UNIDAD 7 FUNCIONES ELEMENTALES

1. FUNCIONES POLINÓMICAS

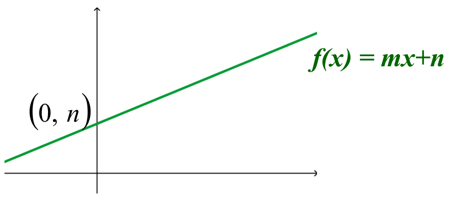
1.1. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

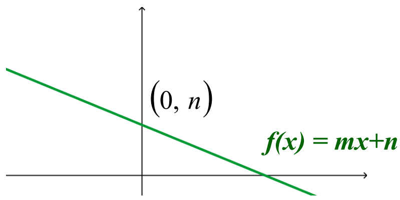
Son de la forma:

$$f(x) = mx + n \qquad m \to \text{Pendiente.}$$
$$n \to \text{Ordenada en el origen.}$$

Gráfica: Recta que pasa por el punto $(0, n)$.

Si $m > 0 \Rightarrow$ Estrictamente creciente — Si $m < 0 \Rightarrow$ Estrictamente decreciente



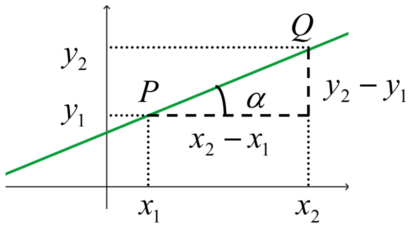


En ambos casos $Dom(f) = \Re$, $Rec(f) = \Re$.

No está acotada ni superior ni inferiormente (siempre que $m \neq 0$).

Pendiente *m* $\to$ Indica el aumento o disminución de y cuando x aumenta una unidad.

Recuerda que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ siendo $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ puntos de la recta.



Además, $m = tg\,\alpha$

También, si m es conocida y $P(x_1, y_1)$ es un punto de la recta, podemos obtener la ecuación de la recta en forma *punto – pendiente*:

$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad \text{(o bien } f(x) = m(x - x_1) + y_1\text{)}$$

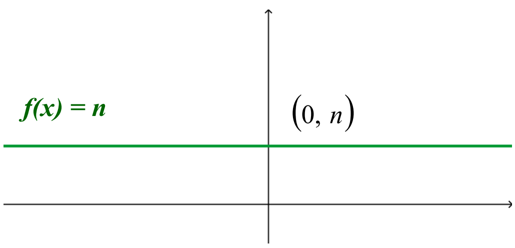
Dos funciones polinómicas de primer grado tienen gráficas paralelas si tienen la misma pendiente (si además coincide la ordenada en el origen, serán coincidentes).

Recuerda:

Si $n = 0 \Rightarrow f(x) = mx$ **Función lineal** o de proporcionalidad directa.
Su gráfica es una recta que pasa por $(0,0)$.

Si $m \neq 0;\ n \neq 0 \Rightarrow f(x) = mx + n$ **Función afín**.

Si $m = 0 \Rightarrow f(x) = n$ **Función constante** (en este caso no es polinómica de primer grado).
Su gráfica es una recta paralela al eje de abscisas que pasa por $(0, n)$.



En este caso:
$Dom(f) = \Re$
$Rec(f) = \{n\}$.

Ejercicio 1: *Halla la ecuación de la recta cuya pendiente es* $-\frac{1}{3}$ *y que pasa por el punto* $P(-1,2)$. *Calcula la ecuación de una recta paralela a la anterior. Representa ambas rectas.*

Ejercicio 2: *Escribe la ecuación de la recta que:*

a) Pasa por $P(1,2)$ *y* $Q(2,-1)$.

b) Es paralela a $y=3x+1$ *y pasa por* $P(-2,-3)$.

Ejercicio 3: *Un transportista de mercancías de gran tonelaje cobra 250 € por usar el camión más 20 € por tonelada transportada. ¿Cuánto ha transportado por un viaje en el que ha cobrado 594 €?*

1.2. FUNCIONES CUADRÁTICAS O POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

Son de la forma:

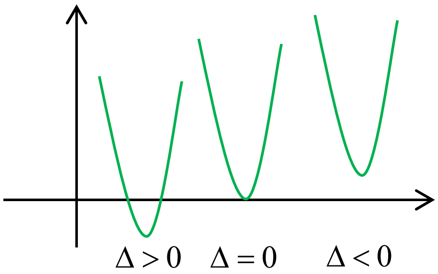
$$f(x)=ax^2+bx+c \quad \text{con} \quad a,b,c\in\Re \quad a\neq 0 \quad Dom(f)=\Re$$

Gráfica: Parábola.

Mayor valor de $|a| \rightarrow$ Más "estilizada" (cerrada) es la parábola.

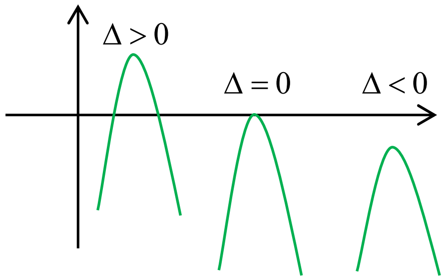
Recuerda:

Si $a>0 \Rightarrow Convexa\ (\cup)$



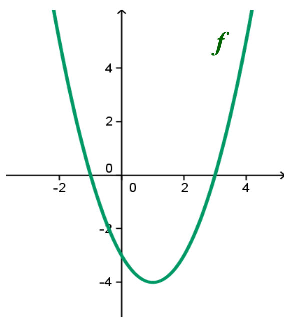
Mínimo absoluto en el vértice
No acotada superiormente
Sí acotada inferiormente

Si $a<0 \Rightarrow Cóncava\ (\cap)$



Máximo absoluto en el vértice
No acotada inferiormente
Sí acotada superiormente

Ejemplo: *Representa la función* $f(x)=x^2-2x-3$. *Estudia su dominio, recorrido, monotonía, extremos y acotación.*



$Rec(f)=[-4,+\infty)$

1º) Curvatura: $a=1>0 \Rightarrow Convexa\ (\cup)$ $\qquad Dom(f)=\Re$

2º) Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje OX: } y=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow P(3,0) \\ x=-1 \Rightarrow Q(-1,0) \end{cases}$$

$$\text{Eje OY: } x=0 \Rightarrow f(0)=-3 \Rightarrow R(0,-3)$$

3º) Vértice: (Mínimo absoluto y relativo por ser convexa)

$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1; \quad y_v=f\left(\frac{-b}{2a}\right)=f(1)=-4 \Rightarrow \quad V(1,-4)$$

Estr. decreciente en $(-\infty,1)$; Estr. creciente en $(1,+\infty)$.

Acotada inferiormente (*N=-4*), pero no superiormente.

Ejercicio 1: *La altura, en metros, de una pelota de tenis que es lanzada hacia arriba viene dada por la función* $h(t)=24.5t-4.9t^2$.

a) ¿Qué altura tiene a los 2 segundos?
b) ¿Cuándo vuelve a pasar por la misma altura?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
d) ¿Cuántos segundos tarda en regresar al suelo?
e) Representa la trayectoria que describe la pelota.

Ejercicio 2: *El consumo de un vehículo en función de la velocidad en kilómetros por hora, por cada 100 kilómetros recorridos, viene dado por la expresión*

$$C(x)=0.001x^2-0.12x+10.$$

a) ¿A qué velocidad el consumo es menor?
b) ¿Entre qué velocidades el consumo no supera los 8 litros?
c) Representa gráficamente la función $C(x)$.

1.3. FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR

Función **polinómica** de grado ***n***:

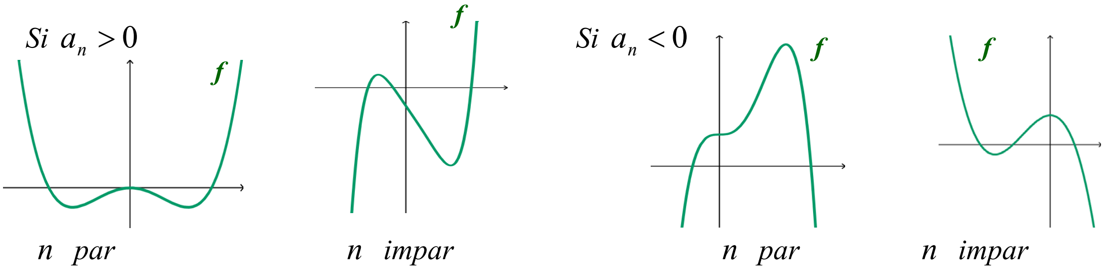
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0 \quad \text{con } a_i\in\Re \quad a_n\neq 0.$$

Propiedades:

- $Dom(f)=\Re$, $Rec(f)$ depende de cada función.
- Continua en $\Re$.
- A lo sumo corta n veces al eje de abscisas.

