4.4 Integrales racionales

El método de integrales racionales consiste en descomponer una fracción polinómica en fracciones simples cuyas integrales son o logaritmos neperianos o arcotangentes. Las integrales que deseamos resolver son del tipo:

$$I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Anexo: vamos a resolver primero las integrales que aparecerán en las integrales racionales:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\cdot \ln(x-a)$

Ejemplo: $\int \frac{5}{x-2}dx = 5\cdot\ln(x-2)$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \int A\cdot(x-a)^{-n}\,dx = \frac{A\cdot(x-a)^{-(n-1)}}{-n+1} = \frac{A}{(-n+1)\cdot(x-a)^{n-1}}$

Ejemplo: $\int \frac{3}{(x-4)^3}dx = \int 3\cdot(x-4)^{-3} = \frac{3(x-4)^{-2}}{-2} = -\frac{3}{2(x-4)^2}$

3) $\int \frac{mx+n}{x^2+bx+c}dx =$ (con x^2+bx+c sin raíces reales)= arcotangente + logaritmo, veamos con un ejemplo

Ejemplo:

$$I=\int \frac{2x+3}{x^2+4x+8}dx = (\textit{buscamos la derivada en el numerador}) = \int \frac{2x+4-1}{x^2+4x+8} =$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+4x+8}dx}_{I_2} = \ln(x^2+4x+8)+I_2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{\frac{1}{2}dx}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

$$I = \ln(x^2+4x+8) + \frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)+c$$

Caso 1: grado(P(x))≥grado(Q(x)) → hacemos la división de forma que tendremos que integral el cociente (que es un polinomio) y obtenemos otra función racional pero donde ahora grado del numerador menor que el del denominador y por tanto estamos en el caso 2.

Ejemplo:

(23) $I=\int \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+3x^2+2x}dx$

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & +3x^2 & -4 & x^3+3x^2+2x \\ \hline -x^3 & -3x^2 & -2x & 1 \\ & & \underbrace{-2x-4} & \end{array} \rightarrow$$

$$\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+3x^2+2x} = \frac{1\cdot(x^3+3x^2+2x)-2x-4}{x^3+3x^2+2x} = 1-\frac{2x+4}{x^3+3x^2+2x}$$

$$I=\int 1dx + \int \frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx = x + \int \frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx$$

(24) $I=\int \frac{x^4+3x^2-2x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$$\begin{array}{l|l} x^4 \quad +3x^2 \quad -2x \quad +5 & x^3-x^2-x+1 \\ \hline -x^4+x^3+x^2 \quad -x & x+1 \\ \quad x^3+\ 4x^2-3x+5 & \\ \quad -x^3+\ x^2+\ x\ \ -1 & \\ \qquad \underbrace{5x^2-2x+4} & \end{array}$$

$$\frac{x^4+3x^2-2x+5}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{5x^2-2x+4}{x^3-x^2-x+1}$$

$$I=\int (x+1)dx + \int \frac{5x^2-2x+4}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{5x^2-2x+4}{x^3-x^2-x+1}dx$$

Caso 2: grado(P(x))<grado(Q(x)). Distinguimos entre 3 casos:

a) *El denominador se puede descomponer por producto de factores simples distintos:* $Q(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\ldots(x-a_n)}dx = \int\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}\right)dx$$

Ejemplo: continuamos las integral (23) del ejemplo anterior:

(25) I=$\int\frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx$

$$\frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}=\frac{-2x-4}{x(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+1)}$$. Calculo de A, B, C:

$$\frac{-2x-4}{x(x+2)(x+1)}=\frac{A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x+1)} \rightarrow$$

$A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2)$=-2x-4

- si x=0: 2A=-4 → A=-2
- si x=-2: 2B=0 → B=0
- si x=-1: -C=-2 → C=2

$$I=\int\frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx=-2\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x+1}=-2\ln(x)+2\ln(x+1)+C=2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+C$$

(26) I=$\int\frac{x+3}{x^2-4x+3}dx=3\cdot\ln(x-3)-2\ln(x-1)+C$ (hacer por el alumno)

b) *El denominador se puede descomponer por producto de factores, alguno de ellos no simple: Q(x)=(x-a*$_1$*)*^{n1}*·(x-a*$_2$*)· … ·(x-a*$_n$*)*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1}\cdot(x-a_2)...(x-a_n)}dx=\int\left(\frac{A_1^1}{x-a_1}+\frac{A_1^2}{(x-a_1)^2}+...+\frac{A_1^{n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_n}{x-a_n}\right)dx$$

Ejemplo:

(27) $I=\int\frac{3x^2-5x}{x^3+x^2-5x+3}dx$

$$\frac{3x^2-5x}{x^3+x^2-5x+3}=\frac{3x^2-5x}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}$$

$$\frac{3x^2-5x}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$$

3x^2-5x=$A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2$

si x=1: 4B=-2 → B=-1/2

si x=-3: 16C=42 → C=21/8

si x=0: 0=-3A+3B+C → $A=\frac{C+3B}{3}=\frac{\frac{21}{8}-\frac{3}{2}}{3}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

$$I=\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{21}{8}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{3}{8}\ln(x-1)+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{21}{8}\ln(x+3)+C$$

(28) I=$\int\frac{3x-5}{x(x+2)^2}dx=\frac{5}{4}\ln(x+2)-\frac{5}{4}\ln(x)-\frac{11}{2(x+2)}+C$ (hacer por el alumno)

c) *El denominador se puede descomponer por producto de factores, alguno de ellos es un factor de segundo grado: Q(x)=(x-a*$_1$*)·(x-a*$_2$*)· … ·(x*^{2}*+bx+c)*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)...(x^2+bx+c)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+...+\frac{Cx+D}{x^2+bx+c}\right)dx$$

Ejemplo:

(29) $\int\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)}\right)dx$

$$\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}=\left(\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)}\right)\rightarrow\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}=\left(\frac{A(x^2+2x+5)+x(Cx+D)}{x(x^2+2x+5)}\right)$$

3x-5=A(x^2+2x+5)+x(Cx+D)

- si x=0: 5A=-5 → A=-1
- si x=1: -2=8A+C+D → 6=C+D
- si x=-1: -8=4A+C-D → -4=C-D

Resolviendo el sistema C=1, D=5

$$I=\int\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{x+5}{(x^2+2x+5)}\right)dx=-\ln(x)+\int\frac{x+5}{(x^2+2x+5)}dx$$

$$\int\frac{x+5}{(x^2+2x+5)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+10}{(x^2+2x+5)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{8}{(x^2+2x+5)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\int\frac{4}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+2\int\frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+2arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

$$I=-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+2arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$