UNIDAD 5 MATRICES

1. CONCEPTO DE MATRIZ. TIPOS DE MATRICES

Matriz A de dimensión $m \times n$: Conjunto de $m \cdot n$ números reales distribuidos en m filas y n columnas encerrados entre paréntesis de la forma:

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\}}_{\textit{Columnas de la matriz } A} \textit{Filas de la matriz } A$$

Forma abreviada $A = (a_{ij})$

Números que la forman $\rightarrow$ *Elementos de la matriz.*

En un elemento $a_{ij} \begin{cases} i \rightarrow \text{Indica la fila en la que se encuentra.} \\ j \rightarrow \text{Indica la columna en la que se encuentra.} \end{cases}$

$M_{m \times n} \rightarrow$ Conjunto de las matrices de dimensión $m \times n$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4.

Tiene $\begin{cases} 3 \textit{ filas} \\ 4 \textit{ columnas} \end{cases}$

Algunos elementos: $a_{11} = 2$, $a_{21} = 5$, $a_{12} = 3$, $a_{24} = 10$, $a_{33} = 3$ $a_{34} = 8$.

TIPOS DE MATRICES:

Matrices iguales: Tienen la misma dimensión.
Los elementos situados en la misma posición son iguales.

Matriz fila: Si tiene una sola fila.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ $\dim(A) = 1 \times 4$.

Matriz columna: Si tiene una sola columna.

$$\textit{Ejemplo: } B = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \dim(B) = 5 \times 1.$$

Matriz cuadrada: Tiene el mismo número de filas que de columnas ($\dim(A) = n \times n$).

En este caso decimos que es de ***orden n***, y se escribe $ord(A) = n$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad ord(A) = 3$$

Si una matriz no es cuadrada, diremos que la matriz es ***rectangular***.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \quad \dim(B) = 2 \times 3$$

$M_n \rightarrow$ Conjunto de las matrices cuadradas de orden n.

En una matriz cuadrada distinguimos:

Diagonal principal: formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Son de la forma a_{ii}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria: formada por los elementos $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$, es decir, los que van del elemento superior derecho al elemento inferior izquierdo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{Cumplen que } i + j = n + 1$$

Matriz diagonal: Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son nulos.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar: Matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz unidad o matriz identidad de orden n (I_n): Matriz diagonal (por tanto también cuadrada), en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1 (y por tanto también es escalar).

$$I_1 = (1) \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior: Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos (cero).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos (cero).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: Todos sus elementos son iguales a cero.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta de A $\left(A^t\right)$***:*** Se obtiene intercambiando en la matriz A las filas por columnas. Consecuentemente, si $\dim(A)=m\times n$, $\dim\left(A^t\right)=n\times m$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 7 & 0\end{pmatrix}\quad \dim(A)=2\times 3 \qquad A^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & 7\\ 3 & 0\end{pmatrix}\quad \dim\left(A^t\right)=3\times 2$$

Matriz opuesta de A (-A): Formada por los opuestos de los elementos de la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 3\\ 1 & 7 & 0\end{pmatrix} \qquad -A=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -3\\ -1 & -7 & 0\end{pmatrix}$$

Matriz simétrica: Matriz cuadrada que coincide con su traspuesta, es decir, $A=A^t$. Consecuentemente, $a_{ij}=a_{ji}$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 6 & -5\\ 6 & 0 & 4\\ -5 & 4 & 6\end{pmatrix}\text{ es simétrica ya que }A^t=\begin{pmatrix}1 & 6 & -5\\ 6 & 0 & 4\\ -5 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

Matriz antisimétrica: También llamada *hemisimétrica*, es una matriz cuadrada en la que su opuesta coincide con su traspuesta, es decir, $A^t=-A$.

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}\text{ es antisimétrica ya que }A^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}=-A.$$

Observa que la diagonal principal de una matriz antisimétrica es nula.

