UNIDAD 10 PROBABILIDAD

La probabilidad se ocupa del estudio de los fenómenos aleatorios, es decir, fenómenos cuya ocurrencia está sujeta al azar. En concreto, la Teoría de Probabilidades pretende modelizar matemáticamente el comportamiento de estos fenómenos que son por naturaleza imprevisibles ayudando en la toma de decisiones de cualquier situación real en la que aparezcan este tipo de fenómenos.

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS

Distinguimos dos tipos de ***fenómenos o experimentos***:

Deterministas: Repetidos en las mismas condiciones presentan los mismos resultados (No dependen del azar y se puede predecir el resultado).

Ejemplos: *Experimentos físicos como el espacio recorrido por un móvil a velocidad constante o el movimiento de los planetas alrededor del Sol. En ambos casos conocemos en cada instante y con precisión la posición del móvil y de los planetas gracias a las ecuaciones que rigen sus movimientos.*

Aleatorios: Conocidos todos sus posibles resultados y repetidos en las mismas condiciones, NO se puede predecir ningún resultado.
Estos fenómenos son objeto de estudio del Cálculo de Probabilidades y son los que nos van a interesar analizar.

Ejemplos: *Resultado obtenido en la tirada de un dado.*
Resultado obtenido en el lanzamiento de una moneda.

Definiciones básicas:

Suceso elemental o punto muestral: Cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio que no se puede descomponer en otros más simples.

Espacio muestral: Conjunto formado por todos los sucesos elementales. Se representa por $\boldsymbol{E}$ (o también por $\boldsymbol{\Omega}$).

Suceso compuesto (o simplemente suceso): Cada subconjunto del espacio muestral. Es decir, está formado por la unión de varios sucesos elementales.

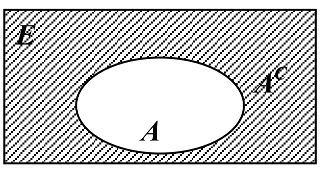
Espacio de sucesos: En un espacio muestral finito $\boldsymbol{E}$ formado por $\boldsymbol{n}$ sucesos elementales, se podrán contabilizar 2^n sucesos que forman el llamado *espacio de sucesos* $\mathscr{P}(\boldsymbol{E})$. Es decir, cualquier posible suceso del experimento aleatorio será un elemento de $\mathscr{P}(E)$.

Si $\boldsymbol{E}$ es el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, se dice que *se verifica, se realiza o se presenta* un suceso A si al efectuar una prueba del experimento, se obtiene uno de los sucesos elementales que componen ese suceso.

Suceso imposible o suceso nulo: Suceso que nunca ocurre al realizar un experimento aleatorio. Se representa por ϕ.

Suceso seguro: Suceso que ocurre siempre al realizar un experimento aleatorio. Se representa como el espacio muestral $\boldsymbol{E}$.

Suceso contrario o complementario de un suceso *A:* Suceso que se presenta cuando NO ocurre el suceso A. Se representa por $\boldsymbol{A^C}$ (o también por $\overline{\boldsymbol{A}}$).



Observa que: $\left(A^C\right)^C = A$

$$E^C = \phi$$

$$\phi^C = E$$

Sucesos incompatibles: Dos sucesos A y B son incompatibles si no tienen ningún suceso elemental común. Es decir, no pueden ocurrir simultáneamente. En caso contrario diremos que los sucesos A y B son **compatibles**. Fíjate, los sucesos elementales son siempre incompatibles.

Ejemplo 1: *Experimento aleatorio consistente en lanzar un dado de 6 caras.*

Sucesos elementales: "Salir 1"$=\{1\}$, "Salir 2"$=\{2\}$, "Salir 3"$=\{3\}$,
"Salir 4"$=\{4\}$, "Salir 5"$=\{5\}$, "Salir 6"$=\{6\}$.

Espacio muestral: $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Espacio de sucesos: $\mathscr{P}(E)$ tendrá $2^6=64$ sucesos.

Algunos sucesos compuestos: A = "Salir par"$=\{2, 4, 6\}$, B = "Salir múltiplo de 3"$=\{3, 6\}$
C = "Salir primo"$=\{2, 3, 5\}$

Suceso contrario de A = "Salir par": A^C = "Salir impar" $=\{1, 3, 5\}$

Suceso contrario de B = "Salir múltiplo de 3": B^C = "No salir múltiplo de 3" $=\{1, 2, 4, 5\}$

Un suceso incompatible con C = "Salir primo" es "Salir 4" $=\{4\}$.

Otro suceso incompatible es "Salir 4 ó 6" $=\{4, 6\}$. Un suceso imposible es ϕ = "Salir 7"$=\{7\}$.

Ejemplo 2: *Experimento aleatorio consistente en lanzar dos veces una moneda.*

Sucesos elementales: "Salir 2 caras"$=\{CC\}$, "Salir cara y cruz"$=\{CX\}$,
"Salir cruz y cara"$=\{XC\}$, "Salir dos cruces"$=\{XX\}$.

Espacio muestral: $E=\{CC, CX, XC, XX\}$. $\mathscr{P}(E)$ tendrá $2^4=16$ sucesos distintos.

Algunos sucesos compuestos: A = "Salir al menos una cara"$=\{CC, CX, XC\}$,
B = "Salir lo mismo en las dos tiradas"$=\{CC, XX\}$

Suceso contrario de A = "No salir ninguna cara": A^C = "Salir dos cruces" $=\{XX\}$

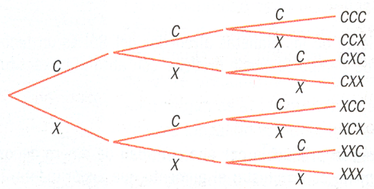
Un suceso incompatible con C = "Salir dos caras"$=\{CC\}$ es D= "Salir dos cruces" $=\{XX\}$.

