

**UNIDAD 6 DETERMINANTES**

**1. DETERMINANTE DE ORDEN UNO**

Dada una matriz cuadrada de orden uno  $A = (a_{11})$ , se define el *determinante de A*, y se escribe  $\det(A)$  o bien  $|A|$ , como el número real:

$$\det(A) = |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

**2. DETERMINANTE DE ORDEN DOS**

Dada una matriz cuadrada de orden dos  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , se define el *determinante de A* como el número real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

*Ejemplos:*  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 = 13$

$$B = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 14 \cdot 1 - (-2) \cdot (-7) = 0$$

**3. DETERMINANTE DE ORDEN TRES**

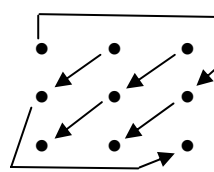
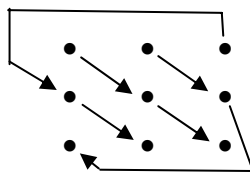
Dada una matriz cuadrada  $A$  de orden tres  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , se define el *determinante de A* como el número real:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Es fácil de recordar si utilizamos la **REGLA DE SARRUS**:

*Productos que "suman"*

*Productos que "restan"*



*Ejemplo:*  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 3 - (-2 - 2 + 18) = 14 - 14 = 0$

*Ejercicio 1.* Calcula el siguiente determinante:  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$  *Solución:* 5.

*Ejercicio 2.* Resuelve las siguientes ecuaciones: a)  $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$  b)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$

*Solución:* a)  $x = 2; x = -\frac{4}{3}$  b)  $x = 1; x = -1.$

### 4. DETERMINANTE DE ORDEN SUPERIOR

Dada una matriz cuadrada  $A$  y un elemento cualquiera  $a_{ij}$ . Definimos:

**Menor complementario de  $a_{ij}$ :** Determinante de la matriz que se obtiene al suprimir en  $A$  la fila  $i$  y la columna  $j$ . Se representa por  $M_{ij}$ .

**Adjunto del elemento  $a_{ij}$ :**  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$   
 Es decir,  $\begin{cases} \text{si } i+j \text{ par} \Rightarrow (-1)^{i+j} = 1 \\ \text{si } i+j \text{ impar} \Rightarrow (-1)^{i+j} = -1 \end{cases}$

**Ejemplo:** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  calcula  $M_{21}, M_{22}, M_{23}$  y  $M_{24}$  y sus respectivos adjuntos.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Adjuntos:  $A_{21} = 3; A_{22} = 5; A_{23} = 1; A_{24} = -1$

#### CÁLCULO DE UN DETERMINANTE DE ORDEN SUPERIOR. DESARROLLO POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA (FILA O COLUMNA)

El determinante de una matriz  $A$  es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus adjuntos:

$$\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} \quad (\text{Desarrollo por una fila})$$

$$\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} \quad (\text{Desarrollo por una columna})$$

**Ejemplo:** Calcula el determinante de la matriz  $A$  del ejemplo anterior.

Si desarrollamos por los elementos de la segunda fila,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24} = \\ &= 1 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 3 + 30 + 1 + 0 = 34 \end{aligned}$$

**Observación:** Conviene desarrollar por una línea que tenga el **mayor número de ceros**, ya que de este modo se calculan menos adjuntos.

**Ejemplo:** Calcula el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Desarrollamos por los elementos de la primera columna,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -64; \quad M_{41} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 \Rightarrow A_{11} = -64; A_{41} = -36$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{41} \cdot A_{41} = 5 \cdot (-64) + (-7) \cdot (-36) = -68$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado si se desarrolla por la segunda fila.

