Proyecto MaTEX

INTERPOLACIÓN

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- **Tabla de Contenido**
- **Inicio Artículo**

23 de abril de 2004

Versin 1.00

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Tabla de Contenido

1. Planteamiento del problema

2. Interpolación lineal

2.1. Planteando un sistema

2.2. Con una tabla de diferencias

3. Interpolación cuadrática

3.1. Planteando un sistema

3.2. Con una tabla de diferencias

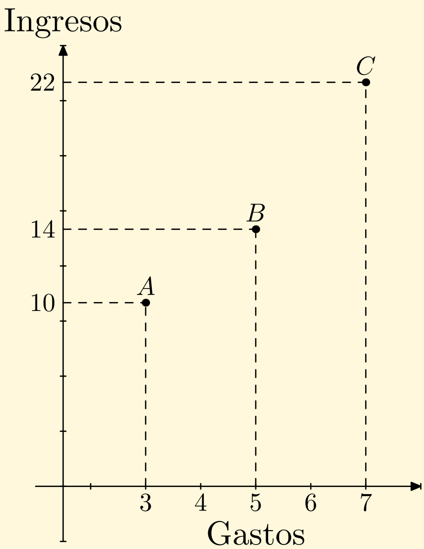
Soluciones a los Ejercicios

1. Planteamiento del problema

Para que se comprenda el problema que resuelve la interpolación considera el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. Una empresa en distintos años obtiene unos ingresos cuando realiza los siguientes gastos.(Las unidades están en miles de euros)

Gastos x	3	5	7
Ingresos y	10	14	22



En primer lugar lo representamos en unos ejes de coordenadas.
A continuación nos preguntamos, ¿que ingresos podemos esperar si realizamos unos gastos de por ejemplo 4 mil euros?. O unos gastos de ¿6 mil euros? ¿Cómo responder a esta pregunta?.

En realidad podemos decir que no hay respuesta definitiva a tal pregunta, pero las matemáticas nos ayudan a obtener una respuesta razonable.

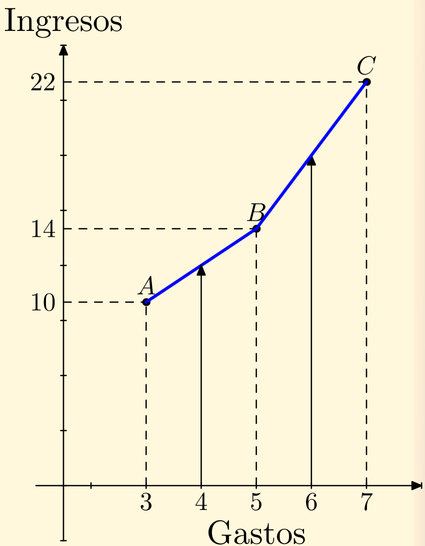
▶ **Primera solución**

En primer lugar podemos hallar rectas o funciones lineales que pasen por los puntos AB y BC y con ellas estimar el valor de los ingresos a partir de los gastos. Esto se conoce como:

INTERPOLACIÓN LINEAL

- **Recta AB**. La ecuación de dicha recta es
$$y = 2\,x + 4$$
si hacemos $x = 4$ obtenemos unos ingresos de
$$y(4) = 2\,(4) + 4 = \mathbf{12}$$

- **Recta BC**. La ecuación de dicha recta es
$$y = 4\,x - 6$$
si hacemos $x = 6$ obtenemos unos ingresos de
$$y(6) = 4\,(6) + 6 = \mathbf{18}$$



► **Segunda solución**

En segundo lugar podemos hallar una función cuadrática o parábola que pase por los puntos A, B y C y con ella estimar el valor de los ingresos a partir de los gastos.Esto se conoce como:

INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA.

Parábola ABC.

La ecuación de dicha parábola es

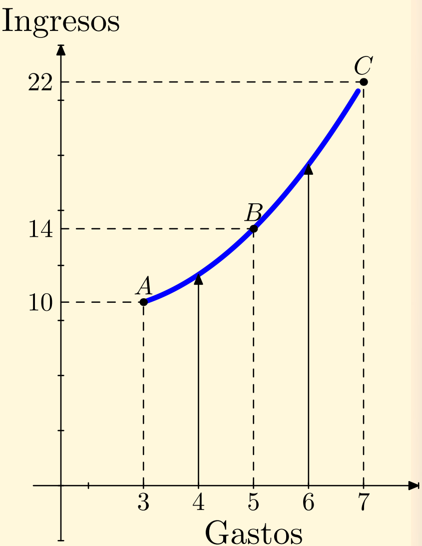
$$y = 0{,}5\,x^2 - 2\,x + 11{,}5$$

Si hacemos $x = 4$ obtenemos unos ingresos de

$$y(4) = 0{,}5\,(4)^2 - 2\,(4) + 11{,}5$$
$$y(4) = \mathbf{11{,}5}$$

Si hacemos $x = 6$ obtenemos unos ingresos de

$$y(6) = 0{,}5\,(6)^2 - 2\,(6) + 11{,}5$$
$$y(6) = \mathbf{17{,}5}$$



Si se ha comprendido el problema del ejemplo anterior sólo nos queda aprender a calcular las funciones lineales y cuadráticas que pasan por puntos del plano.
Explicaremos dos métodos:

Planteando un sistema Este método consiste en formular el tipo de función que buscamos de la forma

$$\begin{aligned} y &= a\,x + b && \text{para interpolación lineal} \\ y &= a\,x^2 + b\,x + c && \text{para interpolación cuadrática} \end{aligned}$$

y hallar los coeficientes de forma que se ajuste a los puntos dados.