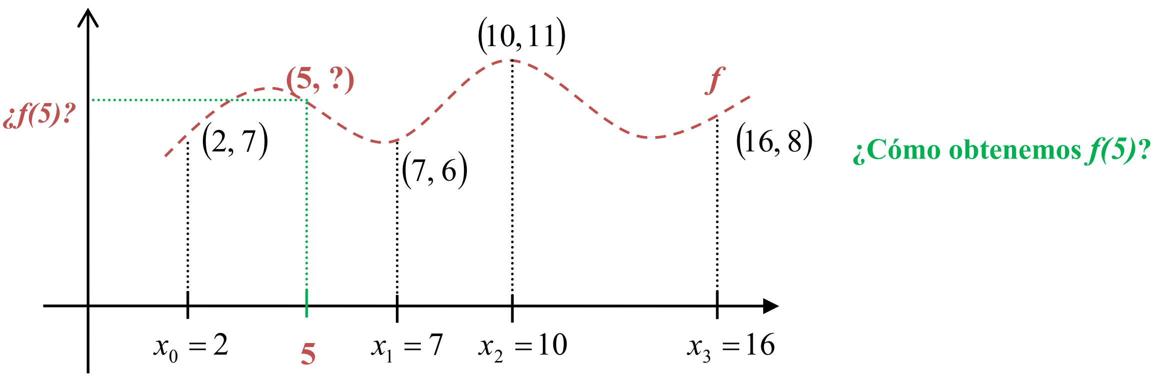
El resto de propiedades son específicas de cada función y se estudiarán en siguientes unidades.

Ejemplos de gráficas:



2. *EL PROBLEMA DE LA INTERPOLACIÓN*

En bastantes ocasiones las Ciencias Sociales y las Ciencias Experimentales precisan obtener una función que describa el comportamiento de cierto fenómeno del que solo se conocen algunas parejas de valores.



Objetivo: Encontrar una función que, pasando por esos puntos de la gráfica, se aproxime a la función real. A esa función se la llama ***función de interpolación***.

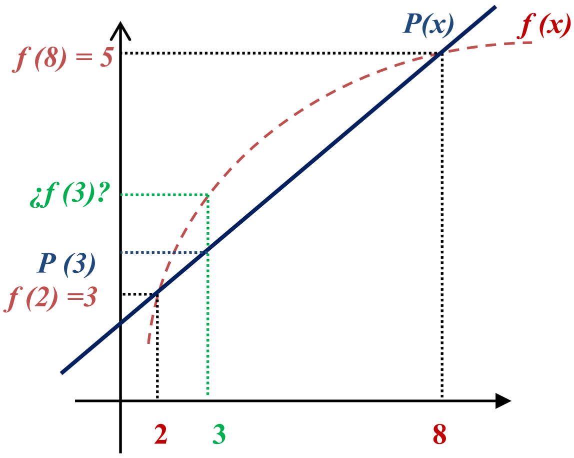
La función de interpolación nos permite calcular, de modo aproximado, el valor de $f(a)$ para cualquier valor a.

Si $a\in[x_0,x_n]\Rightarrow$ decimos que estamos interpolando el valor a y que $f(a)$ se ha obtenido por interpolación.

Si $a\notin[x_0,x_n]\Rightarrow$ decimos que estamos extrapolando el valor a y que $f(a)$ se ha obtenido por extrapolación.

Nos vamos a limitar al caso de la interpolación polinómica (la función interpoladora es un polinomio) lineal y cuadrática.

2.1. INTERPOLACIÓN LINEAL



De una función conocemos solo dos de sus puntos (2, 3) y (8, 5), es decir:

$f(2)=3 \qquad f(8)=5$

¿Qué valor toma la función en $x=3$?

Vamos a APROXIMAR la función *f(x)* mediante una función lineal (recta):

$$P(x)=mx+n$$

que coincida con f en esos puntos conocidos.

A este proceso se la llama ***interpolación lineal*** y al polinomio P se le llama ***polinomio de interpolación lineal***.

Como $P(x)=mx+n$, entonces $\left.\begin{matrix} P(2)=3 \\ P(8)=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2m+n=3 \\ 8m+n=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} m=1/3 \\ n=7/3 \end{matrix}$

Por tanto $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{POLINOMIO DE} \\ \text{INTERPOLACIÓN LINEAL}}}{P(x)=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}} \Rightarrow P(3)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{7}{3}=\frac{10}{3} \Rightarrow f(3)\approx\frac{10}{3}.$

Si en lugar de aproximar un valor $x_0 \in [a,b]$, x_0 está fuera de $[a,b]$, entonces se llama extrapolación.

Ejemplo 1: *En una Universidad, el año 1992 se matricularon 10400 alumnos y el año 1997, 13200. Estimar, aproximadamente, cuantos se matricularon el año 1994 y en el año 2000.*

Solución:

$$P(x)=mx+n \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(1992)=10400 \\ P(1997)=13200 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1992m+n=10400 \\ 1997m+n=13200 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} m=560 \\ n=-1105120 \end{matrix}$$

Por tanto:

$$P(x)=560x-1105120 \Rightarrow \begin{matrix} P(1994)=560\cdot 1994-1105120=11520 \\ P(2000)=560\cdot 2000-1105120=14880 \end{matrix} \quad \text{alumnos}$$

aproximadamente.

Ejemplo 2: *El número de trasplantes de riñón efectuados en España en el año 1984 fue de 836, y en el año 1986 fue de 1182. Usando la interpolación lineal, determina el número aproximado de trasplantes que se efectuaron en el año 1985 y en el año 1983.*

Solución:

$$P(x)=mx+n \Rightarrow \left.\begin{matrix} P(1984)=836 \\ P(1986)=1182 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1984m+n=836 \\ 1986m+n=1182 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} m=173 \\ n=-342\,396 \end{matrix}$$

Por tanto $P(x)=173x-342\,396 \Rightarrow \begin{matrix} P(1985)=173\cdot 1985-342\,396=1\,009 \\ P(1983)=173\cdot 1983-342\,396=663 \end{matrix}.$

En el año 1985 se efectuaron, aproximadamente, 1009 trasplantes de riñón y en el año 1983 se efectuaron 663.

Ejemplo 3: *Se obtienen los siguientes datos de una oficina del INEM:*

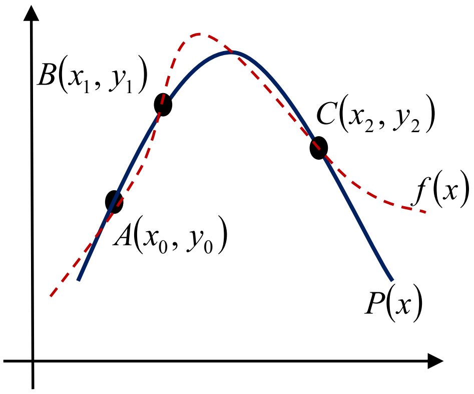
Inflación %	*1.9*	*3.6*
Paro %	*4.4*	*3.7*

Halla la tasa de paro en un momento en el que la tasa de inflación es del 3%.
Solución:

$$P(x)=mx+n\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(1.9)=4.4\\ P(3.6)=3.7\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}1.9m+n=4.4\\ 3.6m+n=3.7\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}m=-0.412\\ n=5.182\end{array}$$

Por tanto $P(x)=-0.412x+5.182\Rightarrow P(3)=3.946\%$ aproximadamente.

2.2. INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA



En este caso conocemos tres puntos

$$A(x_0, y_0),\quad B(x_1, y_1)\ \text{y}\ \ C(x_2, y_2)$$

de la gráfica de f, es decir,

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1\ \text{y}\ \ f(x_2)=y_2.$$

Se va a interpolar mediante una parábola cuya expresión algebraica será una función cuadrática:

$$P(x)=ax^2+bx+c$$

llamada ***polinomio de interpolación cuadrática***.

