4. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

4.1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN: INTEGRACIÓN POR PARTES.

Este método de integración basease na derivada do produto de dúas funcións. Aplicase a seguinte fórmula:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Cando se aplica este método, ás integrais ás que se lle poda aplicar, a dificuldade está en escoller, na integral de partida, quen é ***u*** e quen é ***dv*** (***dv*** sempre terá que ter a ***dx***).

Exemplos:

1. $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x\, dx \Rightarrow v = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2$

2. Algunhas veces ao aplicar este método aparécenos unha integral máis sinxela á que lle volvemos a aplicar a integración por partes (ou calquera outro método). Así temo-lo seguinte exemplo:

2. $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2e^x - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{\mathrm{I}} = x^2e^x - 2\underbrace{\left(xe^x - e^x\right)}_{\mathrm{I}} = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \quad dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

(Aplicamoslle partes a I) $\mathrm{I} = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x \quad \left(u = x \Rightarrow du = dx;\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x\right)$

3. Outras veces pode ocorrer que despois de desenrolar, unha ou máis veces, a integral aparece a mesma integral de partida cambiada de signo, entón despexámola como se fose unha ecuación, temo-lo seguinte exemplo (carioca que morde o rabo):

$\underbrace{\int e^x \cos x dx}_{\mathrm{I}} = e^x \cos x - \int -\operatorname{sen} x e^x dx = (\text{aplicamos partes}) = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx =$

$u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx$
$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x dx$
$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$= e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{\mathrm{I}}$ Obtivemos entón :

$\int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) - \int e^x \cos x dx \underset{despexando}{\Rightarrow} 2\int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) \Rightarrow$

$\boxed{\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)}$ que é a solución á integral de partida

CANDO APLICAR ESTE MÉTODO?

As integrais que conteñan logaritmos, funcións trigonométricas inversas, produtos de potencias (x^n), ou polinomios P(x), con logaritmos, exponenciais e funcións trigonométricas intégranse, na maior parte das ocasións, aplicando unha ou varias veces o proceso de integración por partes. É dicir as integrais dos seguintes xeitos:

1. As integrais da forma

$\int P(x)\cdot e^{ax} dx$ $\boxed{\mathbf{u=P(x)}\text{=polinomio e } \mathbf{dv=e^{ax}\, dx}}$

Terase que aplicar o método tantas veces como sexa o grao de P(x).

2. As integrais da forma

$\int P(x)\cdot sen(ax)dx$ ou $\int P(x)\cdot \cos(ax)dx$

$\boxed{\mathbf{u=P(x)} \quad \text{e} \quad \mathbf{dv=}\boldsymbol{cos\ (ax)}\ \mathbf{dx}}$

Terase que aplicar o método tantas veces como sexa o grao de P(x).

3. As integrais do seguinte xeito:

$\int e^{ax} \cos cx\, dx$ ou $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$

aplícaselles este método e sempre chegamos a integral de partida, polo que teríamos que despexar, tal como fixemos no exemplo 3.(Carioca que morde o rabo.)

4. Integrais do xeito:

$\int P(x)\cdot \ln(ax)dx$

$u = \ln(ax)$
$dv = P(x)dx$

EXERCICIOS RESOLTOS

1. $\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x - (-\cos x) = x \operatorname{sen} x + \cos x$

$u = x \Rightarrow du = dx \quad dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$

2. $\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \quad dv = dx \Rightarrow v = x$

3. $\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx =$

$u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx \quad dv = dx \Rightarrow v = x$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

4. $\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1+x^2}$

$u = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad dv = dx \Rightarrow v = x$

5. $\int \underbrace{x^2 \operatorname{sen} x\,dx}_{\mathrm{I}} = -x^2\cos x - \int -2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2\underbrace{\int x\cos x\,dx}_{\mathrm{II}} =$

$\mathrm{I}:\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$ $\qquad$ $\mathrm{II}:\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx\right) = -x^2\cos x + 2(x\operatorname{sen} x + \cos x) = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x$$

Neste exercicio aplicamos dúas veces o método de integración por partes (en I e II).

6. $\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx =$

$\boxed{\begin{array}{l} u = \operatorname{sen} 3x \Rightarrow du = 3\cos 3x\,dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}}$ $\qquad$ $\boxed{\begin{array}{l} u = \cos 3x \Rightarrow du = -3\operatorname{sen} 3x\,dx \\ dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}}$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(-3)\operatorname{sen} 3x\,dx\right) = e^{2x}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{4}\cos 3x\right) - \frac{9}{4}\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$$

Obtivemos outra vez a integral de partida, polo que despexaremos:

$$\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx = e^{2x}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{4}\cos 3x\right) - \frac{9}{4}\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx = e^{2x}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x - \frac{3}{4}\cos 3x\right) \Rightarrow \boxed{\int \mathbf{e^{2x}\,sen3x\,dx} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{13}}\mathbf{e^{2x}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{sen3x} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\mathbf{cos3x}\right)}$$

Que é a integral que queriamos buscar.

7. $\int x e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}x e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}x e^{-3x} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) = -\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$\boxed{u = x \Rightarrow du = dx \;\Big|\; dv = e^{-3x}dx \Rightarrow v = \int e^{-3x}dx = \frac{-1}{3}\int(-3)e^{-3x}dx = \frac{-1}{3}e^{-3x}}$

8. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\right)dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$

$\boxed{u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \;\Big|\; dv = \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow v = \int x^{-2}dx = \frac{-1}{x}}$

9. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx = x\operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = x\operatorname{tg} x + \ln(\cos x)$

$\boxed{u = x \Rightarrow du = dx \;\Big|\; dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x}$

EXERCICIOS.

Calcula as seguintes integrais (aplica o método de integración por partes).

1. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ $\qquad$ **Solc.:** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$

2. $\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$ $\qquad$ **Solc.:** $2\cos x - x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x$

3. $\int x\cos 3x\,dx$ $\qquad$ **Solc.:** $\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$

4. $\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx$ $\qquad$ **Solc.:** $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$ [1]

5. $\int e^{\arccos x}dx$ $\qquad$ **Solc.:** $\frac{1}{2}e^{\arccos x}\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)$

6. $\int x3^x dx$ $\qquad$ **Solc.:** $3^x\left(\frac{x}{\ln 3} - \frac{1}{(\ln 3)^2}\right)$

7. $\int \frac{x\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx$ $\qquad$ **Solc.:** $\frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

8. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$ $\qquad$ **Solc.:** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$

9. $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx$ $\qquad$ **Solc.:** $\frac{-\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}$

10. $\int (x\ln x)^2 dx$ $\qquad$ **Solc.:** $\frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3$

[1] Lembra que sen2x=2 senx cosx e cos2x= $\cos^2$x – sen^2x