En muchos casos resulta conveniente utilizar un **diagrama de árbol** para obtener el espacio muestral de un experimento aleatorio. Es el caso de los ***experimentos compuestos***, que son los que constan de dos o más experimentos aleatorios simples. En tal caso, el espacio muestral del experimento compuesto se obtiene como el producto cartesiano de los experimentos simples que lo forman. Fíjate en el *Ejemplo 2*: $E=E_1\times E_2$ siendo $E_i=\{C, X\}$ $i=1,2$.
El *Ejemplo 3* proporciona otro modelo de experimento compuesto.

Ejemplo 3: *Experimento aleatorio consistente en lanzar tres veces una moneda.*

Espacio muestral: $E=\{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$

Utilicemos un diagrama en árbol para obtener el espacio muestral.



Observa que: $E=E_1\times E_2\times E_3$ siendo $E_i=\{C, X\}$ $i=1,2,3$.

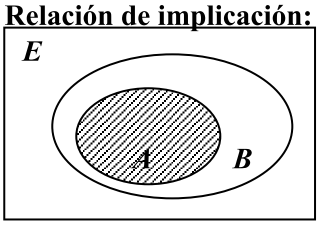
El espacio muestral tendrá: $2\times 2\times 2=2^3=8$ sucesos elementales.
(O bien $VR_{2,3}=2^3=8$).

En total $\mathscr{P}(E)$ tendrá $2^8=256$ sucesos distintos.

Ejercicio: Obtener el espacio muestral del experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda. Obtén el número de sucesos de $\mathscr{P}(E)$.

2. *OPERACIONES CON SUCESOS*

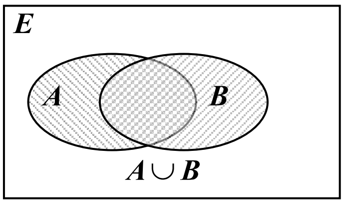
a) <u>Relación de implicación:</u> Se dice que un suceso A implica a otro B si siempre que ocurre A ocurre B. Se escribe $A\subset B$.



Ejemplo: Lanzamiento de un dado.
A = "Salir un 2"$=\{2\}$ B = "Salir par"$=\{2, 4, 6\}$ $A\subset B$

Si $A\subset B$ y $B\subset A$ se dice que los sucesos A y B son iguales y se escribe $A=B$.

b) Unión de dos sucesos $A \cup B$: Suceso que se presenta cuando ocurre al menos uno de los dos sucesos A o B. Es decir, es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y B.



Propiedades:

1) $A \cup B = B \cup A$ (conmutativa)
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asociativa)
3) $A \cup A^C = E$
4) $A \cup A = A$
5) $A \cup E = E$
6) $A \cup \phi = A$

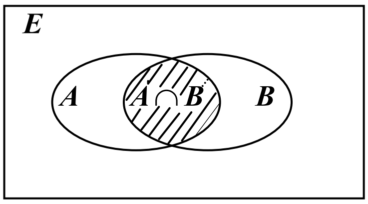
Ejemplo: *Lanzamiento de un dado.*

A = "Salir par"$=\{2, 4, 6\}$ B = "Salir múltiplo de 3"$=\{3, 6\}$ C = "Salir impar"$=\{1, 3, 5\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ $\quad A \cup C = E$ $\quad B \cup C = \{1, 3, 5, 6\}$

Una colección de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son ***exhaustivos*** si siempre que se realiza el experimento aleatorio ocurre al menos uno de ellos, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.
En el ejemplo anterior A y C son exhaustivos.

c) Intersección de dos sucesos $A \cap B$: Suceso que se presenta cuando ocurren simultáneamente A y B. Es decir, es el suceso formado por todos los sucesos elementales <u>comunes</u> de A y B.



Propiedades:

1) $A \cap B = B \cap A$ (conmutativa)
2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativa)
3) $A \cap A^C = \phi$
4) $A \cap A = A$
5) $A \cap E = A$
6) $A \cap \phi = \phi$

Ejemplo: *Lanzamiento de un dado.*

A = "Salir par"$=\{2, 4, 6\}$ B = "Salir múltiplo de 3"$=\{3, 6\}$ C = "Salir impar"$=\{1, 3, 5\}$

$A \cap B = \{6\}$ $\quad A \cap C = \phi$ $\quad B \cap C = \{3\}$

Propiedad: Dos sucesos A y B son incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$

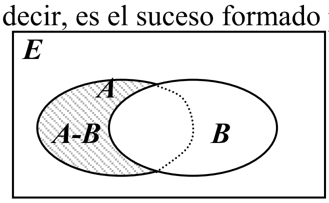
Otras propiedades de la unión e intersección de sucesos:

a) Simplificativa: $\begin{cases} A \cup (B \cap A) = A \\ A \cap (B \cup A) = A \end{cases}$ b) Distributiva: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

c) Leyes de Morgan: $\begin{cases} 1^{a})\ (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\ 2^{a})\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C \end{cases}$

d) Diferencia simétrica: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

d) Diferencia de dos sucesos *A-B*: Suceso que se presenta cuando ocurre A, pero NO ocurre B. Es decir, es el suceso formado por los sucesos elementales que son de A pero no de B.