2. *OPERACIONES CON MATRICES*

2.1. SUMA DE MATRICES

Dadas las matrices $A=\left(a_{ij}\right)$ y $B=\left(b_{ij}\right)$ ambas de la misma dimensión $m\times n$, definimos la ***suma de A y B*** como:

$$\boxed{A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)}$$

Es decir, para sumar matrices sumamos los elementos situados en la misma posición.
Fíjate, la dimensión de la matriz $A+B$ sigue siendo $m\times n$.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 6 & 5 & -4\end{pmatrix}_{2x3} \qquad B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -7\\ -3 & 9 & 1\end{pmatrix}_{2x3}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2+4 & -1+0 & 5+(-7)\\ 6+(-3) & 5+9 & -4+1\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}6 & -1 & -2\\ 3 & 14 & -3\end{pmatrix}_{2x3}$$

Si A y B No tienen la misma dimensión, entonces NO SE PUEDEN SUMAR

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}_{3x2} \qquad B=\begin{pmatrix}-5 & 1 & -2 & 6\\ 0 & -4 & 1 & 9\end{pmatrix}_{2x4}$$ No se pueden sumar.

Fíjate: $\dim(A)=3\times 2$ $\qquad \dim(B)=2\times 4$

Propiedades:

- *Conmutativa:* $A+B=B+A$.
- *Asociativa:* $A+(B+C)=(A+B)+C$
- *Existencia de elemento neutro:* Si considero la matriz nula O.
$$A+O=A=O+A$$
- *Existencia de elemento opuesto:* Dada una matriz A existe $-A$ de modo que
$$A+(-A)=O=(-A)+A$$

La existencia de elemento opuesto nos permite definir la ***diferencia de dos matrices*** A y B como:

$$A-B=A+(-B) \quad \text{es decir,} \quad A-B=(a_{ij})+(-b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij})$$

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix}1-5 & 4-4\\ 0-4 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}$$

2.2. PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UNA MATRIZ

Dada una matriz $A=(a_{ij})$ y un número real k, definimos el ***producto de*** k ***por*** A como:

$$\boxed{k\cdot A=(k\cdot a_{ij})}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } k=2 \text{ y } A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 7\end{pmatrix} \qquad 2\cdot A=2\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ -4 & 14\end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $k(A+B)=kA+kB$
- $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$
- $k_1(k_2A)=(k_1k_2)A$
- $1\cdot A=A=A\cdot 1$

2.3. PRODUCTO DE MATRICES

NO SIEMPRE, es posible multiplicar dos matrices. Es necesario que:

$$\boxed{\left.\begin{matrix}\text{NÚMERO DE COLUMNAS DE LA}\\ \text{PRIMERA MATRIZ}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{NÚMERO DE FILAS DE LA}\\ \text{SEGUNDA MATRIZ}\end{matrix}\right.}$$

En caso contrario, NO se pueden multiplicar.

Caso particular: Producto de una matriz fila por una matriz columna

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \dots\\ b_{n1}\end{pmatrix} \qquad \text{Observa que}: \begin{cases}\dim(A)=1\times n\\ \dim(B)=n\times 1\end{cases}$$

Entonces:
$$\boxed{A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \dots\\ b_{n1}\end{pmatrix}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\dots+a_{1n}\cdot b_{n1}}$$

Observa: el resultado es un número real (matriz de orden 1).

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}_{1x3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}_{3x1} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-7) + (-4) \cdot (-2) = 10 - 21 + 8 = -3.$$

Por tanto $A \cdot B = -3$.

Caso general: *Si* $\dim(A) = m \times n$

$\dim(B) = n \times p$

El ***producto*** de dos matrices A *y* B, es otra matriz $A \cdot B = (c_{ij})$ de dimensión $\boxed{m \times p}$ en la que el elemento c_{ij} se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B:

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}}_{\text{Fila } i \text{ de la matriz } A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}_{\text{Columna } j \text{ de la matriz } B} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B \cdot A \rightarrow$ No se puede realizar

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Ejemplo 2: $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $\quad B \cdot A \rightarrow$ No se puede realizar

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} = \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ 1 & -3 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}_{3x2}$$

Ejemplo 3: **¿Qué ocurre si se multiplica una matriz columna por una matriz fila?**

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{3\times 1}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{1\times 3} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}_{3x1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{1x3} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ -4 & -8 & -20 \\ 7 & 14 & 35 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Propiedades:

- *Asociativa:* $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
  Siempre que $\dim(A)=m\times n;\ \dim(B)=n\times p;\ \dim(C)=p\times q.$
  Observa que la matriz producto de estas tres tendrá dimensión $m\times q$.
- *Distributiva del producto respecto a la suma de matrices:*
  $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ siempre que $\dim(A)=m\times n;\ \dim(B)=\dim(C)=n\times q.$
  $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ siempre que $\dim(A)=\dim(B)=m\times n;\ \dim(C)=n\times q.$
- *Elemento neutro:* Si $\dim(A)=m\times n$, entonces $I_m\cdot A=A\cdot I_n=A$

