UNIDAD 6 FUNCIONES REALES. PROPIEDADES GLOBALES

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. DOMINIO Y RECORRIDO

Recuerda que hay distintas formas de expresar una *"función"*.

Enunciado o descripción verbal: A cada número se le hace corresponder su doble.

Tabla de valores:

NÚMERO (*x*)	**SU DOBLE (*y*)**
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6
…	…
x	***2x***

Expresión analítica de la relación o fórmula matemática:

$y = 2x$ o bien: $f(x) = 2x$

De este modo:

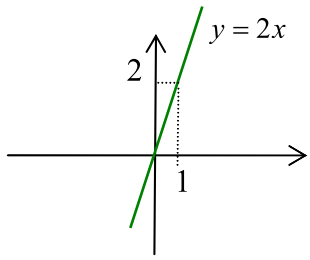
$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$,

$f(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$

…

Esto es un ejemplo de **FUNCIÓN**.

Gráfica:



Son distintas formas de expresar una relación entre dos magnitudes de manera que a cada valor de la variable ***x*** le corresponde un **ÚNICO** valor de la variable ***y***.

Al único valor de ***y*** que le corresponde a ***x*** se le llama imagen de ***x***.
Al valor de ***x*** cuya imagen es ***y***, lo llamamos ***original de y*** o ***antiimagen de y***.

En el ejemplo anterior: $f(9) = 18 \Rightarrow \begin{cases} \text{La imagen de 9 es 18} \\ \text{La antiimagen de 18 es 9} \end{cases}$

Una **FUNCIÓN** entre dos conjuntos numéricos ***A*** y ***B*** es una correspondencia que asigna a cada elemento ***x*** de ***A***, a lo sumo, un único elemento ***y*** de ***B***.

- ***x*** $\rightarrow$ Variable **in**dependiente.
- ***y*** $\rightarrow$ Variable dependiente (depende de ***x***).
- ***A*** $\rightarrow$ Conjunto inicial (donde toma valores la variable independiente).
- ***B*** $\rightarrow$ Conjunto final (donde toma valores la variable dependiente).

Dominio de una función: Conjunto de valores que toma la variable independiente ***x***. Se denota por ***Dom(f)*** y es un subconjunto de **A**. También se llama campo de existencia de la función.

Recorrido o imagen de una función: Conjunto de valores que toma la variable dependiente ***y***. Se denota por ***Rec(f)*** o también ***Im(f).*** Es un subconjunto del conjunto final ***B***.

Si el conjunto inicial y final de una función es $\Re$, se llama **función real de variable real**.
Se escribe:

$$\begin{aligned} f: Dom(f) &\longrightarrow \Re \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \qquad Dom(f) \subset \Re$$

Nos ocuparemos exclusivamente de este tipo de funciones.

Ejemplo:

a) $\begin{aligned} f: \Re &\longrightarrow \Re \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} f: [0, +\infty) &\longrightarrow \Re \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$

Notación: $\Re^+ = (0, +\infty)$ $\Re^+_0 = [0, +\infty)$ $\Re^- = (-\infty, 0)$ $\Re^-_0 = (-\infty, 0]$ $\Re^* = \Re \setminus \{0\}$

Ejercicio: *Dada la función* $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

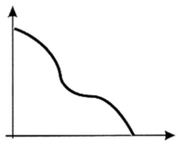
a) Calcula la imagen de $x = 2$ *y* $x = -3$.
b) Calcula la antiimagen de 4 y de 25.

TIPOS DE FUNCIONES:

$$
FUNCIONES\begin{cases} ALGEBRAICAS\begin{cases} POLINÓMICAS \rightarrow f(x)=2x^2+7x-2 \\ RACIONALES \rightarrow f(x)=\dfrac{3x-2}{2x^3+1} \\ IRRACIONALES \rightarrow f(x)=\sqrt{2x-7} \end{cases} \\ TRASCENDENTES\begin{cases} EXPONENCIALES \rightarrow f(x)=2^{x-3} \\ LOGARÍTMICAS \rightarrow f(x)=\ln(2x+3) \\ TRIGONOMÉTRICAS \rightarrow f(x)=tg(x+4) \end{cases} \end{cases}
$$

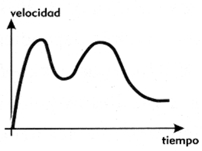
Podemos tener funciones como $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-4)+e^{\frac{3}{x}}}{\cos x}$ mezcla de varios tipos de trascendentes.