Ejemplo: *Lanzamiento de un dado.*

A= "Salir par" $= \{2, 4, 6\}$; B = "Salir múltiplo de 3"$=\{3, 6\}$

C = "Salir impar" $= \{1, 3, 5\}$

$A - B = \{2, 4\}$; $A - C = A$; $B - C = \{6\}$; $B - A = \{3\}$;

$C - A = C$; $C - B = \{1, 5\}$

Propiedad: $A - B = A \cap B^C$

3. PROBABILIDAD

Existen distintas concepciones del término ***probabilidad***.

a) ***Concepción frecuentista. (Von Mises, 1883-1953)***

Se basa en el *principio de estabilidad de las frecuencias relativas* (también llamada ***ley del azar*** *o* ***ley de los grandes números***) que dice que:

> *Cuando repetimos un experimento aleatorio "muchas veces", la frecuencia relativa de un suceso A tiende a aproximarse a un valor fijo.*

Este valor fijo (límite de las frecuencias relativas asociadas a ese suceso) se define como ***probabilidad*** del suceso A.

$$P(A)=\lim_{n\to+\infty} f_n(A)$$

Siendo $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ la frecuencia relativa del suceso *A en el n-ésimo experimento aleatorio.*

Inconveniente: Nos obliga a repetir indefinidamente el número de pruebas del experimento para conocer el límite de las frecuencias relativas, lo cual no es factible.

b) ***Concepción clásica: Regla de Laplace.(Pierre Simon Laplace, 1749-1827)***

Dado un experimento aleatorio en el que sólo son posibles *n* resultados (sucesos elementales) y todos tienen la misma posibilidad de ocurrencia (sucesos equiprobables), se define la ***probabilidad*** de un suceso *A* como:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{nº de casos favorables a } A}{\text{nº de casos posibles}}}$$

Nota 1: *nº de casos favorables a* $A\to$ Es el número de sucesos elementales que forman *A*.
nº de casos posibles $\to$ Es el número de sucesos elementales del espacio muestral *E*.

Nota 2: Es claro que $0\le P(A)\le 1$.
Cuanto más se acerque *P(A)* a 1, el suceso *A* ocurrirá con mayor facilidad.
Cuanto más se acerque *P(A)* a 0, más difícil será su ocurrencia.

Inconvenientes:
1. No tiene sentido para experimentos aleatorios con un número infinito de posibles resultados.
2. Los resultados deben ser equiprobables.
3. Falta de rigurosidad en la definición ya que exige resultados igualmente probables, es decir, el concepto de probabilidad interviene en su propia definición.

Ejemplo: *Lanzamos un dado. Halla la probabilidad de obtener los siguientes sucesos:*

a) Un número impar.
Espacio muestral $E=\{1,2,3,4,5,6\}$
A = "Salir nº impar"= $\{1,3,5\}$ $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

b) Un número primo.
B = "Salir nº primo" = $\{2,3,5\}$ $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

c) Un múltiplo de 3.
C = "Salir múltiplo de 3" = $\{3,6\}$ $P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

d) Un múltiplo de 5.
D = "Salir múltiplo de 5" = $\{5\}$ $P(D)=\frac{1}{6}$

c) ***Concepción axiomática de Kolmogórov*. *(Andréi Nikolaevich Kolmogórov, 1903-1988)***

Dado un espacio muestral $\boldsymbol{E}$ asociado a un experimento aleatorio, se define el concepto de ***probabilidad*** como una función matemática:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}:\mathscr{P}(\boldsymbol{E}) &\longrightarrow \Re \\ \boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$ siendo $\mathscr{P}(E)$ el espacio de sucesos de $\boldsymbol{E}$

de modo que a cada suceso $A\in\mathscr{P}(E)$ le va a asignar un número real $P(A)$ llamado ***probabilidad de A,*** y verificando tres propiedades llamadas ***axiomas de probabilidad***:

> ***A1)*** $P(A)\geq 0$ para cualquier suceso $A\in\mathscr{P}(E)$
>
> ***A2)*** $P(E)=1$
>
> ***A3)*** Si *A* y *B* son sucesos incompatibles (es decir, $A\cap B=\phi$) entonces
> $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

A la terna $(\boldsymbol{E},\ \mathscr{P}(\boldsymbol{E}),\ \boldsymbol{P})$, se le llama ***espacio de probabilidad (o probabilístico)***.

De estos axiomas se deducen el resto de propiedades:

> ***Propiedades: (Consecuencias de los axiomas de probabilidad)***
>
> 1) $0\leq P(A)\leq 1$
> 2) En general, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles dos a dos entonces
> $$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$
> 3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
> 4) $P(A^C)=1-P(A)$
> 5) $P(\phi)=0$
> 6) Si $A\subset B$ entonces $P(B-A)=P(B)-P(A)$
>
>   En consecuencia Si $A\subset B$ entonces $P(A)\leq P(B)$

La *definición axiomática de Kolmogórov del concepto de probabilidad* es tan general, que va a incorporar a las otras dos como casos particulares.

Ejemplo1: *Sean los sucesos A = "Persona morena" B = "Ojos marrones" $A\cap B$ = "Persona morena y con ojos marrones". Se sabe que P(A) = 0.6, P(B) = 0.7 y que P($A\cap B$) = 0.42. Calcula la probabilidad de que, elegida una persona al azar:*

a) No sea morena. *b) Sea morena o tenga los ojos marrones.*

Solución:

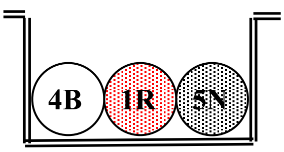
a) Fíjate que *"No sea morena"* = A^C. Por tanto:
$$P(A^C)=1-P(A)=1-0.6=0.4$$

b) *"Sea morena o tenga los ojos marrones"*=$A\cup B$, por tanto:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.7-0.42=0.88$$

Ejemplo 2: *Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. Se considera el experimento "sacar una bola al azar". Calcula las siguientes probabilidades:*

a) Salir bola blanca.
b) Salir bola roja.
c) Salir bola que no sea negra.
d) Salir bola que no sea roja.
e) Salir bola verde.
f) Salir bola blanca o negra.