EL PRODUCTO DE MATRICES NO ES CONMUTATIVO*, es decir, en general:* $A\cdot B\neq B\cdot A$

Ejemplo 1: $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&5\end{pmatrix}$ $\quad A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1\\4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&7\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&14\\19&28\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&7\\3&0\end{pmatrix}$ $\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1&7\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&36\\6&3\end{pmatrix}$

Ejemplo 2: $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}$ $\quad A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&5\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&11\\-3&0&-1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&0&1\end{pmatrix}$ $\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\leftarrow$ No se puede realizar

2.4. POTENCIA DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz cuadrada, se define: $\boxed{A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\ veces}}$

Por tanto: $A^1=A$

$A^2=A\cdot A$

$A^3=A\cdot A\cdot A=A^2\cdot A$

Ejemplo 1: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}$, calcula A^2 y A^3.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&21\\7&28\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}7&21\\7&28\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35&126\\42&161\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, calcula A^{199} y A^{200}.

$$\left.\begin{array}{l}A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2\\ A^3=A^2\cdot A=I_2\cdot A=A\\ A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=A^2=I_2\end{array}\right\}\Rightarrow A^n=\begin{cases}A, & si\ n\ es\ impar\\ I_2, & si\ n\ es\ par\end{cases}$$

Por tanto: $A^{199}=A$

$A^{200}=I_2$

Observación 1: Dadas dos matrices A y B, en general se cumple que:

$a)\ (A+B)^2 \neq A^2+B^2+2A\cdot B$

$b)\ (A-B)^2 \neq A^2+B^2-2A\cdot B$ ¡Compruébalo con un ejemplo!

$c)\ (A+B)\cdot(A-B)\neq A^2-B^2$ ¿Por qué no se cumple la igualdad?

Observación 2: Si A es una matriz diagonal:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^p=\begin{pmatrix} a_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^p & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^p \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, calcula A^3 y A^5.

$$A^3=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 7^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 343 \end{pmatrix} \qquad A^5=\begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 7^5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 16807 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcula, ***si es posible***:

$a)\ A\cdot B\ y\ B\cdot A$ $b)\ A\cdot C\ y\ C\cdot A$ $c)\ B\cdot C\ y\ C\cdot B$ $d)\ D\cdot E\ y\ E\cdot D$

$e)\ E\cdot D^t$ $f)\ C^2-B\cdot A$ $g)\ E^2-E$ $h)\ D\cdot D^t\ y\ D^t\cdot D$

2.5. INVERSA DE UNA MATRIZ

Matriz regular o invertible: Es una matriz cuadrada A de orden n para la que existe otra matriz A^{-1} también de orden n tal que:

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n}$$

A la matriz A^{-1} se le llama ***matriz inversa de*** A.

Si una matriz A no tiene inversa se llama ***singular***.

Propiedades de la inversa:

- $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
- $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1}=A$

Propiedades de la traspuesta:

- $(A^t)^t=A$
- $(A+B)^t=A^t+B^t$
- $(kA)^t=kA^t$ ¡Compruébalo con ejemplos!
- $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$
- $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$

Veamos dos formas de calcular la matriz inversa de una matriz regular. La siguiente unidad aportará un método alternativo basado en el concepto de determinante de una matriz.

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA:

<u>1ª Forma:</u> A partir de la definición. (Método no adecuado para matrices de orden >2)

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

Como $A\cdot A^{-1}=I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a-c & 2b-d\\ a+3c & b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}2a-c=1\\ 2b-d=0\\ a+3c=0\\ b+3d=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}2a-c=1\\ a+3c=0\end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{3}{7};\ c=\frac{-1}{7}\\ \left.\begin{array}{r}2b-d=0\\ b+3d=1\end{array}\right\}\Rightarrow b=\frac{1}{7};\ d=\frac{2}{7}\end{array}\right\}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

Ejercicio: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ ¡Compruébalo!