Las función *f(x)* y su función interpoladora *P(x)*, coincidirán en los tres puntos conocidos.

En este caso surgirá un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: $\left.\begin{array}{l}P(x_0)=y_0\\ P(x_1)=y_1\\ P(x_2)=y_2\end{array}\right\}$

Ejemplo 1: *Calcula la función de interpolación cuadrática correspondiente a los valores de la tabla:*

x	1	3	5
y	4	9	18

y calcula su valor cuando $x=4$.
Solución:

$$P(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(1)=4\\ P(3)=9\\ P(5)=18\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}a+b+c=4\\ 9a+3b+c=9\\ 25a+5b+c=18\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}a=1/2\\ b=1/2\\ c=3\end{array}$$

Por tanto $P(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3\Rightarrow P(4)=\frac{1}{2}\cdot 4^2+\frac{1}{2}\cdot 4+3=13\Rightarrow f(4)\approx 13.$

Ejemplo 2: *Una saltadora de altura tiene las siguientes marcas dependiendo de los años de entrenamiento:*

Años de entrenamiento	1	2	3	4
Marca (cm)	169	181	?	199

Determina su marca aproximada a los 3 años de entrenamiento.
Solución:

$$P(x)=ax^2+bx+c\Rightarrow \left.\begin{array}{l}P(1)=169\\ P(2)=181\\ P(4)=199\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}a+b+c=169\\ 4a+2b+c=181\\ 16a+4b+c=199\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}a=-1\\ b=15\\ c=155\end{array}$$

Por tanto $P(x)=-x^2+15x+155\Rightarrow P(3)=-3^2+15\cdot 3+155=191cm$
$\Rightarrow f(3)\approx 191cm.$

3. FUNCIONES RACIONALES

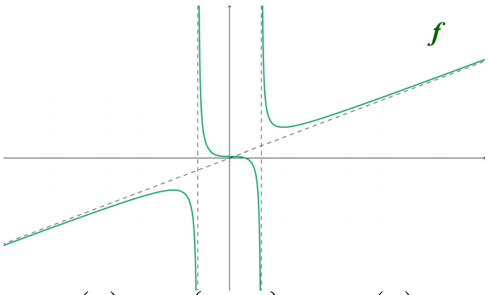
Son de la forma:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con} \quad P(x),\ Q(x) \text{ funciones polinómicas.}$$

$$Dom(f)=\Re \setminus \{x\in\Re \,/\, Q(x)=0\}.$$

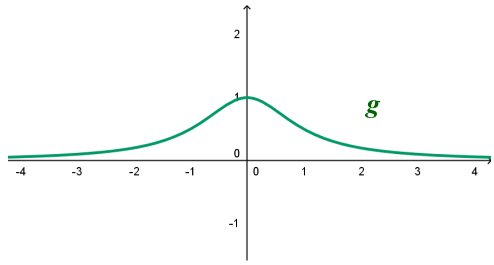
Ejemplos:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$



$Dom(f)=\Re\setminus\{-2,\,2\}$; $Rec\,(f)=\Re$

b) $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$



$Dom\,(g)=\Re$; $Rec\,(g)=(0,1]$

Sus propiedades son diferentes para cada función.

CASO PARTICULAR: FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

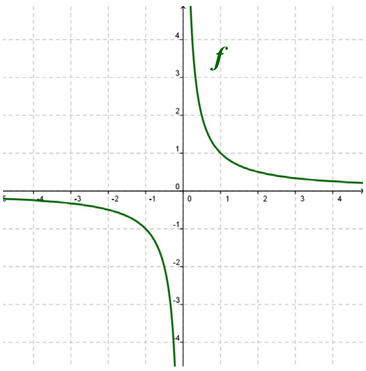
Son de la forma:

$$f(x)=\frac{k}{x} \quad \text{con} \quad k\in\Re \quad k\neq 0.$$

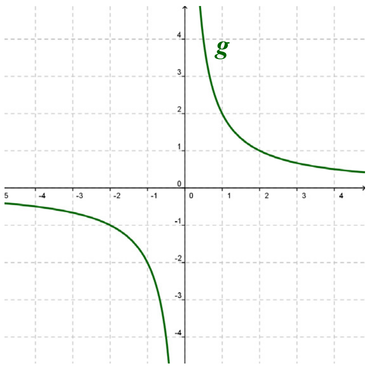
Gráfica: Hipérbola equilátera.

Ejemplos:

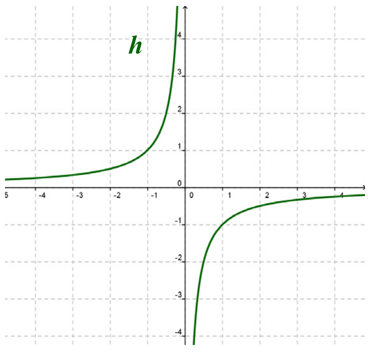
a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$



b) $g(x)=\dfrac{2}{x}$



c) $h(x)=\dfrac{-1}{x}$



Observa:

Si $k>0 \Rightarrow$ Ramas situadas en el primer y tercer cuadrante.

Si $k<0 \Rightarrow$ Ramas situadas en el segundo y cuarto cuadrante.

Propiedades:

- $Dom(f)=\Re\setminus\{0\}$, $Rec(f)=\Re\setminus\{0\}$.
- Si $k>0 \Rightarrow$ Estrictamente decreciente en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

  Si $k<0 \Rightarrow$ Estrictamente creciente en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
- No tiene extremos absolutos ni relativos.
- No está acotada ni superior ni inferiormente.
- Impar (simetría respecto al origen).
- $y=0$ es una asíntota horizontal.
- $x=0$ es una asíntota vertical.

- Puntos de la gráfica:

  $f(1)=k \Rightarrow P(1,\,k)$

  $f(k)=1 \Rightarrow Q(k,\,1)$

  $f(-1)=-k \Rightarrow R(-1,\,-k)$

  $f(-k)=-1 \Rightarrow S(-k,\,-1)$

También tienen como gráfica una hipérbola las funciones racionales del tipo:

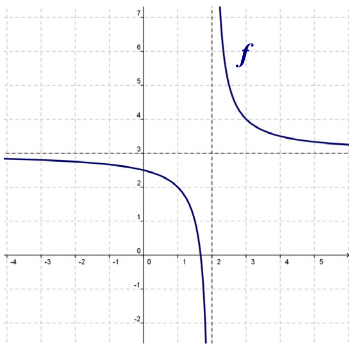
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad Dom(f)=\Re\setminus\{-d/c\} \quad \text{Asíntota vertical: } x=-d/c$$

$$Rec(f)=\Re\setminus\{a/c\} \qquad \text{Asíntota horizontal: } y=a/c$$

Sin embargo tendremos en cuenta algunos casos como el ejemplo *b)*.

Ejemplos:

a) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}$



$Dom(f)=\Re\setminus\{2\}$

$Rec(f)=\Re\setminus\{3\}$

Asíntota vertical: $x=2$

Asíntota horizontal: $y=3$.

Estrictamente decreciente en: $(-\infty,\,2)\cup(2,+\infty)$.

No acotada ni superior ni inferiormente.

No presenta extremos absolutos ni relativos.

No es impar.

b) Dada la función $g(x)=\dfrac{3x-6}{x-2}$ ¿su gráfica es una hipérbola? ¿Por qué?