Solución:



Total: 10 bolas

B = "Salir bola blanca" *R* = "Salir bola roja" $E=\{B,R,N\}$

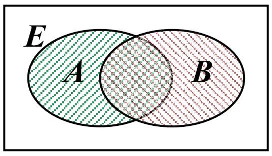
N = "Salir bola negra" *V*= "Salir bola verde"

a) $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ b) $P(R)=\frac{1}{10}$ c) $P(N^C)=1-P(N)=1-\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

d) $P(R^C)=1-P(R)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$ e) $P(V)=\frac{0}{10}=0$

f) $P(B\cup N)=P(B)+P(N)=\frac{2}{5}+\frac{5}{10}=\frac{9}{10}$ (Observa: B y N son incompatibles)

Ejemplo 3: *Disponemos de una baraja española de 40 cartas. Sea el suceso A = "Sacar un oro" y el suceso B = "Sacar una figura". Calcular la probabilidad de obtener un oro o una figura, al extraer una carta de la baraja utilizando las probabilidades de los sucesos A y B.*



Solución:

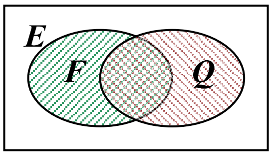
Hay que calcular $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ siendo el suceso $A\cap B=$ "Sacar un oro y una figura"

$P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ $P(B)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$ $P(A\cap B)=\frac{3}{40}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{3}{10}-\frac{3}{40}=\frac{19}{40}$.

Ejemplo 4: *De 200 estudiantes, 110 estudian Física, 70 Química y 30 ambas. Escogido un estudiante al azar:*

a) Halla la probabilidad de que estudie Física o Química.

b) Halla la probabilidad de que no estudie ni Física ni Química.



Solución:

Llamamos F = "Estudiar Física" Q = "Estudiar Química"

Es claro que $P(F)=\frac{110}{200}=\frac{11}{20}$ $P(Q)=\frac{70}{200}=\frac{7}{20}$ $P(F\cap Q)=\frac{30}{200}=\frac{3}{20}$

a) $P(F\cup Q)=P(F)+P(Q)-P(F\cap Q)=\frac{11}{20}+\frac{7}{20}-\frac{3}{20}=\frac{3}{4}$

b) $P(F^C\cap Q^C)\underset{\text{Ley de Morgan}}{=}P\left((F\cup Q)^C\right)=1-P(F\cup Q)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

Ejemplo 5: *Sea* $E=\{S_1,S_2,S_3\}$ *el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y* $P(S_1)=\frac{k}{6}$, $P(S_2)=\frac{k}{3}$, $P(S_3)=\frac{k}{2}$, *las probabilidades de los sucesos elementales. Si* $A=\{S_1,S_3\}$ *y* $B=\{S_1,S_2\}$, *calcula:*

a) El valor de k y la probabilidad de los sucesos elementales.

b) $P(A)$, $P(B)$, $P(A^C)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$.

Solución:

a) $1=P(E)=P(S_1\cup S_2\cup S_3)=P(S_1)+P(S_2)+P(S_3)\Rightarrow\frac{k}{6}+\frac{k}{3}+\frac{k}{2}=1\Rightarrow k=1$

$P(S_1)=\frac{1}{6}$, $P(S_2)=\frac{1}{3}$, $P(S_3)=\frac{1}{2}$.

b) $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, $P(A^C)=P(\{S_2\})=\frac{1}{3}$,

$P(A\cap B)=P(S_1)=\frac{1}{6}$, $P(A\cup B)=P(\{S_1,S_2,S_3\})=P(E)=1$.

Observa otra forma de calcular $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Y de calcular $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=1$.

Ejemplo 6: *Seis parejas de casados se encuentran en una fiesta. Si se escogen dos personas al azar, calcular la probabilidad de que A = "Ambas personas sean esposos".*

Solución:

$P(A)=\frac{6}{66}=\frac{1}{11}$ ya que hay $C_{12,2}=66$ formas de escoger dos personas al azar entre 12.

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

La probabilidad de un suceso hace referencia a todo el espacio muestral, pero existen ocasiones en las que se dispone información sobre la aparición de un resultado que afecta a la probabilidad que se quiere calcular. La probabilidad condicionada permite incorporar esta información y adecuar la probabilidad a la nueva situación.

4.1. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos A y B con $P(B)>0$, se llama ***probabilidad de A condicionado a B,*** y se escribe $P(A/B)$, a la probabilidad de que ocurra *A* supuesto que ha ocurrido *B*. Se calcula así:

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Los experimentos aleatorios ***compuestos,*** como ya sabemos, son el resultado de realizar varios experimentos aleatorios simples. Para calcular probabilidades asociadas a este tipo de experimentos es muy útil la siguiente propiedad consecuencia de lo anterior.

Regla de la probabilidad compuesta o probabilidad producto:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)}$$

Esta regla se puede generalizar para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_n/A_{n-1}\cap\ldots\cap A_2\cap A_1)\cdot P(A_{n-1}/A_{n-2}\cap\ldots\cap A_2\cap A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_1)$$

Propiedades:

$$\boxed{\begin{array}{l} a)\ P(A^C/B)=1-P(A/B)\\ b)\ P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)\end{array}}$$

Ejemplo 1: *Una determinada población está formada, a partes iguales, por hombres y mujeres. La probabilidad de que un individuo de esa población no lea ningún periódico es 0.25. Además, el porcentaje de individuos que o bien leen algún periódico o bien son hombres es el 95%. Se elige al azar una persona.*

a) Halla la probabilidad de "Ser hombre y leer algún periódico".

b) Halla la probabilidad de que lea algún periódico, sabiendo que es hombre.

Solución:

Llamamos H = "Ser hombre" M = "Ser mujer" L = "Leer algún periódico"

Sabemos que $P(H)=P(M)=0.5;\quad P(L^C)=0.25\Rightarrow P(L)=1-P(L^C)=0.75$

$P(H\cup L)=0.95$

a) $¿P(H\cap L)?$

$P(H\cup L)=P(H)+P(L)-P(H\cap L)\Rightarrow 0.95=0.5+0.75-P(H\cap L)$

Por tanto $P(H\cap L)=0.5+0.75-0.95=0.3$

b) $P(L/H)=\dfrac{P(L\cap H)}{P(H)}=\dfrac{0.3}{0.5}=0.6$

4.2. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Dos sucesos A y B son ***independientes*** si $\boxed{P(A/B)=P(A)}$ $\left(\textit{También}\ \ P(B/A)=P(B)\right)$.