<u>2ª Forma:</u> Método de Gauss-Jordan

Ejemplo 1: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$

- Partimos de $(A|I)$ y queremos obtener $(I|A^{-1})$.
- Si aparece en la transformación de A una fila o una columna de ceros, la matriz NO es regular (NO tendrá inversa).
- Se pueden reordenar filas pero NO columnas.

$$(A|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2-F_1\\ F_3-3F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\leftrightarrow F_2]{}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F_2-3F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[F_1-F_2]{}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)=(I_3|A^{-1})\quad\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2: $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ -1 & 4 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$$(B|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2+F_1\\ F_3-2F_1}]{}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\div 3\\ F_3\div 2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+2F_3]{F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot F_3]{F_1+F_2}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right) = \left(I_3 \middle| B^{-1}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(C \middle| I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+2F_1]{}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-4F_3]{F_1-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot F_1]{}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(I_3 \middle| C^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Comprueba que la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

3. RANGO DE UNA MATRIZ

Dada una matriz A.

Una ***combinación lineal de filas*** $F_1, F_2, \cdots, F_k$ de A es: $a_1F_1 + a_2F_2 + \cdots + a_kF_k$

Una ***combinación lineal de columnas*** $C_1, C_2, \cdots, C_l$ de A es: $b_1C_1 + b_2C_2 + \cdots + b_lC_l$

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Observa que $F_1 + 2F_2 = F_3$.

Por tanto, F_3 es combinación lineal de F_1 y F_2.

Una fila (o columna) ***depende linealmente de otras*** si es combinación lineal de ellas. En ese caso decimos que las filas son ***linealmente dependientes***. En caso contrario, serán ***linealmente independientes***.

Ejemplo 2: $a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$ Las tres filas son linealmente dependientes:

$$F_1 + 2F_2 = F_3$$

$b)\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\rightarrow$ F_1 y F_2 son linealmente independientes
C_1, C_2, y C_3 son lin. dependientes ya que $2C_1+C_2=C_3$

Rango de una matriz: Número de filas (o columnas) no nulas y linealmente independientes. Se representa por $rang(A)$ ó $r(A)$.

Cálculo del rango de una matriz (Gauss):

- Transformamos A en una matriz escalonada.
- *rang(A)* es el número de filas no nulas de la matriz escalonada que resulta.

Ejemplo 3: $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 6 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\div 2]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 6 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2-3F_1\\ F_3+F_1}]{}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -7 & -9 & 1\\ 0 & 7 & 9 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -7 & -9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang(A)=2$

Ejemplo 4: $B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\\ -1 & 1 & -2\\ 5 & -5 & 10\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_1\div 3\\ F_2\div 2\\ F_4\div 5}]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2-F_1\\ F_3+F_1\\ F_4-F_1}]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang(B)=1$

Ejemplo 5: $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 3 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 3 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2-2F_1\\ F_3+F_1}]{}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 5 & 5 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+5F_2]{}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -14\end{pmatrix}\Rightarrow rang(C)=3$

Ejemplo 6: Calcula el rango, según los valores de *k*, de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -1 & k\end{pmatrix}$.

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 5 & -1 & k\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2-F_1\\ F_3-5F_1}]{}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 9 & k-5\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-3F_2]{}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & k-11\end{pmatrix}$

Por tanto: Si $k=11\Rightarrow rang(A)=2$ Si $k\neq 11\Rightarrow rang(A)=3$

Propiedad: Una matriz cuadrada A tiene inversa si y solo si $rang(A)=Ord(A)$

La siguiente unidad nos proporcionará un método alternativo para determinar el rango de una matriz cuadrada.

4. ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES

Ecuación matricial: Ecuación en la que las incógnitas son matrices

Sean A y B matrices y A regular.

Si la ecuación matricial es $AX = B$ entonces: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_n X = A^{-1}B \Rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}B}$ (1)

Si la ecuación matricial es $XA = B$ entonces: $XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow XI_n = BA^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{X = BA^{-1}}$ (2)

Ejemplo 1: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$.

a) Hallar X tal que $AX = B$. b) Hallar X tal que $XA = B$.

Solución:

Como $\exists\, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; a) $X \underset{(1)}{\overset{}{=}} A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

b) $X \underset{(2)}{=} BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7/4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Observación: **Si A no es cuadrada no podemos calcular su inversa, ¿cómo lo hacemos entonces?**

Ejemplo 2: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 9 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$. Hallar X tal que $AX = B$.