Recuerda: Una gráfica corresponde a una función cuando cada recta paralela al eje de ordenadas corta a la gráfica, a lo sumo, una sola vez.

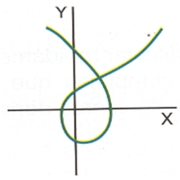


Sí es función

No es función



Sí es función



No es función

CÁLCULO DE DOMINIOS:

Si la función viene dada por su expresión matemática es conveniente obtener su dominio para así saber dónde está definida.

El dominio de una función debe estar formado por los valores de x para los que tiene sentido sustituir en su expresión analítica.

En el cálculo de dominios debemos evitar los valores de x que:

Anulan denominadores (división por cero).
Dan lugar a raíces de índice par de números negativos.
Dan lugar a logaritmos de números no positivos.

Ejemplos:

$a)\ f(x)=x^2+x+2$

$b)\ f(x)=\dfrac{3x-1}{x}$

$c)\ f(x)=\dfrac{2x-3}{x+7}$

$d)\ f(x)=\dfrac{x}{(x-3)(x-5)}$

$e)\ f(x)=\dfrac{4x-5}{x^2-9}$

$f)\ f(x)=\dfrac{4x-5}{x^2+9}$

$g)\ f(x)=\dfrac{4x-7}{x^2-7x+12}$

$h)\ f(x)=\dfrac{5x^2-2x+1}{x^3+4x^2+x-6}$

$i)\ f(x)=\dfrac{3x+2}{x^4-7x^2+10}$

$j)\ f(x)=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^4-7x^2+10}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{x}$

$l)\ f(x)=\sqrt{x-1}$

$m)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

$n)\ f(x)=\sqrt{3-2x}$

$ñ)\ f(x)=\dfrac{2x+7}{\sqrt{3-2x}}$

$o)\ f(x)=\sqrt{x^2-25}$

$p)\ f(x)=\sqrt{25-x^2}$

$q)\ f(x)=\sqrt{x^2+25}$

$r)\ f(x)=\sqrt[4]{x^2-7x+12}$

$s)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2-7x+12}$

$t)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$

$u)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{2x+3}}$

$v)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-5x}$

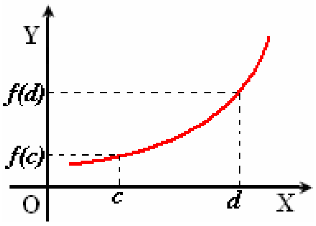
$w)\ f(x)=\ln(5x-11)$

$x)\ f(x)=\log\sqrt{x^2-9}$

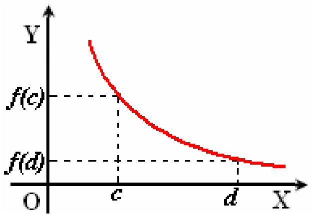
$y)\ f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

2. *MONOTONÍA Y EXTREMOS. ACOTACIÓN*

2.1. MONOTONÍA

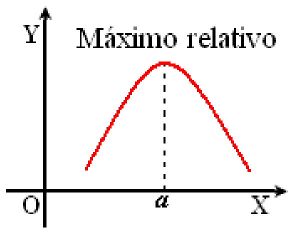


- f es ***estrictamente creciente*** en un intervalo abierto (a, b), si para cualquier pareja de números reales $c, d \in (a, b)$ se cumple que $si\ c < d \Rightarrow f(c) < f(d)$.



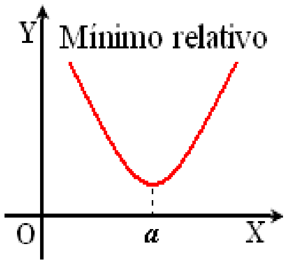
- f es ***estrictamente decreciente*** en un intervalo abierto (a, b), si para cualquier pareja de números reales $c, d \in (a, b)$ se cumple que $si\ c < d \Rightarrow f(c) > f(d)$.
- Si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en un intervalo abierto (a, b), diremos que f es ***estrictamente monótona en*** (a, b).