4. *FUNCIONES IRRACIONALES*

Son de la forma:

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)} \quad \text{con} \quad g(x) \text{ polinómica o racional.}$$

Si n es par $\Rightarrow Dom(f)=\{\, x\in Dom(g)\,/\,g(x)\geq 0\}$

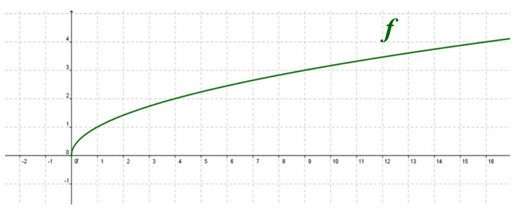
Si n es impar $\Rightarrow Dom(f)=Dom(g)$

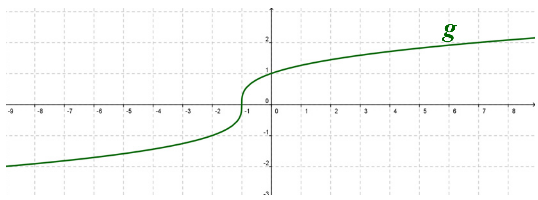
Ejemplos:

a) $f(x)=\sqrt{x} \quad Dom(f)=\Re_0^+=[0,+\infty)$ *b)* $g(x)=\sqrt[3]{x+1} \quad Dom(g)=\Re$

x	*0*	*1*	*4*	*9*	*16*
f(x)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*

x	*-9*	*-2*	*-1*	*0*	*7*
g(x)	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*





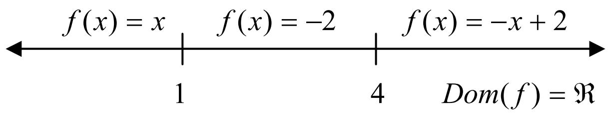
$Rec(f)=\Re_0^+=[0,+\infty)$ $Rec(g)=\Re$

5. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Están definidas por varias expresiones algebraicas.

Ejemplo 1: *Representa estas funciones definidas a trozos.*

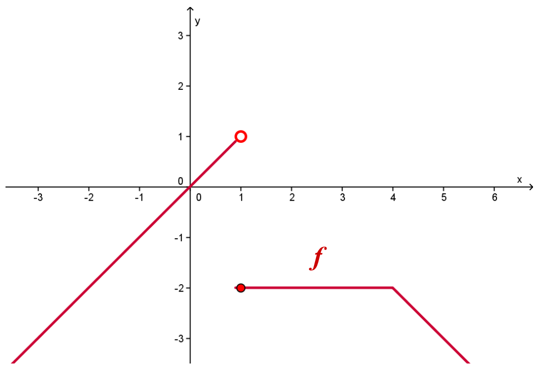
a) $f(x)=\begin{cases} x & si \;\; x<1 \\ -2 & si \;\; 1\le x<4 \\ -x+2 & si \;\; x\ge 4 \end{cases}$



x	*f(x) = x*
-1	-1
1	1

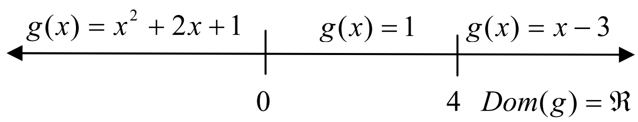
x	*f(x) = -2*
1	-2
4	-2

x	*f(x) = - x +2*
4	-2
6	-4



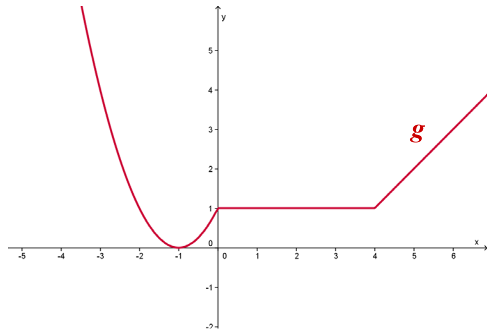
$Rec(f)=(-\infty,1)$

b) $g(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & si \;\; x\le 0 \\ 1 & si \;\; 0<x<4 \\ x-3 & si \;\; x\ge 4 \end{cases}$



x	*g(x) = 1*
0	1
4	1

x	*g(x) = x -3*
4	1
6	3



Primer trozo: *Arco de parábola*

1º) Curvatura: $a=1>0\Rightarrow Convexa\;(\cup)$

2º) Puntos de corte con los ejes:

Eje OX: $y=0\Rightarrow x^2+2x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow P(-1,0)$

($\Rightarrow$ Coincide con el vértice).

Eje OY: $x=0\Rightarrow g(0)=1\Rightarrow Q(0,1)$ (Fin arco parábola).

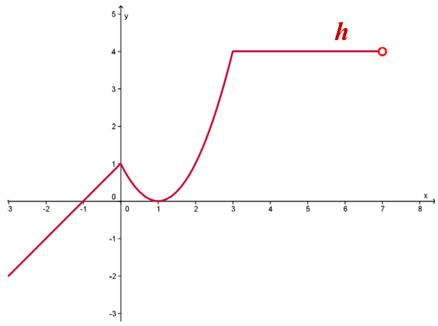
$Rec(g)=[0,+\infty)$

3º) Vértice:

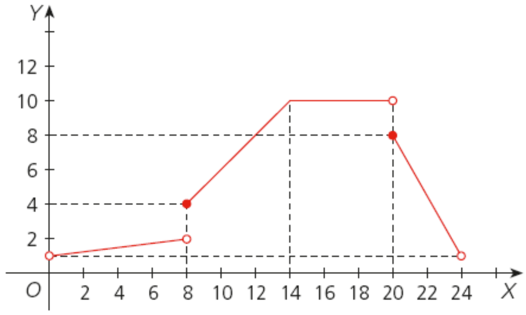
$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1;\quad y_v=g\left(\frac{-b}{2a}\right)=g(-1)=0\Rightarrow V(-1,0)$$

c) $h(x)=\begin{cases} x+1 & si \;\; x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & si \;\; x\in[0,3] \\ 4 & si \;\; x\in(3,7) \end{cases}$

Comprueba que en el caso c) se obtiene esta gráfica y estudia su dominio y recorrido.



Ejemplo 2: *La siguiente gráfica representa el consumo eléctrico (en miles de KWh) de un restaurante en función de la hora del día. Determina su expresión analítica.*

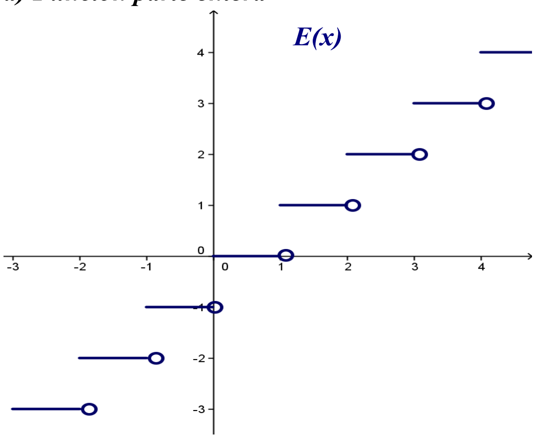


Solución:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}x+1 & si \quad 0<x<8 \\ x-4 & si \quad 8\le x\le 14 \\ 10 & si \quad 14<x<20 \\ -\frac{7}{4}x+43 & si \quad 20\le x<24 \end{cases}$$

OTRAS FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

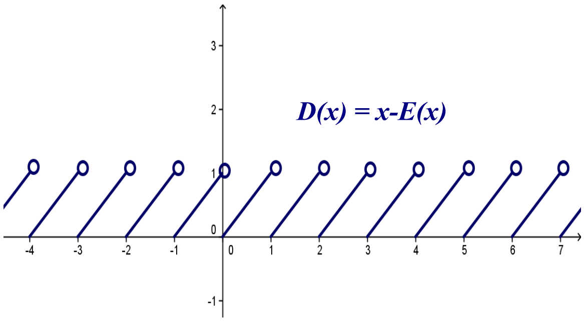
a) Función parte entera



Dom(E)= $\Re$; *Rec(E)=* $\mathbb{Z}$

$$E(x)=\begin{cases} \dots & \\ -3 & si \quad -3\le x<-2 \\ -2 & si \quad -2\le x<-1 \\ -1 & si \quad -1\le x<0 \\ 0 & si \quad 0\le x<1 \\ 1 & si \quad 1\le x<2 \\ 2 & si \quad 2\le x<3 \\ 3 & si \quad 3\le x<4 \\ \dots & \end{cases}$$

b) Función parte decimal

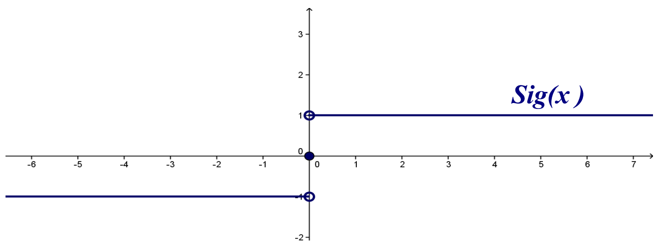


Dom(D)= $\Re$ *; Rec(D)=* $[0,1)$

Periódica con T = 1

$$D(x)=\begin{cases} \dots & \\ x+2 & si \quad -2\le x<-1 \\ x+1 & si \quad -1\le x<0 \\ x & si \quad 0\le x<1 \\ x-1 & si \quad 1\le x<2 \\ x-2 & si \quad 2\le x<3 \\ \dots & \end{cases}$$

c) Función signo



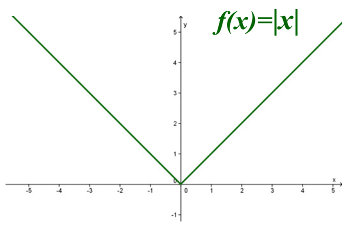
Dom(Sig)= $\Re$ *; Rec(Sig)=* $\{-1,0,1\}$

$$Sig(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ 1 & si \quad x>0 \end{cases}$$