### 5. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES. APLICACIONES: MÉTODO DE GAUSS

Dada una matriz cuadrada  $A$ :

**P.1.** Si una fila o columna es combinación lineal de otras  $\Rightarrow \det(A) = 0$ .

En particular, si una fila o columna es proporcional a otra  $\Rightarrow \det(A) = 0$ .

$$\text{Ejemplos: } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{F_3=F_1+F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1+2 & 4+1 & -4+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{C_3=3C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \cdot 1 \\ 2 & 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 & 6 & 3 \cdot 3 \end{vmatrix} = 0$$

**P.2.** Si todos los elementos de una fila o columna son cero  $\Rightarrow \det(A) = 0$ .

$$\text{Ejemplo: } \det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

**P.3.** Si se suma a una fila o columna una combinación lineal de otras filas o columnas el determinante no varía.

$$\text{Ejemplo: } \det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -34$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1+3 \cdot (-3)+2 \cdot 1 \\ 0 & 4 & 1+3 \cdot 0+2 \cdot 4 \\ 1 & -1 & 3+3 \cdot 1+2 \cdot (-1) \end{vmatrix} \stackrel{C_3+3C_1+2C_2}{=} \begin{vmatrix} -3 & 1 & -8 \\ 0 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -34$$

**P.4.** Si se intercambian entre sí dos filas o columnas el determinante cambia de signo.

$$\text{Ejemplo: } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

**P.5.** Si todos los elementos de una fila o columna se multiplican por un número  $k$ , entonces el determinante de la nueva matriz queda multiplicado por ese número  $k$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = k \cdot \det(A)$$

$$\text{Ejemplo: } \det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 64; \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 2 \cdot 5 & 1 & 0 \\ 2 \cdot 3 & 2 & 4 \\ 2 \cdot 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 128; \quad \det(B) = 2 \cdot \det(A)$$

Como consecuencia de esta propiedad:  $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$  siendo  $\text{ord}(A) = n$ .

**P.6.** Si los elementos de una fila o columna se descomponen en dos sumandos, su determinante puede descomponerse en suma de los determinantes de dos matrices, del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b & c \\ d+d' & e & f \\ g+g' & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b & c \\ d' & e & f \\ g' & h & i \end{vmatrix}$$

**Ejemplo:**  $\underbrace{\begin{vmatrix} 1+2 & 1 & 3 \\ 3+4 & 0 & 2 \\ 2+1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}_{43} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}_{21} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}_{22}$

**P.7.**  $\det(A^t) = \det(A)$ , es decir, el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta

**Ejemplo:**  $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21$      $\det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 21$

**P.8.**  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

**P.9.** Si  $A$  es triangular  $\Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

**P.10.**  $\det(I_n) = 1$

**P.11.**  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

**P.12.**  $\det(A^k) = [\det(A)]^k$

**Ejercicio:** Sean  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas con  $\det(A) = 2$ ,  $\det(B) = 3$  y  $\text{ord}(A) = \text{ord}(B) = 3$ .

Calcula: a)  $|AB|$  b)  $|2A|$  c)  $|A^2|$  d)  $|A^tBA|$  e)  $|A^{-1}B|$  f)  $|A^8|$

### CÁLCULO DE UN DETERMINANTE POR EL MÉTODO DE GAUSS

- Aplicando las propiedades de los determinantes obtenemos una matriz triangular.
- También puede utilizarse para conseguir ceros en los elementos de una fila o columna y desarrollar por ella.

**Ejemplo:** Halla el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  con el método de Gauss.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{F_1 \leftrightarrow F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{F_4+F_2}{=} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{F_4-3F_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-6) = -18 \end{aligned}$$

**Ejercicio:** Halla el determinante de la matriz  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  con el método de Gauss.

**Solución:**  $\det(B) = 77$ .

### 6. CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

**Menor de orden  $k$  de una matriz  $A$ :** Cualquier determinante de orden  $k$  formado por elementos pertenecientes a  $k$  filas y  $k$  columnas de la matriz  $A$ .

**Propiedad:**  $\text{rang}(A) =$  Orden del mayor menor no nulo (distinto de cero).

**Ejemplo 1:** Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*Solución:*

A lo sumo tiene rango 3 ya que  $\dim(A) = 3 \times 4$

Como  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$  (es al menos 2).

Se comprueba si tiene rango 3: (se mantiene la submatriz anterior de orden 2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pero} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

**Ejemplo 2:** Calcula el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ .

*Solución:*

A lo sumo tiene rango 3 ya que  $\text{Ord}(A) = 3$

Como  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$  pero  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) \geq 2$  (es al menos 2).