2.2. EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS



- f tiene un ***máximo relativo (o local)*** en a si existe un entorno de a, $(a-r, a+r)$, en el que:

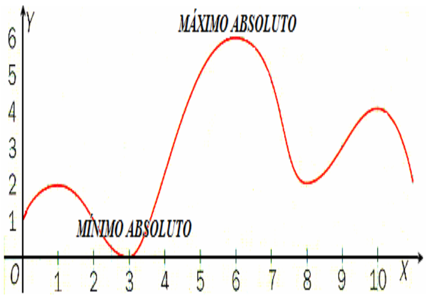
$$\begin{cases} si\ x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ si\ x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$$



- f tiene un ***mínimo relativo (o local)*** en a si existe un entorno de a, $(a-r, a+r)$, en el que:

$$\begin{cases} si\ x < a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ si\ x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases}$$

- Si f presenta un máximo o un mínimo relativo en a diremos que f presenta un ***extremo relativo en*** a.



- f tiene su ***máximo absoluto (o global)*** en a si:

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall\ x \in Dom(f)$$

- f tiene su ***minino absoluto(o global)*** en a si:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall\ x \in Dom(f)$$

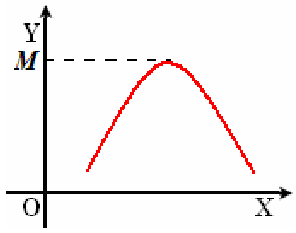
- Si f presenta un máximo o un mínimo absoluto en a diremos que f presenta un ***extremo absoluto en*** a.

Fíjate:

Podemos encontrar mínimos relativos con valor mayor que máximos relativos y viceversa.
Un extremo absoluto puede alcanzarse en uno o varios puntos distintos o bien no alcanzarse.

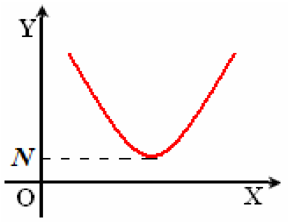
Extremos relativos $\rightarrow$ Concepto local — Extremos absolutos $\rightarrow$ Concepto global

2.3. FUNCIONES ACOTADAS



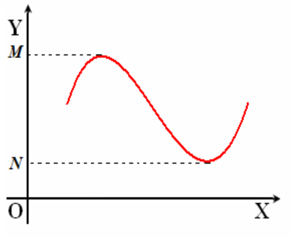
- f está ***acotada superiormente*** si existe un número real M tal que:

$$f(x) \leq M \quad \forall\ x \in Dom(f)$$



- f está ***acotada inferiormente*** si existe un número real $\boldsymbol{N}$ tal que:

$$N \le f(x) \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

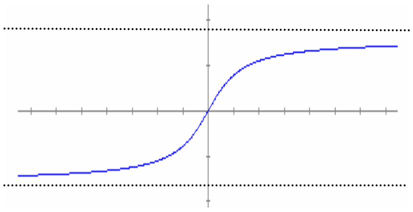


- f está ***acotada*** si lo está superior e inferiormente, es decir, existen dos números reales $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$ tales que:

$$N \le f(x) \le M \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

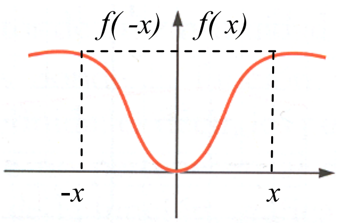
Observa:
En las figuras anteriores, la menor de las cotas superiores (llamada ***supremo***) coincide con el máximo absoluto de la función. Del mismo modo, la mayor de las cotas inferiores (llamada ***ínfimo***) coincide con el mínimo absoluto.

Sin embargo, puede que una función esté acotada superiormente y/o inferiormente y sin embargo no tener máximo ni mínimo absolutos como en el siguiente ejemplo.



Cota superior: $M = 1.8$
Cota inferior: $N = -1.8$
Sin embargo no tiene extremos absolutos ni relativos.