6. *FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO*

Se define la función valor absoluto como la función definida a trozos:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & si \quad x<0 \\ x & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

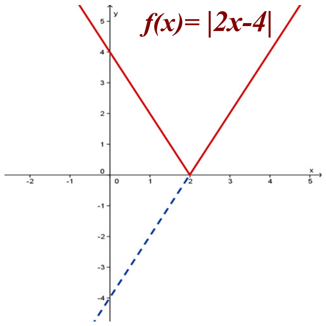


$Dom(f)=\Re$

$Rec(f)=[0,+\infty)$

Ejemplo 1: *Representa y expresa como función definida a trozos:*

$a)\ f(x)=|2x-4|$



Se representa: $y = 2x - 4$.

x	$y = 2x - 4$
0	-4
3	2

Corte con eje OX: (si no se ha obtenido en la tabla)

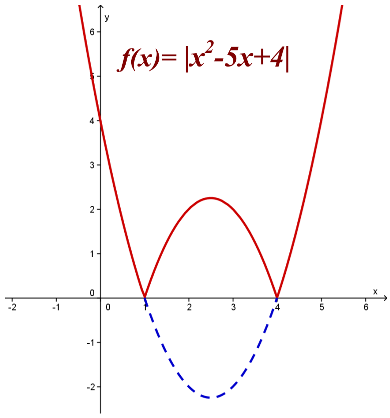
$$y=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2,0)$$

Como función a trozos queda:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+4 & si \quad x<2 \\ 2x-4 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

$Dom(f)=\Re;\quad Rec(f)=[0,+\infty)$

$b)\ f(x)=\left|x^2-5x+4\right|$



Se representa $y = x^2 - 5x + 4$

1º) Curvatura: $a=1>0 \Rightarrow Convexa\ (\cup)$

2º) Puntos de corte con los ejes:

Eje OX:

$$y=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow P(1,0) \\ x=4 \Rightarrow Q(4,0) \end{cases}$$

Eje OY: $x=0 \Rightarrow R(0,4)$

3º) Vértice:

$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{2}=2.5;\ y_v=2.5^2-5\cdot 2.5+4=-2.25$$

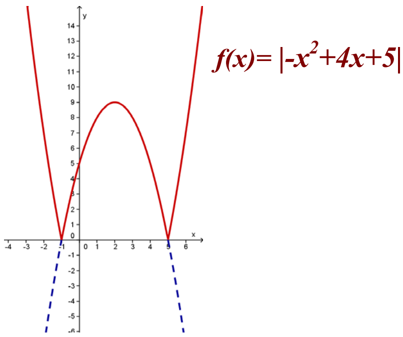
$$\Rightarrow V(2.5,-2.25)$$

$Dom(f)=\Re;\quad Rec(f)=[0,+\infty)$

Como función a trozos queda: $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+4 & si \quad x\leq 1 \quad ó \quad x\geq 4 \\ -x^2+5x-4 & si \quad 1<x<4 \end{cases}$

$c)\ f(x)=\left|-x^2+4x+5\right|$

Comprueba que en el caso c) se obtiene esta gráfica.



7. FUNCIONES EXPONENCIALES

Son de la forma:

$$f(x)=a^x \qquad \text{con} \quad a\in\Re; \quad a>0 \quad \text{y} \quad a\neq 1$$

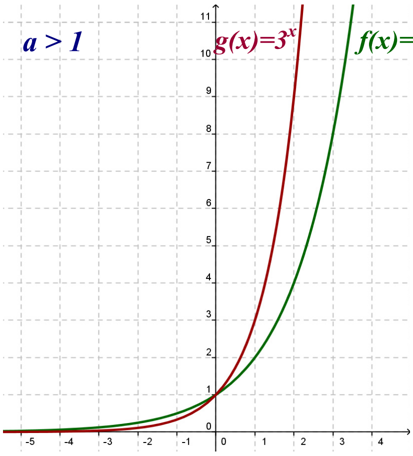
Ejemplos:

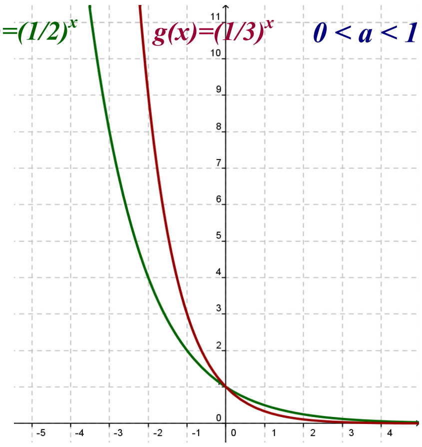
$a)\ f(x)=2^x \quad y \quad g(x)=3^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	1/4	1/2	1	2	4	8
g(x)	1/9	1/3	1	3	9	27

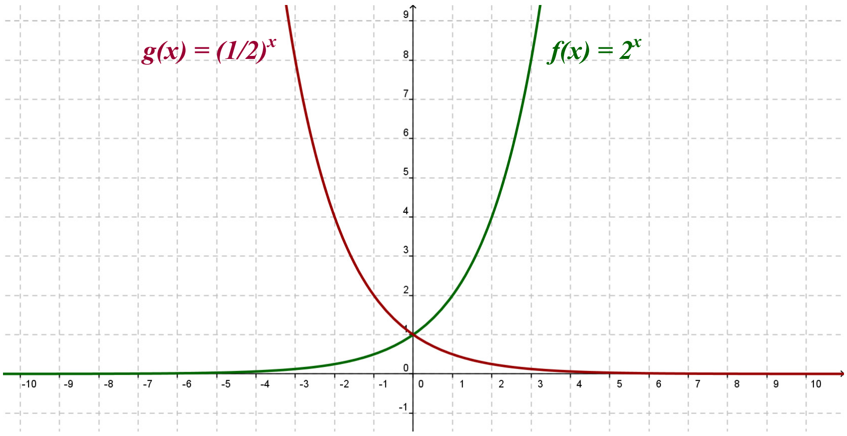
$b)\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad y \quad g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	2	1	1/2	1/4	1/8
g(x)	9	3	1	1/3	1/9	1/27





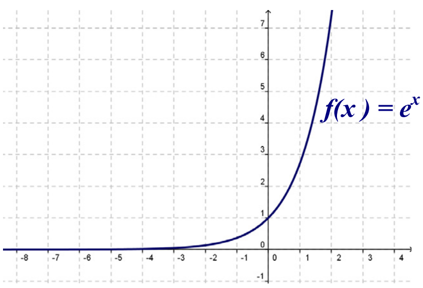
Fíjate: Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas respecto al eje *OY*.



Propiedades:

- $Dom(f) = \Re$, $Rec(f) = (0, +\infty)$.
- Su gráfica pasa por los puntos:
  $P(0,1)$, es decir, $f(0) = a^o = 1$.
  $Q(1, a)$, es decir, $f(1) = a^1 = a$.
  $R(-1, 1/a)$, es decir, $f(-1) = a^{-1} = 1/a$.
- Convexa en $\Re$.
- No tiene extremos absolutos ni relativos.
- Está acotada inferiormente por *N=0,* pero no está acotada superiormente.
- Si $a > 1$ es estrictamente creciente en $\Re$.
  Si $0 < a < 1$ es estrictamente decreciente en $\Re$.
- Su gráfica no presenta simetrías.
- Es "continua" en $\Re$.
- $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Una función exponencial muy especial:



$f(x) = e^x \leftarrow$ ***Función exponencial de base "e"***

Recuerda que: $e = 2.7182818...$

Pasa por:

$P(0,1)$; $Q(1, e)$; $R(-1, 1/e)$.

8. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Son de la forma:

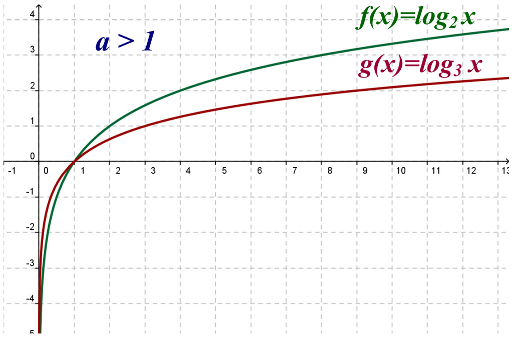
$$f(x)=\log_a x \qquad \text{con } a\in\Re; \quad a>0 \text{ y } a\neq 1$$

Ejemplos:

a) $f(x)=\log_2 x$ *y* $g(x)=\log_3 x$

x	1	2	4	8	1/2	1/4
f(x)	0	1	2	3	-1	-2

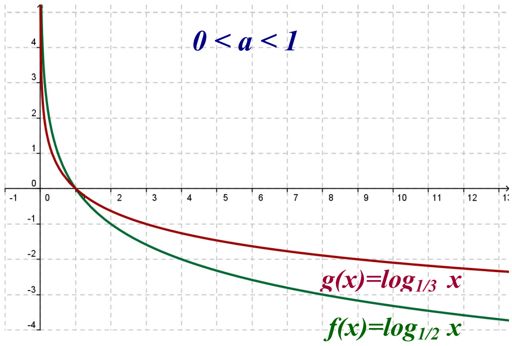
x	1	3	9	27	1/3	1/9
g(x)	0	1	2	3	-1	-2



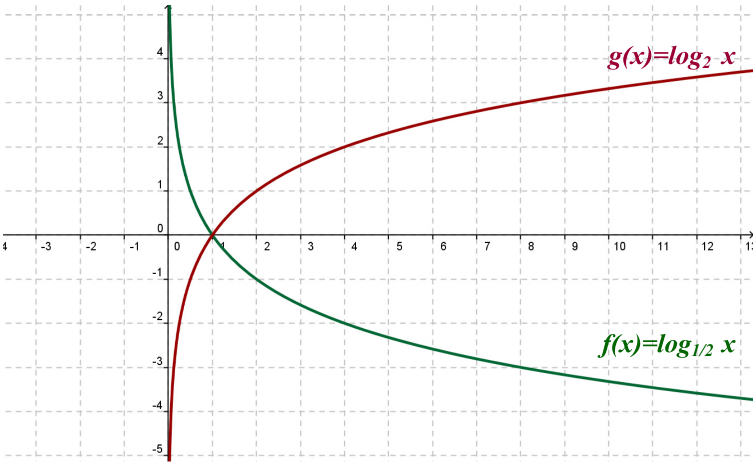
b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ *y* $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$

x	1	2	4	8	1/2	1/4
f(x)	0	-1	-2	-3	1	2

x	1	3	9	27	1/3	1/9
g(x)	0	-1	-2	-3	1	2



Fíjate: Las gráficas de $f(x)=\log_a x$ y $g(x)=\log_{\frac{1}{a}} x$ son simétricas respecto al eje *OX*.

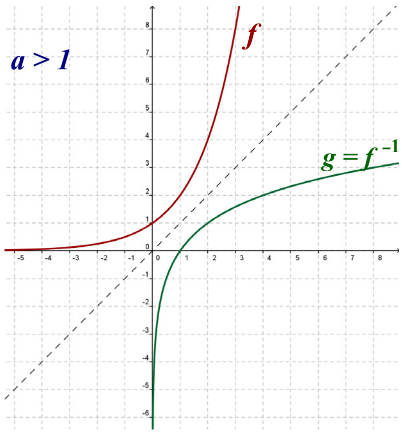


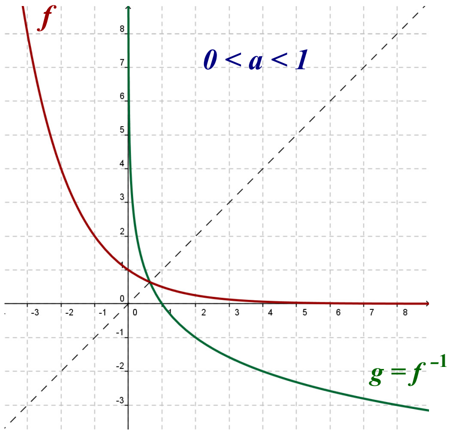
Propiedades:

- $Dom(f)=(0,+\infty)$, $\quad \mathrm{Re}c(f)=\Re$.
- Su gráfica pasa por los puntos:
  $P(1,0)$, es decir, $f(1)=\log_a 1=0$
  $Q(a,1)$, es decir, $f(a)=\log_a a=1$
  $R(1/a,-1)$, es decir, $f(1/a)=\log_a 1/a=-1$
- No tiene extremos absolutos ni relativos.
- No está acotada, ni superior ni inferiormente.
- Si $a>1$ es estrictamente creciente y cóncava en $(0,+\infty)$.
  Si $0<a<1$ es estrictamente decreciente y convexa en $(0,+\infty)$.
- Su gráfica no presenta simetrías.
- Es "continua" en $(0,+\infty)$.
- $x=0$ es una asíntota vertical.

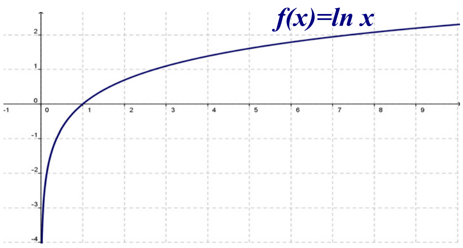
Observación: $f(x)=a^x$ y $g(x)=\log_a x$ son funciones inversas.

Por tanto, sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.





Una función logarítmica muy especial:



$f(x)=\ln x \leftarrow$ ***Función logaritmo neperiano***

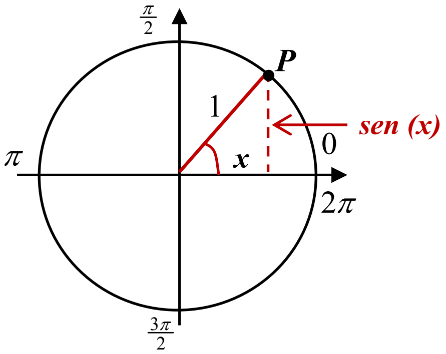
Recuerda que: $\ln x=\log_e x$

Pasa por:

$P(1,0);\ Q(e,1);\ R(1/e,-1)$

9. *FUNCIONES CIRCULARES O TRIGONOMÉTRICAS*

9.1. FUNCIÓN SENO



Dado un ángulo ***x***, se define su seno,

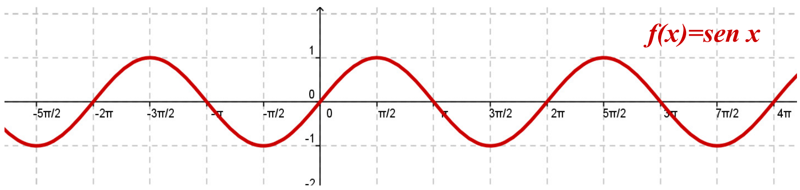
sen (x) =*Valor de la ordenada del punto P*

Variando el ángulo *x*, el punto *P* se mueve por la esfera unidad. A cada ángulo le corresponde una determinada ordenada comprendida entre -1 y 1.

Obtenemos así la ***función seno:*** $\boxed{f(x)=sen\,(x)}$

Si obtenemos una tabla de valores:

x	0	π/4	π/2	3π/4	π	3π/2	2π
f(x)	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1	0



Propiedades f(x) = sen x:

- $Dom(f)=\Re$; $\mathrm{Re}\,c(f)=[-1,1]$.
- Periódica con $T=2\pi$ rad.
- Monotonía y curvatura en $[0,2\pi)$.