Es decir, la aparición de uno de ellos NO cambia la probabilidad de que ocurra el otro.

Dos sucesos A y B son ***dependientes*** en caso contrario.

Nota: No confundas sucesos independientes con sucesos incompatibles.

> ***Propiedad (Teorema de caracterización de la independencia):***
> *A* y *B son sucesos independientes* $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

En general, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$$

Propiedad: Si *A y B* son dos sucesos independientes entonces:

a) A *y* B^C son independientes.

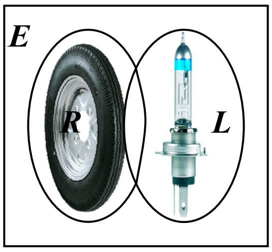
b) A^C *y* B son independientes.

c) A^C *y* B^C son independientes.

Ejemplo 2: *La probabilidad de que un conductor no lleve la rueda de repuesto es de 0.13 y la de que no lleve lámparas de repuesto es de 0.37. Se sabe que el 60% de los conductores llevan ambos repuestos.*

a) Calcula la probabilidad de que un conductor no lleve alguno de los dos repuestos.

b) ¿Son independientes los sucesos "Llevar rueda de repuesto" y "Llevar lámparas de repuesto"?



Solución:

Llamamos R = *"Llevar rueda de repuesto"* L = *"Llevar lámparas de repuesto"*

Sabemos que $P\left(R^C\right)=0.13 \Rightarrow P(R)=1-P\left(R^C\right)=0.87$

$P\left(L^C\right)=0.37 \Rightarrow P(L)=1-P\left(L^C\right)=0.63$ y $P(R\cap L)=0.6$

a) $P\left(R^C \cup L^C\right) \underset{\substack{Ley\ de \\ Morgan}}{=} P\left((R\cap L)^C\right)=1-P(R\cap L)=1-0.6=0.4$

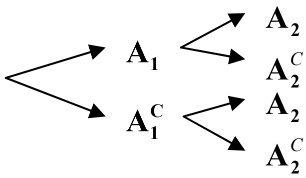
b) $P(R\cap L)=0.6$ pero $P(R)\cdot P(L)=0.87\cdot 0.63=0.5481$, por tanto, R y L no son independientes.

Los ***diagramas en árbol*** nos permiten calcular la probabilidad de un suceso de un **experimento compuesto** a partir de las probabilidades de los sucesos de los experimentos simples que lo forman.

Ejemplo 3: *Halla la probabilidad de que al extraer sucesivamente dos cartas de una baraja de 40, resulten ser dos ases:*

a) Sin devolver al mazo la primera carta extraída.

b) Devolviéndola antes de la segunda extracción.



Solución:

Se trata de un experimento compuesto. Llamamos S = *"Ambas cartas son ases"*

A_1 = *"La primera carta es un as"* A_2 = *"La segunda carta es un as"*

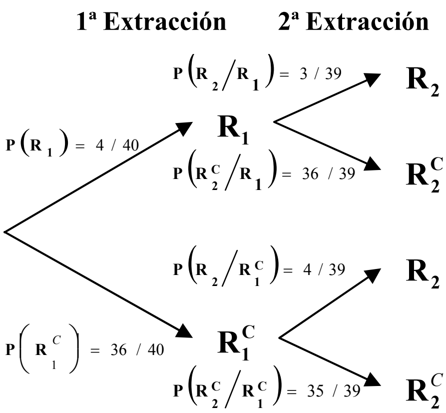
a) $P(S)=P(A_1\cap A_2)=P(A_2/A_1)\cdot P(A_1)=\frac{3}{39}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{130}$

b) $P(S)=P(A_1\cap A_2)=P(A_2/A_1)\cdot P(A_1)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{100}$

Fíjate: Hay que hacer un diagrama de árbol para cada apartado para poder asignar probabilidades adecuadamente en cada caso.

Ejemplo 4: *Extraemos consecutivamente y <u>sin devolución</u> dos cartas de una baraja. Halla la probabilidad de que ambas sean reyes.*

Solución:



La ocurrencia de un suceso afecta a la de otro

Es un experimento compuesto.

Llamamos S = "Ambas cartas son reyes"

R_1 = "Salir rey en la primera extracción"

R_2 = "Salir rey en la segunda extracción"

$P(S)=P(R_2/R_1)\cdot P(R_1)=\frac{3}{39}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{130}$

(Fíjate: $S=R_1\cap R_2$)

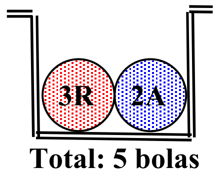
(*Otra forma:* $P(S)=\dfrac{C_{4,2}}{C_{40,2}}=\dfrac{6}{780}=\dfrac{1}{130}$)

Ejemplo 5: *En una urna hay 3 bolas rojas y 2 azules. Extraemos sucesivamente y <u>con reposición</u> dos bolas y anotamos su color. Construye el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio y calcula la probabilidad de los sucesos elementales. Determina la probabilidad de obtener los sucesos:*

a) Una bola roja y una bola azul (sin importar el orden).

b) Primera bola roja y segunda bola azul.