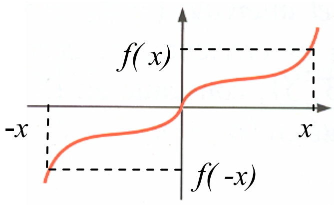
3. SIMETRÍA Y PERIODICIDAD
3.1. FUNCIONES SIMÉTRICAS



- f es ***simétrica respecto del eje de ordenadas (OY)*** si:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

Se dice que f es una ***función par.***

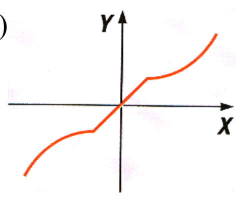


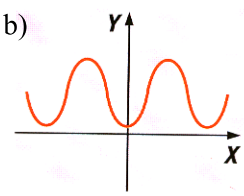
- f es ***simétrica respecto del origen de coordenadas O(0,0)*** si:

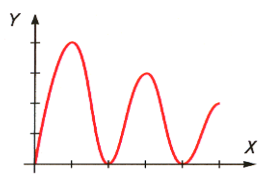
$$f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

Se dice que f es una ***función impar.***

Ejemplo 1: *Estudia las simetrías de las siguientes funciones:*

a) 

b) 

c) 

Ejemplo 2: *Estudia, analíticamente, si estas funciones presentan algún tipo de simetría.*
$a)\ f(x) = x^6 - x^2 \quad b)\ f(x) = x^3 - 2x \quad c)\ f(x) = x^5 + 2x \quad d)\ f(x) = x^3 - x^2$

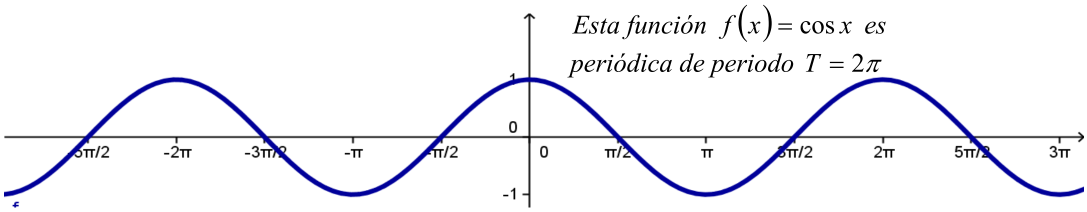
3.2. FUNCIONES PERIÓDICAS

f es ***periódica de periodo T***, si existe un número real T tal que:

$$f(x+T)=f(x) \quad \forall\, x\in Dom(f)$$

Fíjate: 2T, 3T… también son periodos de T.

A **T** se le llama **periodo principal**.



Esta función $f(x)=\cos x$ es periódica de periodo $T=2\pi$

4. OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas dos funciones ***f*** y ***g***, se define:

Suma de *f* y *g*: $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \;\; \forall \;\; x\in Dom(f+g)=Dom(f)\cap Dom(g)$

Diferencia de *f* y *g*: $(f-g)(x)=f(x)-g(x) \;\; \forall \;\; x\in Dom(f-g)=Dom(f)\cap Dom(g)$

Producto de *k* $\in\Re$ y *f*: $(kf)(x)=k\cdot f(x) \;\; \forall \;\; x\in Dom(kf)=Dom(f)$

Producto de *f* y *g*: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \;\; \forall \;\; x\in Dom(f\cdot g)=Dom(f)\cap Dom(g)$

Cociente de *f* y *g*: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \;\; \forall \;\; x\in Dom\left(\dfrac{f}{g}\right)=Dom(f)\cap Dom(g)$ con $g(x)\neq 0$

Ejemplo 1: *Si* $f(x)=3x^2-5x+2$ *y* $g(x)=x+4$, *calcular:*

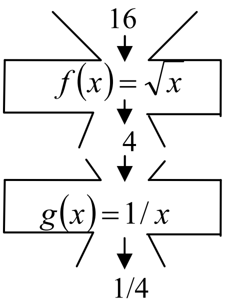
$$a)\ f+g \quad b)\ f-g \quad c)\ 3f \quad d)\ -f \quad e)\ f\cdot g \quad f)\ \frac{f}{g} \quad g)\ 2f+3g \quad h)\ \frac{1}{f}$$

Ejemplo 2: *Si* $f(x)=x^2-2$ *y* $g(x)=\dfrac{x}{x-4}$, *calcular:*

$$a)\ f+g \quad b)\ f-g \quad c)\ f\cdot g \quad d)\ 3\cdot f \quad e)\ \frac{f}{g} \quad f)\ 5f-3g \quad g)\ \frac{1}{g} \quad h)\ -g$$

5. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Consideremos las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x}$.