Se comprueba si tiene rango 3:

Sin embargo,  $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$  (Observa que  $F_3 = 2F_1$ )

**Ejemplo 3:** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , halla  $m$  para que  $\text{rang}(A) = 2$ .

*Solución:*

Como  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{rang}(A)$  es al menos 2.

Además,  $\det(A) = 6 - 3m$  (Compruébalo)

Como  $\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow 6 - 3m = 0 \Rightarrow 6 = 3m \Rightarrow m = 2$

**Ejercicio 1:** Calcula el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro  $m$ .

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & m & -1 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} m & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Solución:*

a) Si  $m \neq 1$  y  $m \neq 2 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$     b) Si  $m \neq 2 \Rightarrow \text{rang}(B) = 2$     c) Si  $m \neq 1$  y  $m \neq -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$

Si  $m = 1$  o  $m = 2 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$     Si  $m = 2 \Rightarrow \text{rang}(B) = 1$     Si  $m = -2 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$

Si  $m = 1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 1$

**Ejercicio 2:** Calcula el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro  $a$ .

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & a \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 5 & -1 & a \end{pmatrix}$$

*Solución:*

a) Si  $a \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$       b) Si  $a \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(B) = 3$       c) Si  $a \neq -4$  y  $a \neq 7 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$   
 Si  $a = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$       Si  $a = 1 \Rightarrow \text{rang}(B) = 2$       Si  $a = -4$  o  $a = 7 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$

### 7. CÁLCULO DE LA INVERSA POR DETERMINANTES

Dada una matriz cuadrada  $A$ , se define la **matriz adjunta de  $A$**  como:

$$\boxed{\text{Adj}(A) = (A_{ij})} \leftarrow \text{Sus elementos son los adjuntos de la matriz } A$$

**Propiedad:**  $A$  tiene inversa si y solo si  $\det(A) \neq 0$

Por tanto, si  $\det(A) \neq 0$ , se tiene que 
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\text{Adj}(A)]^t}$$

**Ejemplo:** Determina si las siguientes matrices tienen inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

*Solución:*

Como  $\det(A) = 5 \neq 0 \Rightarrow A$  tiene inversa

Se obtiene la matriz adjunta de  $A$  y su traspuesta:

$$\left. \begin{array}{l} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \\ M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \\ M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{array} \right\} \text{Menores de orden 2}$$

Elementos de la matriz adjunta ( $A_{ij}$  es el adjunto del elemento  $a_{ij}$ ):

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0; & A_{12} &= -5; & A_{13} &= 5 \\ A_{21} &= 2; & A_{22} &= 3; & A_{23} &= -2 \\ A_{31} &= -1; & A_{32} &= 1; & A_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Con lo cual: 
$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: 
$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b) 
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Como } \det(B) = 0 \Rightarrow B \text{ no tiene inversa}$$

**Ejercicio:** Comprueba que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$  tiene inversa. Cálcala.

**Solución:**

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 5 & -14 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & 1 & \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & 2 & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

### MATRICES INVERTIBLES EN FUNCIÓN DE LOS VALORES DE UN PARÁMETRO

**Ejemplo:** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  se pide:

- Halla los valores de  $m$  para los cuales la matriz  $A$  NO tiene inversa.
- Halla su inversa para  $m = 1$ .

**Solución:**

- Como  $\det(A) = m^2 - m - 2$

$$\text{Si } A \text{ no tiene inversa} \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Por tanto,  $A$  no tiene inversa (es singular) si  $m = -1$  ó  $m = 2$ .

- Si  $m = 1$   $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  (Compruébalo)

**Ejercicio:** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & k \\ k & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Averigua para qué valores de  $k$  la matriz

tiene inversa. Halla su inversa para  $k = 2$ .

**Solución:**  $k \neq -4, k \neq -2$ .

$$\text{Si } k = 2 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 4 & -10 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

**Observación:** Si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  y  $A$  es regular  $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

**Ejemplo:** Calcula, si existe, la matriz inversa de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

$$\det(A) = 41 \neq 0 \Rightarrow A \text{ tiene inversa.}$$

$$\text{Por tanto: } A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{41} & -\frac{7}{41} \\ \frac{5}{41} & \frac{2}{41} \end{pmatrix}$$