Solución:



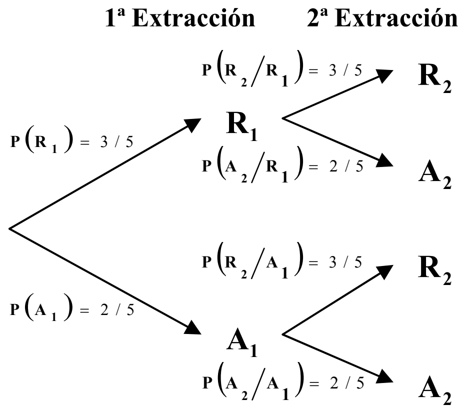
Se trata de un experimento compuesto. Si llamamos:

R_1 = "Salir bola roja en la primera extracción"

R_2 = "Salir bola roja en la segunda extracción"

A_1 = "Salir bola azul en la primera extracción"

A_2 = "Salir bola azul en la segunda extracción"



La ocurrencia de un suceso no afecta a la de otro

$$E = \{R_1R_2,\, R_1A_2,\, A_1R_2,\, A_1A_2\}$$

Probabilidad de los sucesos elementales

$$P(R_1R_2) = P(R_2/R_1)\cdot P(R_1) = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{9}{25}$$
$$P(R_1A_2) = P(A_2/R_1)\cdot P(R_1) = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = \tfrac{6}{25}$$
$$P(A_1R_2) = P(R_2/A_1)\cdot P(A_1) = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{6}{25}$$
$$P(A_1A_2) = P(A_2/A_1)\cdot P(A_1) = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{25}$$

ya que, al ser **<u>con</u>** reposición:

$$P(R_2/R_1) = P(R_2) \qquad P(A_2/R_1) = P(A_2)$$
$$P(R_2/A_1) = P(R_2) \qquad P(A_2/A_1) = P(A_2)$$

a) Si llamamos S = "Salir una bola roja y otra azul":

$$P(S) = P(R_1A_2 \cup A_1R_2) = P(R_1A_2) + P(A_1R_2) = \tfrac{6}{25} + \tfrac{6}{25} = \tfrac{12}{25}$$

b) Es un suceso elemental $P(R_1A_2) = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{5} = \tfrac{6}{25}$

Ejemplo 6: *En una urna hay 3 bolas blancas y 5 negras. Extraemos sucesivamente dos bolas <u>sin reposición</u> y anotamos su color. Construye el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio y calcula la probabilidad de los sucesos elementales. Determina la probabilidad de obtener los sucesos:*

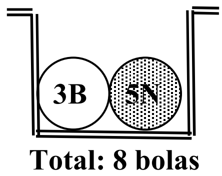
a) Dos bolas blancas.

b) Primero una blanca y después una negra.

c) Solamente una bola blanca.

d) Al menos una bola negra.

Solución:



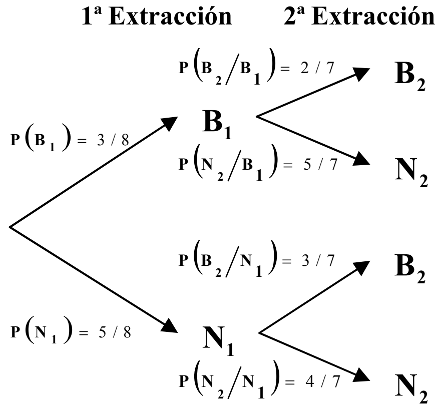
Tenemos un experimento compuesto. Llamamos

B_1 = "Salir bola blanca en la primera extracción"

B_2 = "Salir bola blanca en la segunda extracción"

N_1 = "Salir bola negra en la primera extracción"

N_2 = "Salir bola negra en la segunda extracción"



La ocurrencia de un suceso sí afecta a la de otro

$$E = \{B_1B_2,\, B_1N_2,\, N_1B_2,\, N_1N_2\}$$

$$P(B_1B_2) = P(B_2/B_1)\cdot P(B_1) = \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{3}{8} = \tfrac{6}{56} = \tfrac{3}{28}$$
$$P(B_1N_2) = P(N_2/B_1)\cdot P(B_1) = \tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{3}{8} = \tfrac{15}{56}$$
$$P(N_1B_2) = P(B_2/N_1)\cdot P(N_1) = \tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{5}{8} = \tfrac{15}{56}$$
$$P(N_1N_2) = P(N_2/N_1)\cdot P(N_1) = \tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{5}{8} = \tfrac{20}{56} = \tfrac{5}{14}$$

a) y b) Ya están hechos.

c) Si llamamos S = "Salir una sola bola blanca"

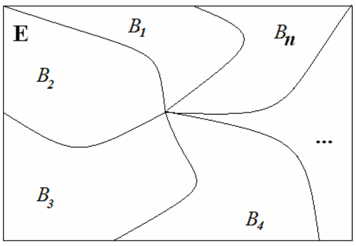
$$P(S) = P(B_1N_2 \cup N_1B_2) = P(B_1N_2) + P(N_1B_2) =$$
$$= \tfrac{15}{56} + \tfrac{15}{56} = \tfrac{30}{56} = \tfrac{15}{28}$$

d) Si llamamos T = "Salir al menos una bola negra"

$$P(T) = P(B_1N_2 \cup N_1B_2 \cup N_1N_2) = P(B_1N_2) + P(N_1B_2) + P(N_1N_2) =$$
$$= \tfrac{15}{56} + \tfrac{15}{56} + \tfrac{20}{56} = \tfrac{50}{56} = \tfrac{25}{28}$$

5. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES

Sistema completo de sucesos: Decimos que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forman un sistema completo de sucesos si verifican:



a) La unión de todos los sucesos es el espacio muestral (son exhaustivos):

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = E \qquad (\text{Es decir, } E = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$$

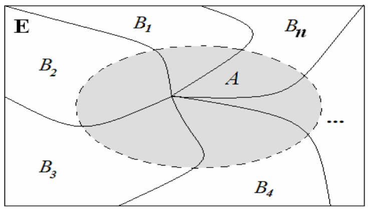
b) Son incompatibles dos a dos, es decir, $B_i \cap B_j = \phi$ si $i \neq j$.