Solución:

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 9 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a-2c & 3b-2d \\ a+2c & b+2d \\ 4a+c & 4b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 9 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3a-2c=6 & 3b-2d=-5 \\ a+2c=2 & b+2d=9 \\ 4a+c=8 & 4b+d=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=4 \end{matrix}\right\} \quad \text{Por tanto, } X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Fíjate: El *Ejemplo 1* también se puede hacer de este modo.

Ejemplo 3: Resuelve la ecuación matricial $AX + B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como $\exists\, A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (calcúlala), se despeja $\boldsymbol{X}$ en la ecuación matricial:

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_2}X = A^{-1}[C-B] \Rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1}[C-B]}$$

Por tanto: $X = A^{-1}[C-B] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Resuelve la ecuación matricial $AX + X = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *Pista:* Sacar factor común X.

Ejercicio: Resuelve la ecuación matricial $AX = BX + C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Solución: } X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sistema de ecuaciones matriciales: Sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son matrices.

Ejemplo 4: Resolver el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{array}{l} X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2Y \qquad \text{Método de Sustitución}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$2\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 2Y\right] - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - 4Y - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow -7Y = \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de *X*:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Resolver, por reducción, el siguiente sistema matricial:

$$\left.\begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \qquad \textit{Solución: } X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Halla la matriz $X^2 + Y^2$ si X e Y son dos matrices cuadradas que verifican:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \qquad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Solución: } X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 + Y^2 = \begin{pmatrix} -14 & 17 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$$

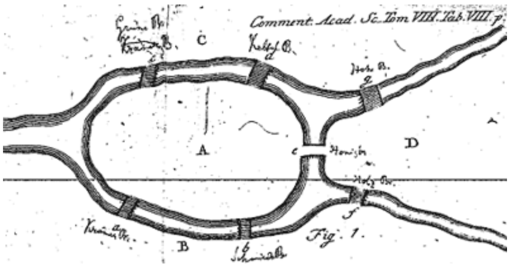
5. *APLICACIONES DE LAS MATRICES*

Son muchas las aplicaciones de las matrices para representar y analizar situaciones que se plantean en temas tan diversos como redes de transporte y distribución de mercancías, redes de Ingeniería Eléctrica o Telefónica, redes de computadoras, estructuras moleculares en Química, estructuras de datos o de organización de Sociología y Economía, mapas de carreteras, trenes, metro...

El núcleo central de muchos de estos problemas lo constituyen los *grafos*.

GRAFOS:

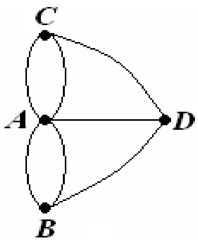
La ***teoría de grafos*** tiene su origen histórico en *"El problema de los siete puentes de Königsberg (Prusia)"* propuesto por Euler en 1736:



"En la ciudad de Königsberg hay una isla y el río que la rodea (Pregel) se divide en dos brazos. En la época de Euler al río lo rodeaban siete puentes. ¿Habrá algún camino que nos permita pasar una sola vez por todos los puentes y volver al punto de partida?"

Nota: *Königsberg* es la actual de *Kaliningrado,* ciudad rusa a orillas del Báltico situada a 50 km de Polonia. Los siete puentes fueron destruidos durante la Segunda Guerra Mundial.

Euler redujo el problema a cuatro puntos *A, B, C y D (vértices)* unidos por siete rutas *(arcos o aristas)*, es decir, *un grafo.*

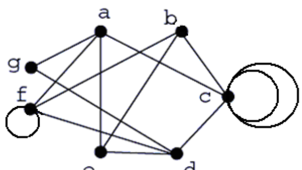


Ahora el problema consiste en recorrer el diagrama, sin levantar el lápiz del papel, pasando por todos los vértices una sola vez y volviendo al punto de partida.
Euler demostró que tal recorrido era imposible.

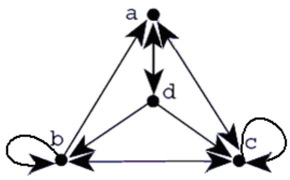
Nota: Algunos autores usan el término *arco* para las aristas dirigidas.

Grafo: Conjunto finito de puntos llamados ***vértices o nodos***, y unas líneas que unen parejas de esos puntos llamadas ***aristas o arcos***.