  Estr. creciente en:

  $(0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi)$

  Estr. decreciente en:

  $(\pi/2,3\pi/2)$

  Convexa en: $(\pi,2\pi)$

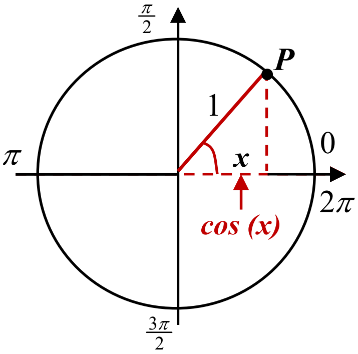
  Cóncava en: $(0,\pi)$
- Máximo absoluto y relativo en:

  $x=\pi/2$ con valor $f(\pi/2)=1$

  Mínimo absoluto y relativo en:

  $x=3\pi/2$ con valor $f(3\pi/2)=-1$
- Función impar, continua y acotada. *M=1; N=-1.*

9.2. FUNCIÓN COSENO



Dado un ángulo x, se define su coseno,

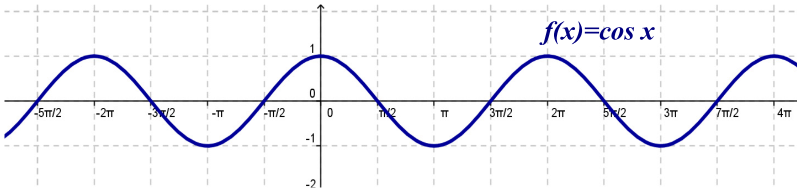
$\cos(x)$ = *Valor de la abscisa del punto P*

Variando el ángulo x, el punto P se mueve por la esfera unidad. A cada ángulo le corresponde una determinada abscisa comprendida entre -1 y 1.

Obtenemos así la ***función coseno:*** $\boxed{f(x) = \cos(x)}$

Si obtenemos una tabla de valores:

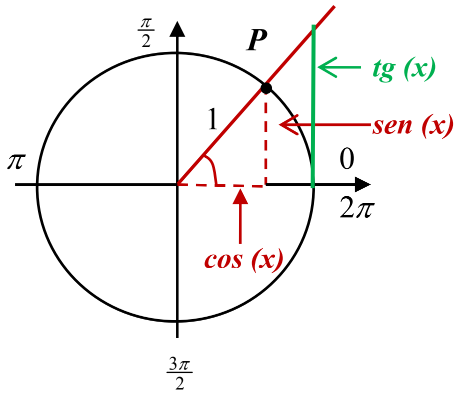
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
f(x)=cos (x)	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0	1



Esta función $f(x) = \cos x$ *es periódica de periodo* $T = 2\pi$

Obtén el resto de propiedades como en la función seno.

9.3. FUNCIÓN TANGENTE



Dado un ángulo x, se define su tangente,

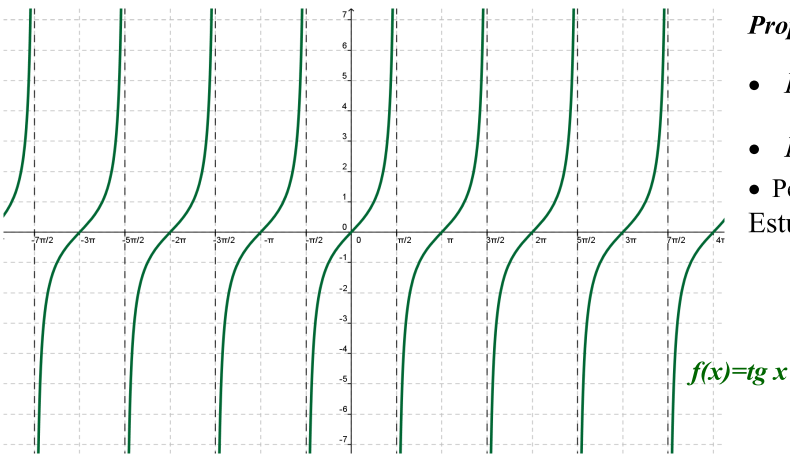
$$tg(x) = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

Variando el ángulo x, el punto P se mueve por la esfera unidad. A cada ángulo le corresponde una determinada tangente salvo en algunos casos singulares.

Obtenemos así la ***función tangente:*** $\boxed{f(x) = tg\ x}$

Si obtenemos una tabla de valores:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
f(x)=tg(x)	0	1	∄	-1	0	1	∄	-1	0



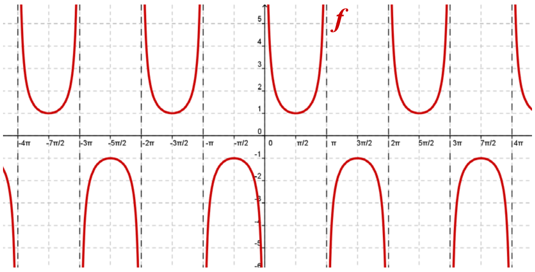
Propiedades f(x) =tg x:

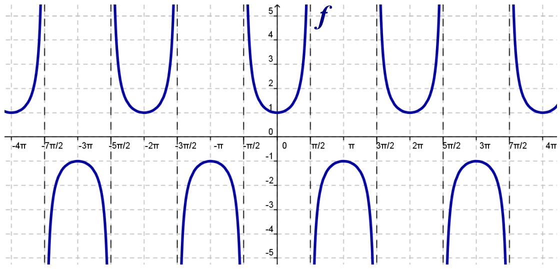
- $Dom(f) = \Re \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in Z \right\}$
- $Rec(f) = \Re$.
- Periódica con $T = \pi$ rad.

Estudia el resto de sus propiedades.

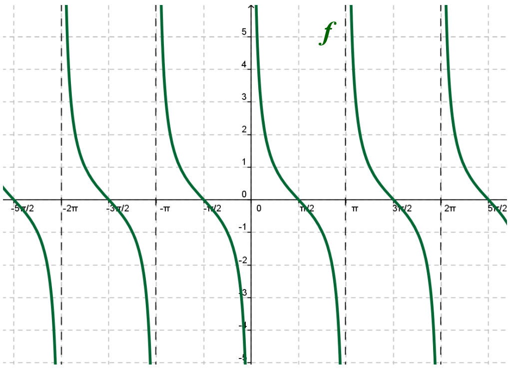
Análogamente se pueden obtener las gráficas de la funciones cosecante, secante y cotangente:

$$f(x) = cosec\ x = \frac{1}{sen\ x} \qquad f(x) = sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$$





$$f(x) = cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} \quad \text{o también} \quad f(x) = cotg\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$



Observa las gráficas anteriores y estudia sus propiedades.

10. ALGUNAS TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

10.1. TRASLACIONES VERTICALES

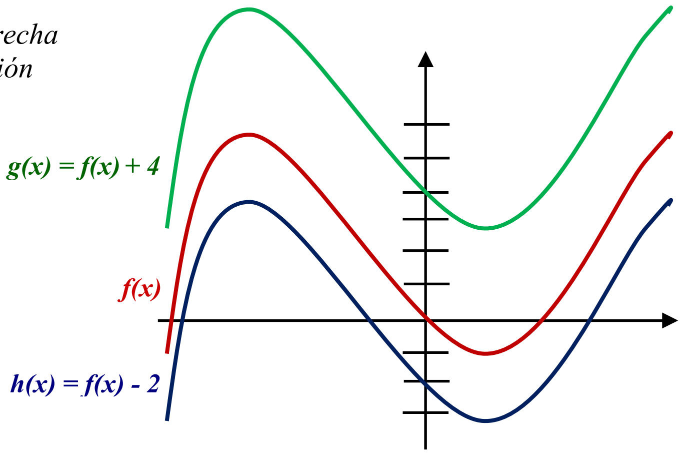
$$f(x)+k \Rightarrow \begin{cases} k>0 \Rightarrow \text{Traslación vertical de } k \text{ unidades en la gráfica} \\ \qquad\quad \text{de } f \text{ en sentido positivo (“hacia arriba”).} \\ k<0 \Rightarrow \text{Traslación vertical de } k \text{ unidades en la gráfica} \\ \qquad\quad \text{de } f \text{ en sentido negativo (“hacia abajo”).} \end{cases}$$

Ejemplos:

a) *Observa las gráficas de la derecha obtenidas al trasladar la función **f(x)**.*

$g(x) = f(x) + 4$
Traslación vertical de cuatro unidades hacia arriba.