c) Los sucesos tienen probabilidad no nula, es decir, $P(B_i) > 0$.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL:

Dado un sistema completo de sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ entonces, para cualquier suceso A se verifica:

$$\boxed{P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)\cdot P(B_n)}$$



Si lo escribimos de modo abreviado: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)\cdot P(B_i)$

TEOREMA DE BAYES:

Dado un sistema completo de sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ entonces, para cualquier suceso A se verifica:

$$\boxed{P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)\cdot P(B_n)}}$$

Si lo escribimos de modo abreviado: $P(B_i/A) = \dfrac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A/B_j)\cdot P(B_j)} = \dfrac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{P(A)}$

Nota 1: El *Teorema de la probabilidad total* nos permite calcular la probabilidad de un suceso arbitrario a través de sus probabilidades condicionadas a cada uno de los sucesos que forman un sistema completo de sucesos. Es decir:

*La probabilidad "**total**" de A se obtiene sumando las "**probabilidades parciales**"*

Las probabilidades asociadas a dichos sucesos $P(B_i)$ suelen ser conocidas o fáciles de calcular, y reciben el nombre de "*probabilidades a priori*".

Nota 2: El *Teorema de Bayes* nos permite calcular probabilidades ***después*** de realizar el experimento aleatorio (probabilidad *"a posteriori"*). Resulta muy útil cuando se quiere obtener una probabilidad condicionada a partir de las probabilidades condicionadas en el sentido contrario.

Las probabilidades $P(B_j/A)$ reciben el nombre de "*probabilidades a posteriori*" y $P(A/B_j)$ se designan "*verosimilitudes*".

Ejemplo1: *Se quiere estudiar la situación laboral en los sectores agrícola, industrial y servicios, que se denotan por B_1, B_2 y B_3 respectivamente. Sea A el suceso "Una persona elegida al azar está en paro". La probabilidad de que una persona esté sin trabajo en cada uno de los sectores es, respectivamente,*

$$P(A/B_1) = 0.08 \qquad P(A/B_2) = 0.06 \qquad P(A/B_3) = 0.02$$

Sabiendo que la mitad de las personas pertenecen al tercer sector y el resto se divide en partes iguales entre los dos primeros:

a) Halla la probabilidad de que una persona elegida al azar esté en paro.

b) Halla la probabilidad de que una persona sin trabajo pertenezca al sector agrícola.

Solución:

Sabemos que $P(B_1) = 0.25,\ P(B_2) = 0.25\ y\ P(B_3) = 0.5$

a) $P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) + P(A/B_3)\cdot P(B_3) =$
$= 0.08\cdot 0.25 + 0.06\cdot 0.25 + 0.02\cdot 0.5 = 0.04$

b) $$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)\cdot P(B_1)}{\underbrace{P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) + P(A/B_3)\cdot P(B_3)}_{P(A)}} = \frac{0.08\cdot 0.25}{0.04} = 0.5$$

Ejemplo 2: (Selectividad Sept. 2000) *Un ladrón, al huir de un policía, puede hacerlo por las calles A, B o C, con probabilidades* $P(A) = 0.25,\ P(B) = 0.6\ y\ P(C) = 0.15$, *respectivamente. La probabilidad de ser alcanzado si huye por la calle A es 0.4, si huye por la calle B es 0.5 y si huye por la calle C es 0.6.*

a) Calcule la probabilidad de que el policía alcance al ladrón.

b) Si el ladrón es alcanzado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la calle A?

Solución:

Si llamamos D = *"El ladrón es alcanzado por el policía"*, sabemos que:

$$P(D/A) = 0.4 \qquad P(D/B) = 0.5 \qquad P(D/C) = 0.6$$

a) $P(D) = P(D/A)\cdot P(A) + P(D/B)\cdot P(B) + P(D/C)\cdot P(C) =$
$= 0.4\cdot 0.25 + 0.5\cdot 0.6 + 0.6\cdot 0.15 = 0.49$

b) $$P(A/D) = \frac{P(D/A)\cdot P(A)}{P(D)} = \frac{0.4\cdot 0.25}{0.49} = 0.204$$

Ejemplo 3: *Se quiere perforar un pozo petrolífero. El suelo puede ser rocoso con probabilidad 0.45, arenoso con probabilidad 0.30, o calizo. Si es rocoso, un test geológico da un resultado positivo en el 30% de los casos; si es arenoso, el test da positivo en el 80% de las ocasiones, y si es calizo, da positivo en el 20% de las pruebas.*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el test sea positivo?

b) Si el test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el suelo sea rocoso? ¿Y de que sea arenoso? ¿Y calizo?

Solución:

Llamamos R = *"El terreno es rocoso"* $\quad A$ = *"El terreno es arenoso"*
C = *"El terreno es calizo"* $\quad P$ = *"El test resulta positivo"*

Es claro que: $P(R) = 0.45 \quad P(A) = 0.30 \quad P(C) = 0.25$
$P(P/R) = 0.3 \quad P(P/A) = 0.8 \quad P(P/C) = 0.2$

a) $P(P) = P(P/R)\cdot P(R) + P(P/A)\cdot P(A) + P(P/C)\cdot P(C) =$
$= 0.3\cdot 0.45 + 0.8\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.25 = 0.425$

b) $$P(R/P) = \frac{P(P/R)\cdot P(R)}{P(P)} = \frac{0.3\cdot 0.45}{0.425} = 0.318$$
$$P(A/P) = \frac{P(P/A)\cdot P(A)}{P(P)} = \frac{0.8\cdot 0.3}{0.425} = 0.565$$
$$P(C/P) = \frac{P(P/C)\cdot P(C)}{P(P)} = \frac{0.2\cdot 0.25}{0.425} = 0.118$$

> Un ***Sistema Completo de Sucesos*** lo forman siempre, pero no de forma única, un suceso cualquiera A con
> $$0 < P(A) < 1$$
> y su contrario A^C ya que:
>
> a) $A \cup A^C = E$
>
> b) $A \cap A^C = \phi$
>
> c) $\begin{cases} P(A) > 0 \\ P\left(A^C\right) > 0 \end{cases}$

6. TABLAS DE CONTINGENCIA

Una **tabla de contingencia** nos permite presentar los datos para abordar de modo más sencillo la resolución de problemas de cálculo de probabilidades.