Grafo dirigido o digrafo: Es un grafo en el que las aristas o arcos están dirigidos.



Grafo



Grafo dirigido o digrafo

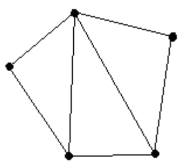
Bucle o lazo: arista de un grafo cuyos extremos coinciden en un mismo vértice.

Grafo (o digrafo) simple: grafo (o digrafo) en el que dos vértices cualesquiera están unidos, a lo sumo, por una única arista y que no posee bucles.

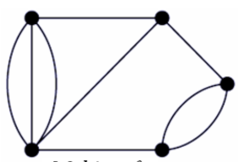
En el caso de un digrafo pueden existir dos aristas por cada par de vértices pero con orientación contraria ("ida" y "vuelta").

Multigrafo: grafo que permite aristas múltiples entre dos vértices. Si además se permiten bucles se llama ***pseudografo***. Estos conceptos se extienden para digrafos

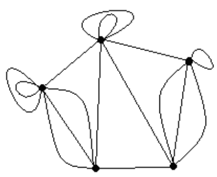
Fíjate: En los siguientes ejemplos los dos últimos casos no son grafos simples.



Grafo simple



Multigrafo

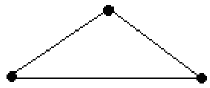


Pseudografo

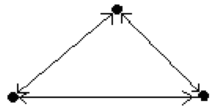
Grafo mixto: grafo que posee aristas dirigidas y no dirigidas.

Grafo (o digrafo) completo: grafo (o digrafo) simple que posee u arco para cada par de vértices.

Fíjate que esta definición implica que, en el caso de un digrafo, éste será completo si cada pareja de vértices está unida por dos aristas dirigidas de forma opuesta.



Grafo completo



Digrafo completo

Los extremos de una arista se dice que son vértices **incidentes** con la arista.

Dos vértices incidentes con una misma arista se dicen **adyacentes**.

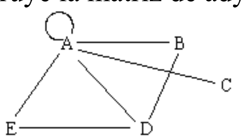
Matriz de adyacencia asociada a un grafo: Matriz cuadrada $M=(m_{ij})$ de orden el número de vértices del grafo que va a determinar la estructura de éste. Se construye así:

$m_{ij}=$ Número de aristas que unen el vértice correspondiente a la fila i de la matriz M con el vértice correspondiente a la columna j.

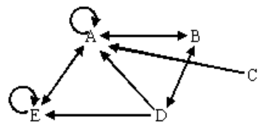
Ten en cuenta que:

- ***En el caso de grafos simples*** existirá, a lo sumo, un arco para una pareja determinada de vértices. Por tanto, ***colocaremos un*** 1 ***o un*** 0 en la casilla correspondiente de la matriz de adyacencia, dependiendo de ***si hay o no un arco que conecte los vértices*** correspondientes a esta casilla. Fíjate que en este caso $m_{ij}=m_{ji}$, y por lo tanto la matriz de adyacencia será simétrica.
- ***En el caso de un digrafo simple*** habrá que tener en cuenta la orientación del arco para construir la matriz de adyacencia, ya que en este caso $m_{ij}=m_{ji}$ únicamente cuando existan dos arcos con orientación contraria que conecten los vértices correspondientes (pondremos un 1 en ambas casillas), o bien no exista ningún arco que los una (en ese caso pondremos un 0).

Ejemplo 1: Construye la matriz de adyacencia en cada caso:



Grafo



Grafo dirigido o digrafo

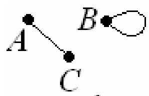
Solución:

$$M=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 2: Dibuja un grafo o digrafo que corresponda a cada matriz de adyacencia:

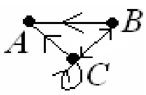
$$a)\ M=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad b)\ N=\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a)



Grafo

b)



Digrafo

Camino entre dos vértices A y B: Sucesión de vértices y arcos que conectan A y B. Al número de arcos que forman el camino se le llama ***longitud del camino***.