A 16 le hemos aplicado f: $f(16)=\sqrt{16}=4$.

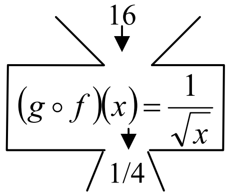
A 4 le hemos aplicado g: $g(4)=\dfrac{1}{4}$.

$$16 \xrightarrow{f} f(16)=4 \xrightarrow{g} g(f(16))=g(4)=\frac{1}{4}$$

$$g\circ f$$

Pretendemos construir una nueva función que transforme 16 en 1/4 directamente:

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g(f(x))=g(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow g(f(16))=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$$



Esta nueva función se representa por $g\circ f$ y se denomina **composición** de f y g.

$$\boxed{(g\circ f)(x)=g(f(x))} \qquad Dom(g\circ f)=\{x\in Dom(f)\,/\, f(x)\in Dom(g)\}$$

Observación:

$g\circ f \rightarrow$ Se lee ***f*** compuesta con ***g***.

$f\circ g \rightarrow$ Se lee ***g*** compuesta con ***f***.

En general, $f\circ g\neq g\circ f$, es decir, **no cumple** la propiedad **conmutativa**.

Ejemplo: *Si* $f(x)=x^2-5x \quad g(x)=\sqrt{x}$.

a) *Obtén* $(g\circ f)(9)$ *sin calcular la función* $g\circ f$.

$$(g\circ f)(9)=g(f(9)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(9)=36}}{=} g(36)=\sqrt{36}=6$$

b) *Calcula* $(g\circ f)(9)$ *obteniendo previamente* $g\circ f$.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-5x)=\sqrt{x^2-5x}\Rightarrow (g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-5x}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(9)=\sqrt{9^2-5\cdot 9}=\sqrt{36}=6$$

c) *Calcula* $f\circ g$.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}=x-5\sqrt{x}$$

Observa: $f\circ g\neq g\circ f$

Ejercicio: *Obtén* $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ *y* $g\circ g$ *en los siguientes casos:*

a) $f(x)=2x+1 \quad g(x)=x^3$.

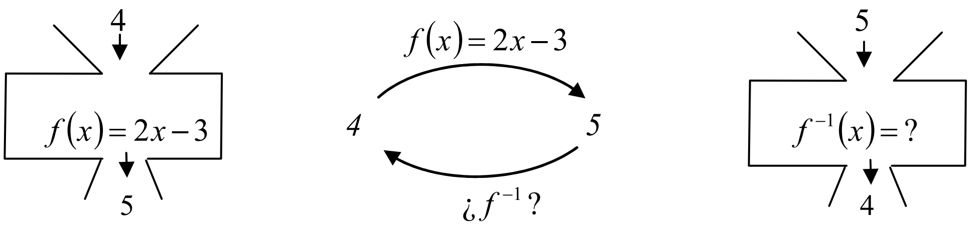
b) $f(x)=x^4+1 \quad g(x)=x^2$.

c) $f(x)=x^2+1 \quad g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

d) $f(x)=\sqrt{x+2} \quad g(x)=\dfrac{1}{x}$.

6. *FUNCIÓN INVERSA*

Dada la función $f(x)=2x-3$ busco otra función que "actúe al revés".



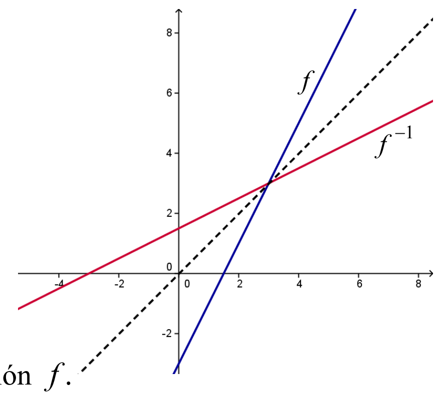
Para obtenerla seguimos los siguientes pasos:

1º) Escribo: $y=2x-3$

2º) Despejo ***x***: $x=\dfrac{y+3}{2}$

3º) Cambio ***x*** por ***y*** y viceversa: $y=\dfrac{x+3}{2}$

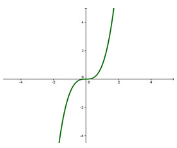
4º) Cambio ***y*** por $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$



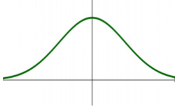
A f^{-1} se le llama **función inversa** (o recíproca) de la función f.