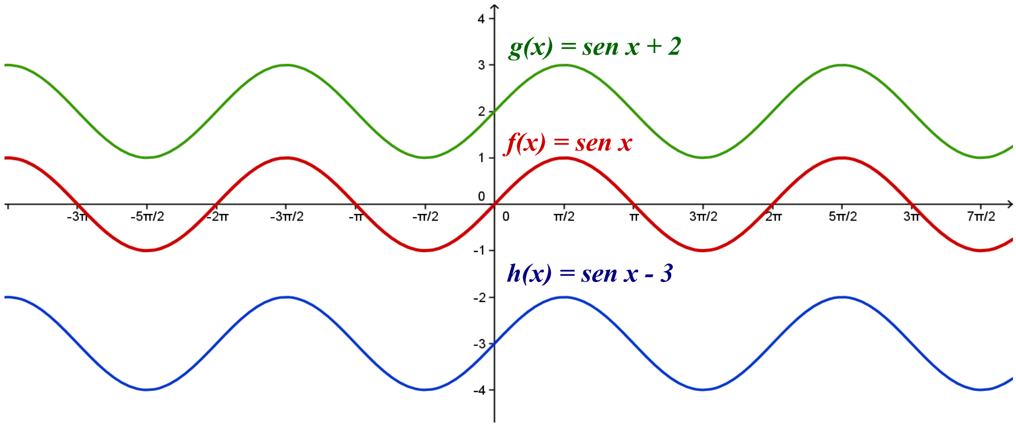
$h(x) = f(x) - 2$
Traslación vertical de dos unidades hacia abajo.



b) *Observa ahora estas gráficas obtenidas por traslación de la función* ***f(x) = sen x***.

$g(x)=f(x)+2 \Rightarrow g(x)=sen x+2 \rightarrow$ Traslación vertical de dos unidades hacia arriba.

$h(x)=f(x)-3 \Rightarrow h(x)=sen x-3 \rightarrow$ Traslación vertical de tres unidades hacia abajo.



10.2. TRASLACIONES HORIZONTALES

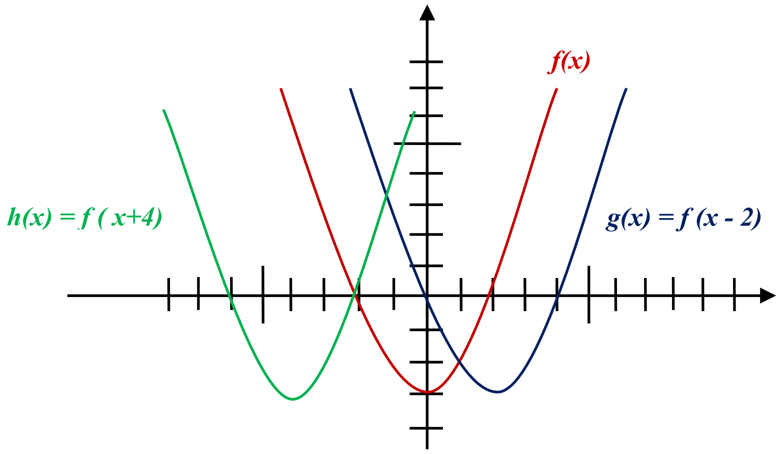
$$f(x+k) \Rightarrow \begin{cases} k>0 \Rightarrow \text{ Traslación horizontal de } k \text{ unidades en la gráfica de } f \text{ en sentido negativo (“hacia la izquierda”).} \\ k<0 \Rightarrow \text{ Traslación horizontal de } k \text{ unidades en la gráfica de } f \text{ en sentido positivo (“hacia la derecha”).} \end{cases}$$

Ejemplos:

a) *Presta atención a estas gráficas obtenidas por traslación horizontal de* ***f(x)*** .

$g(x)=f(x-2) \rightarrow$ Traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha.

$h(x)=f(x+4) \rightarrow$ Traslación horizontal de cuatro unidades hacia la izquierda.

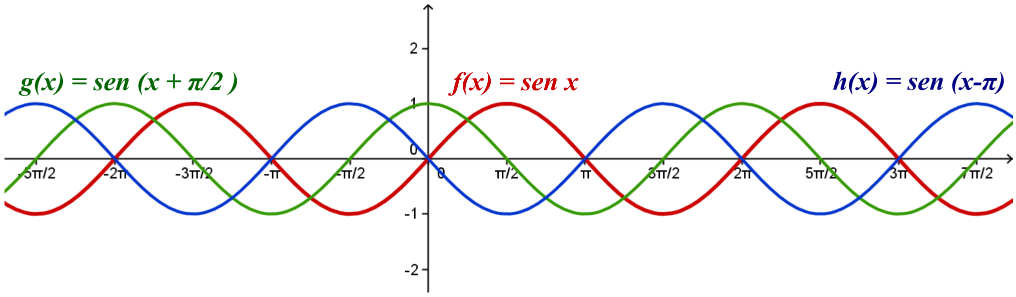


b) *Fíjate ahora en estas traslaciones de la función* ***f(x) = sen x***.

$g(x)=f(x+\pi/2) \Rightarrow g(x)=sen(x+\pi/2) \rightarrow$ Traslación horizontal de $\pi/2$ unidades hacia la izquierda.

$h(x)=f(x-\pi) \Rightarrow h(x)=sen(x-\pi) \rightarrow$ Traslación horizontal de π unidades hacia la derecha.

Observa: $g(x) = sen(x+\pi/2) = \cos x$

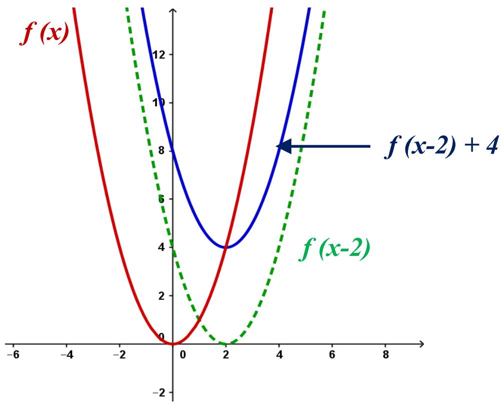


10.3. COMPOSICIÓN DE TRASLACIONES

$f(x+k_1)+k_2 \rightarrow$ Traslación horizontal de k_1 unidades (hacia la izquierda si $k_1 > 0$ o hacia la derecha si $k_1 < 0$), junto con otra traslación vertical de k_2 unidades (hacia arriba si $k_2 > 0$ o hacia abajo si $k_2 < 0$).

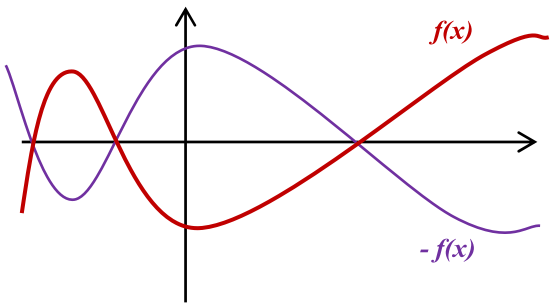
Ejemplo: *Representar* $g(x)=(x-2)^2+4$ *a partir de la función* $f(x)=x^2$.

$$g(x)=f(x-2)+4 \rightarrow \begin{cases} \text{Traslación horizontal de dos unidades hacia la derecha.} \\ \text{Traslación vertical de cuatro unidades hacia arriba.} \end{cases}$$



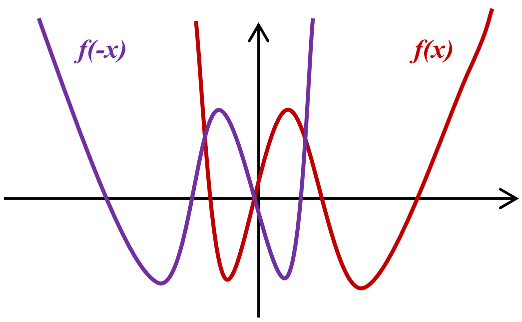
10.4. SIMETRÍAS

a) Funciones opuestas: Representación de – f(x) a partir de f(x)



f(x) y - f(x) son simétricas respecto al eje ***OX.***

b) Representación de f(-x) a partir de f(x)



f(x) y f(-x) son simétricas respecto al eje ***OY.***

Fíjate: Si f es par, coincidirán ambas gráficas.