Relación con la matriz de adyacencia M :

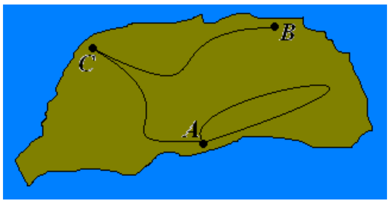
- Matriz $\boldsymbol{M} \rightarrow$ Muestra si existe o no un arco entre cada par de vértices.
- Matriz $\boldsymbol{M^2} \rightarrow$ Muestra la existencia y número de caminos de longitud ***2*** entre cada par de vértices.
- Matriz $\boldsymbol{M^3} \rightarrow$ Muestra la existencia y número de caminos de longitud ***3*** entre cada par de vértices.
- Matriz $\boldsymbol{M^n} \rightarrow$ Muestra la existencia y número de caminos de longitud ***n*** entre cada par de vértices.

EJEMPLOS RESUELTOS:

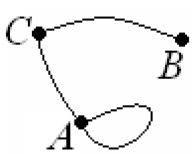
Ejemplo 1: *El mapa de la figura muestra los senderos que unen las tres aldeas de una isla.*

a) Obtén un grafo que modelice la red de comunicaciones de la isla y escribe la matriz de adyacencia M asociada a ese grafo.

b) Calcula M^2 e interpreta su significado.



Solución:

a) 

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$M^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

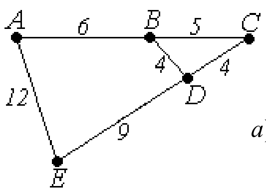
M^2 muestra el número de caminos existentes entre dos aldeas cualesquiera en dos etapas.

Ejemplo 2: *Consideremos cinco pueblos A, B, C, D y E representados en el siguiente grafo.*

a) Calcula la matriz de adyacencia de ese grafo.

b) Obtén la matriz de distancias asociada a ese grafo.

Solución:



a) $$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 11 & 10 & 12 \\ 6 & 0 & 5 & 4 & 13 \\ 11 & 5 & 0 & 4 & 13 \\ 10 & 4 & 4 & 0 & 9 \\ 12 & 13 & 13 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 3: *En un grupo de cinco amigos y amigas se pregunta ¿Quién es tu mejor amigo o amiga?, obteniéndose las siguientes respuestas:*

- *Para Alberto (A) es: Carlos y Diana.*
- *Para Beatriz (B) es: Carlos.*
- *Para Carlos (C) es: Alberto.*
- *Para Diana (D) es: Beatriz y Enrique.*
- *Para Enrique (E) es: Alberto, Carlos y Diana.*

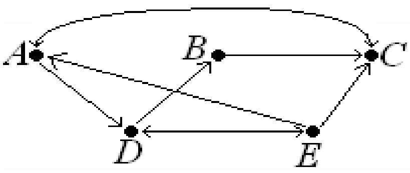
a) Relaciona mediante un grafo las relaciones de amistad que se dan en el grupo.

b) Obtén la matriz de adyacencia.

c) ¿Quién ofrece más amistad? ¿Quién es considerado mejor amigo?

Solución:

a)



b)

$$M = \text{Amistad manifiesta}\begin{cases} \\ \\ \\ \\ \end{cases} \begin{array}{c|ccccc} & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0}}^{\text{Amistad recibida}}} \\ & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ E & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$c)$ Es claro que Enrique ofrece más amistad y que Carlos es considerado mejor amigo. También podemos observar que solamente se consideran amigos mutuos, Alberto y Carlos por un lado y Diana y Enrique por otro.

Ejemplo 4: *Una fábrica decide distribuir tres productos A, B y C a cuatro países de África P_1, P_2, P_3 y P_4, según se describe en la matriz M (cantidades en toneladas). Esta fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas para el transporte de los productos a los países de destino, como indica la matriz N (en euros por tonelada).*

$$M = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones:

a) ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto?

b) ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa E_2?

c) Indica qué elementos de la matriz producto permiten averiguar cuál es la empresa que transporta más barato el producto B a todos los países.

Solución:

a) $N \cdot M = \begin{pmatrix} 284500 & 239500 & 240000 \\ 286500 & 239000 & 233700 \end{pmatrix}$

El elemento a_{11} de la matriz producto representa el coste total del presupuesto de la empresa E_1 por llevar el producto *A* a todos los países.

b) El elemento $a_{23} = 233700$ €.

c) El elemento a_{22}, es decir, la empresa E_2 por 239000 €. Se obtiene comparando los elementos a_{12} y a_{22}.