No todas las funciones tienen inversa. **Únicamente** las que son **inyectivas**.

Recuerda:
f inyectiva si
$f(x)=f(y)$
$\Rightarrow x=y$



Inyectiva



No inyectiva

Propiedad 1: Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la recta $y=x$. (Observa la gráfica del ejemplo anterior).

Propiedad 2: $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$. En este caso la composición es conmutativa.

En el ejemplo anterior:

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{x+3}{2}\right)=\cancel{2}\,\frac{x+3}{\cancel{2}}-3=x+3-3=x\Rightarrow (f\circ f^{-1})(x)=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2x-3)=\frac{2x-\cancel{3}+\cancel{3}}{2}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}=x\Rightarrow (f^{-1}\circ f)(x)=x$$

Ejemplo 1: *Calcula* f^{-1} *en los siguientes casos y comprueba que* $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = i$.

Recuerda: $i(x)=x$ es la función identidad

a) $f(x)=x^3-6$

$$y=x^3-6\Rightarrow x^3=y+6\Rightarrow x=\sqrt[3]{y+6};$$

$$y=\sqrt[3]{x+6}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+6}$$

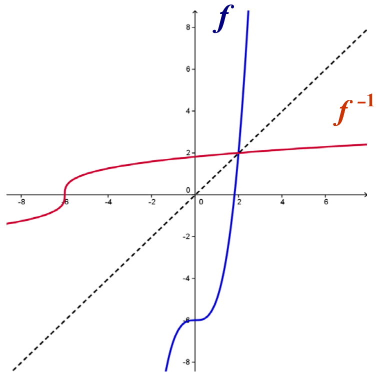
Veamos que $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = i$

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(x^3-6\right)=$$

$$=\sqrt[3]{x^3-\cancel{6}+\cancel{6}}=\sqrt[3]{x^3}=x$$

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f(f^{-1}(x))=f\left(\sqrt[3]{x+6}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3-6=x+\cancel{6}-\cancel{6}=x$$



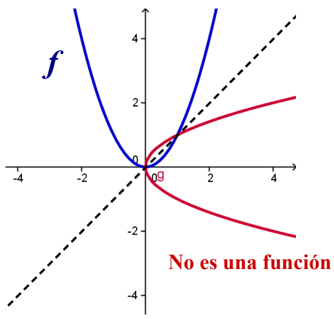
b) $f(x)=2x-5$

c) $f(x)=\dfrac{1}{2x+6}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

e) $f(x)=2^{3x+1}$

Ejemplo 2: *Si* $f(x)=x^2$ *obtén, si es posible,* f^{-1}.



$$y=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{y}\\ x=-\sqrt{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ y=-\sqrt{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f^{-1}(x)=\sqrt{x}\\ f^{-1}(x)=-\sqrt{x}\end{cases}$$ ¿Cuál elegimos?

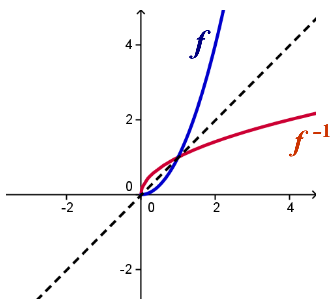
Esto ocurre porque f **no es** inyectiva.

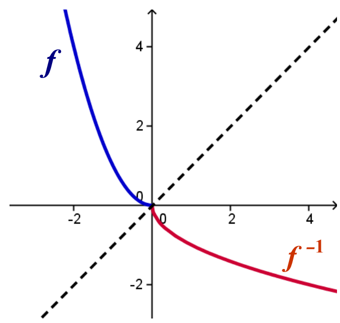
En este caso podemos descomponer f en dos tramos en los que sí lo es y tendrá su inversa respectiva en uno de ellos:

$$f(x)=x^2 \text{ en } [0,+\infty)\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

$$f(x)=x^2 \text{ en } (-\infty,0]\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$$

Observa las gráficas en cada tramo:





Fíjate:

$$f(a)=b\Rightarrow f^{-1}(b)=a$$