Ejemplo 1: *Para tratar de curar una enfermedad se aplica un tratamiento nuevo a 81 pacientes de un hospital, mientras que en el mismo hospital hay otros 79 pacientes que siguen un tratamiento antiguo contra la misma enfermedad. En total, con ambos tratamientos los curados son 103, de los cuales 60 lo son gracias al tratamiento nuevo. Si tratamos de construir la tabla, con los datos del problema se obtiene:*

	A *(Antiguo)*	***A^C=N*** *(Nuevo)*	***TOTAL***
C *(Curarse)*		**60**	**103**
C^C *(No curarse)*			
TOTAL	**79**	**81**	

Completa la tabla y responde a las cuestiones:
Si se elige un individuo al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Se haya curado.
b) No se haya curado.
c) Se haya curado con el nuevo tratamiento.
d) No se haya curado con el nuevo tratamiento
e) Se haya curado con el tratamiento antiguo.
f) No se haya curado con el tratamiento antiguo.

Solución:

	A *(Antiguo)*	***A^C=N*** *(Nuevo)*	***TOTAL***
C *(Curarse)*	43	**60**	**103**
C^C *(No curarse)*	36	21	57
TOTAL	**79**	**81**	$\boxed{160}$

$a)\ P(C)=\frac{103}{160}\approx 0.644$ $\quad b)\ P(C^C)=\frac{57}{160}\approx 0.356$ $\quad c)\ P(C/A^C)=\frac{60}{81}=\frac{20}{27}\approx 0.741$

$d)\ P(C^C/A^C)=\frac{21}{81}=\frac{7}{27}\approx 0.259$ $\quad e)\ P(C/A)=\frac{43}{79}\approx 0.544$ $\quad f)\ P(C^C/A)=\frac{36}{79}\approx 0.456$

Ejemplo 2: **(2005-M6-B-3I)** *Juan dispone de dos días para estudiar un examen. La probabilidad de estudiarlo solamente el primer día es del 10%, la de estudiarlo los dos días es del 10% y la de no hacerlo ningún día es del 25%. Calcule la probabilidad de que Juan estudie el examen en cada uno de los siguientes casos:*

a) (0.5 puntos) El segundo día.
b) (0.75 puntos) Solamente el segundo día.
c) (0.75 puntos) El segundo día, sabiendo que no lo ha hecho el primero.

Solución:

Llamamos E_1 = *"Estudiar el examen el primer día"*,
E_2 = *"Estudiar el examen el segundo día"*

Sabemos que $P(E_1\cap E_2^C)=0.10;\quad P(E_1\cap E_2)=0.10;\quad P(E_1^C\cap E_2^C)=0.25$

Construimos la tabla de contingencia:

	E_1	***E_1^C***	***TOTAL***
E_2	***0.10***	*0.55*	*0.65*
E_2^C	***0.10***	***0.25***	*0.35*
TOTAL	*0.20*	*0.80*	$\boxed{1}$

$a)\ P(E_2)=0.65$

$b)\ P(E_1^C\cap E_2)=0.55$

$c)\ P(E_2/E_1^C)=\frac{P(E_2\cap E_1^C)}{P(E_1^C)}=\frac{0.55}{0.80}=0.6875$

Los siguientes modelos de tablas de contingencia, como hemos visto anteriormente, son muy útiles en la práctica. En particular, una tabla de contingencia para las probabilidades de dos o más sucesos nos muestra todas las posibilidades que pueden presentar:

	A	A^C	***TOTAL***
B	$A\cap B$	$A^C\cap B$	
B^C	$A\cap B^C$	$A^C\cap B^C$	
TOTAL			

	A	A^C	***TOTAL***
B	$P(A\cap B)$	$P(A^C\cap B)$	$\boldsymbol{P(B)}$
B^C	$P(A\cap B^C)$	$P(A^C\cap B^C)$	$\boldsymbol{P(B^C)}$
TOTAL	$\boldsymbol{P(A)}$	$\boldsymbol{P(A^C)}$	$\boxed{1}$

Ejemplo 3: E*n la Escuela Oficial de Idiomas aparecen como principales elecciones de los alumnos los idiomas inglés, francés, y alemán. El alumnado matriculado en el primer nivel de estos cursos se puede representar mediante esta tabla:*

	H	***M***	***TOTAL***
I	***114***	***107***	*221*
F	***52***	***31***	*83*
A	***33***	***24***	*57*
TOTAL	*199*	*162*	$\boxed{361}$

Siendo: H= "Ser hombre"; M= "Ser mujer"
I= "Estudiar Inglés"
F= "Estudiar francés"
A= "Estudiar alemán"

Calcular la probabilidad de:

a) Ser hombre.
b) Estudiar inglés.
c) Ser hombre y estudiar inglés.
d) Ser hombre sabiendo que estudia inglés.
e) Ser mujer y estudiar alemán.
f) Ser mujer o estudiar francés.

Solución:

$a)\ P(H)=\frac{199}{361}$　　$b)\ P(I)=\frac{221}{361}$　　$c)\ P(H\cap I)=\frac{114}{361}$

$d)\ P(H/I)=\frac{114}{221}$　　$e)\ P(M\cap A)=\frac{24}{361}$

$$f)\ P(M\cup F)=P(M)+P(F)-P(M\cap F)=\frac{162}{361}+\frac{83}{361}-\frac{31}{361}=\frac{214}{361}$$