binom{50}{1} p^1 q^{49} = 50 \frac{1}{12} \left(\frac{11}{12}\right)^{49} \approx 0.0586$ , téñense sucesivamente  $P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.0129 + 0.0586 = 0.0715$  e  $P(X \geq 2) \approx 1 - 0.0715 = 0.9285$ .

**Nota:** se se toma  $p = \frac{31}{365} \approx 0.0849$ , obtense  $P(X \geq 2) \approx 0.9333$ .

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Sexan  $A$  e  $B$  dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula  $P(A)$  se  $P(B) = 0.8$ ,  $P(A \cap B) = 0.2$  e  $P(A \cup B)$  é o triplo de  $P(A)$ .

b) Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media  $25^\circ\text{C}$  e desviación típica  $4^\circ\text{C}$ . Calcula a probabilidade de que a temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre  $21^\circ\text{C}$  e  $27.2^\circ\text{C}$ . En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

### Solución:

4.a) Temos  $3P(A) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , de onde en primeira instancia se obtén  $2P(A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.2 = 0.6$  e, en segunda,  $P(A) = 0.3$ .

4.b)  $X$  = "temperatura máxima dun día do mes de xullo".

$$X \rightarrow N(25,4) \Rightarrow Z = \frac{X - 25}{4} \rightarrow N(0,1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 27.2) &= P\left(\frac{21 - 25}{4} \leq Z \leq \frac{27.2 - 25}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0.55) \\ &= P(Z \leq 0.55) - P(Z < -1) = P(Z \leq 0.55) - P(Z > 1) \\ &= P(Z \leq 0.55) - \{1 - P(Z \leq 1)\} \approx 0.7088 - 1 + 0.8413 = 0.5501 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida. Espérase polo tanto que en  $0.5501 \times 31 \approx 17$  días do mes a temperatura máxima estea comprendida entre  $21^\circ\text{C}$  e  $27.2^\circ\text{C}$ .

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

- a) A probabilidade de que un mozo recorde regar a súa roseira durante unha certa semana é de  $\frac{2}{3}$ . Se se rega, a roseira sobrevive con probabilidade 0.7; se non, faino con probabilidade 0.2. Ao finalizar a semana, a roseira sobreviviu. Cal é a probabilidade de que o mozo non a regase?
- b) Unha fábrica produce pezas cuxo grosor segue unha distribución normal de media 8 cm e desviación típica 0.01 cm. Calcula a probabilidade de que unha peza teña un grosor comprendido entre 7.98 e 8.02 cm.

4.a) Damos nomes aos sucesos:  $R = \text{"o mozo rega"}$  e  $S = \text{"a roseira sobrevive"}$ .

Sabemos que  $P(R) = \frac{2}{3}$  (logo  $P(\bar{R}) = \frac{1}{3}$ ),  $P(S|R) = 0.7$  e  $P(S|\bar{R}) = 0.2$ .

Pídese  $P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)}$ .

- De  $0.7 = P(S|R) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{P(S \cap R)}{\frac{2}{3}}$ , dedúcese que  $P(S \cap R) = \frac{2}{3} \cdot 0.7 = \frac{7}{15} = 0.4\bar{6}$ .
- De  $0.2 = P(S|\bar{R}) = \frac{P(S \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(S \cap \bar{R})}{\frac{1}{3}}$ , dedúcese que  $P(S \cap \bar{R}) = \frac{1}{3} \cdot 0.2 = \frac{1}{15} = 0.0\bar{6}$ .

Polo tanto,  $P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \bar{R}) = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} = 0.5\bar{3}$  e, en consecuencia,

$$P(\bar{R}|S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

4.b)  $X = \text{"grosor das pezas"}$ .

$$X \rightarrow N(8, 0.01) \Rightarrow Z = \frac{X - 8}{0.01} \rightarrow N(0, 1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(7.98 \leq X \leq 8.02) &= P\left(\frac{7.98 - 8}{0.01} \leq Z \leq \frac{8.02 - 8}{0.01}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 2) - P(Z < -2) = P(Z \leq 2) - P(Z > 2) \\ &= P(Z \leq 2) - \{1 - P(Z \leq 2)\} = 2P(Z \leq 2) - 1 \approx 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

- a) Sexan  $A$  e  $B$  dous sucesos dun mesmo espazo mostral tales que  $P(A) = 0.2$ ,  $P(B) = 0.4$  e  $P(A \cup B) = 0.5$ . Calcula  $P(\bar{A})$ ,  $P(\bar{B})$ ,  $P(A \cap B)$  e  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ . Razona se  $A$  e  $B$  son ou non sucesos independentes.
- b) A probabilidade de que un determinado xogador de fútbol marque gol desde o punto de penalti é  $p = 0.7$ . Se lanza 5 penaltis, calcula as seguintes tres probabilidades: de que non marque ningún gol; de que marque polo menos 2 goles; e de que marque 5 goles. Se lanza 2100 penaltis, calcula a probabilidade de que marque polo menos 1450 goles. Estase a asumir que os lanzamentos son sucesos independentes.

4.a) Temos

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$ .
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$ .
- Da igualdade  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  dedúcese que  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$ .
- Segundo unha das leis de De Morgan,  $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ , de onde  $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$ .

Por último, os sucesos  $A$  e  $B$  non son independentes, porque  $P(A \cap B) = 0.1 \neq 0.08 = 0.2 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$ .

4.b) Se  $X =$  "n.º de goles en 5 lanzamentos de penalti", entón  $X \rightarrow B(5,0.7)$ , distribución binomial de parámetros  $n = 5$  e  $p = 0.7$ . Tense entón  $q = 1 - p = 0.3$  e, polo tanto,

- $P(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 q^5 = 0.3^5 = 2.43 \times 10^{-3}$ .
- Como  $P(X = 1) = \binom{5}{1} p^1 q^4 = 5 \cdot 0.7 \cdot 0.3^4 = 0.02835$ , tense que  $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.00243 + 0.02835\} = 1 - 0.03078 = 0.96922$ .
- $P(X = 5) = \binom{5}{5} p^5 q^0 = 0.7^5 = 0.16807$ .

Supoñamos agora que  $X =$  "n.º de goles en 2100 lanzamentos de penalti", co cal  $X \rightarrow B(2100,0.7)$ . Os valores de  $n$ ,  $p$  e  $q$  neste caso son  $n = 2100$ ,  $p = 0.7$  e  $q = 0.3$ . A probabilidade  $P(X \geq 1450)$  é difícil de calcular directamente. É posible, non obstante, razoar do xeito seguinte: ao ser  $np = 1470 > 5$  e  $nq = 630 > 5$ , a variable  $X$  pode ser aproximada por unha normal  $\tilde{X}$  de media  $np$  e desviación típica  $\sqrt{npq} = \sqrt{441} = 21$ .

$$\tilde{X} \rightarrow N(1470,21) \Rightarrow Z = \frac{\tilde{X} - 1470}{21} \rightarrow N(0,1),$$

de onde

corrección de  $\frac{1}{2}$  punto

$$P(X \geq 1450) \approx P(\tilde{X} > 1449.5) = P\left(Z > \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P\left(Z > \frac{-20.5}{21}\right) \approx P(Z > -0.98) \\ = P(Z < 0.98) \approx 0.8365.$$