Con una tabla de diferencias Es un método o algoritmo basado en el método anterior pero que obtiene las funciones buscadas de una forma más rápida y cómoda. Los datos se disponen en una tabla y no hay necesidad de resolver sistemas.

2. Interpolación lineal

2.1. Planteando un sistema

De forma general se trata de calcular el polinomio de 1º grado que pasa por los puntos del plano $A(x_0, f_0)$ y $B(x_1, f_1)$, o en forma de tabla:

x_i	x_0	x_1
f_i	f_0	f_1

El polinomio buscado lo escribimos en la forma:

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

donde hay que hallar a_0 y a_1. Para ello sustituimos por los valores de la tabla,

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = x_0; & P_1(x_0) = a_0 \\ x = x_1; & P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \end{array} \right.$$

Se obtiene así un sistema triangular fácil de resolver:

$$\begin{array}{lcl} f_0 = a_0 & \to & a_0 = f_0 \\ f_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) & \to & a_1 = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \end{array}$$

$$\boxed{P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) \qquad (1)}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejemplo 2.1. Calcular el polinomio de 1º grado:

x_i	1	2
f_i	3	0

Solución:
Buscamos un polinomio de 1º grado que escribimos en la forma:

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x-1)$$

donde hay que hallar a_0 y a_1. Para ello sustituimos por los valores de la tabla,

$$\left\{ \begin{array}{ll} x=1; & P_1(1) = a_0 \\ x=2; & P_1(2) = a_0 + a_1(2-1) \end{array} \right.$$

Se obtiene así un sistema triangular fácil de resolver:

$$\begin{array}{lcl} 3 = a_0 & \rightarrow & a_0 = 3 \\ 0 = a_0 + \ a_1 & \rightarrow & a_1 = -3 \end{array}$$

Siendo el polinomio buscado

$$P_1(x) = 3 - 3\,(x-1) = -3x + 6$$

□

2.2. Con una tabla de diferencias

Si observamos en la fórmula1 la expresión del término lineal que vamos a designar como $f[x_0, x_1]$ y llamaremos diferencia dividida de 1º orden DD^1.

$$f_{[x_0,x_1]} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

La diferencia dividida de 1º orden para x_1, x_2 será $f_{[x_1,x_2]} = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$

x_i	f_i	DD^1
x_0	f_0	
		$\dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f_{[x_0,x_1]}$
x_1	f_1	
		$\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = f_{[x_1,x_2]}$
x_2	f_2	

► Si queremos interpolar entre x_0, x_1 usaremos el polinomio

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$$

► Si queremos interpolar entre x_1, x_2 usaremos el polinomio

$$P_1(x) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

De esta forma no es necesario resolver sistemas.

Observa como se construye la tabla superior. Esta tabla nos permitirá calcular de forma sencilla el polinomio de interpolación de 2º grado mas adelante.

Ejemplo 2.2. Una empresa en distintos años obtiene unos ingresos cuando realiza los siguientes gastos.(Las unidades están en miles de euros)

Gastos x	3	5	7
Ingresos y	10	14	22

Hallar por interpolación lineal los ingresos cuando los gastos son $x = 4$ y cuando $x = 6$.

Solución: Realizamos la tabla de diferencias de 1º orden

x_i	f_i	$f_{[x_0,x_1]}$
3	10	
		$\dfrac{14-10}{5-3} = 2$
5	14	
		$\dfrac{22-14}{7-5} = 4$
7	22	

► Si queremos interpolar entre $x_0 = 3$ y $x_1 = 5$ usaremos el polinomio

$$P_1(x) = 10 + 2\,(x - 3)$$

luego para $x = 4$

$$P_1(4) = 10 + 2\,(4 - 3) = \mathbf{12}$$

► Si queremos interpolar entre $x_1 = 5$ y $x_2 = 7$ usaremos el polinomio

$$P_1(x) = 14 + 4\,(x - 5)$$

luego para $x = 6$

$$P_1(6) = 14 + 4\,(6 - 5) = \mathbf{18}$$

□

Ejercicio 1. Un banco ha registrado los siguientes depósitos en los años que se indican en distintos años.(Los depósitos están en millones de euros)

Año	1990	1992	1994
Depósitos	25	32	45

Hallar por interpolación lineal los depósitos estimados en los años 1991 y 1993. (Se puede trabajar sustituyendo 1990 por $x = 0$, así 1992 será $x = 2$, etc).

Ejercicio 2. En una fábrica de automóviles, un modelo de coche X da a distintas velocidades los niveles de ruido que se registran en la tabla:

Velocidad (km/h)	60	90	120	140
Decibelios	62,7	70,2	75,5	77,5

Estimar por interpolación lineal los decibelios producidos cuando la velocidad es de 75 km/h y 130 km/h.

Ejercicio 3. El número de turistas entre 1975-1990 en millones se registra en la tabla:

Años	1995	1980	1985	1990
Turistas	24,1	30,1	38,1	43,2

Estimar por interpolación lineal los millones de turistas de los años 1987 y 1993 km/h.

3. Interpolación cuadrática

3.1. Planteando un sistema

Ejemplo 3.1. Calcular el polinomio de 2º grado:

x_i	1	3	4
f_i	2	4	8

Solución: Buscamos un polinomio el 2º grado que escribimos en la forma:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2\,(x-1)(x-3)$$

donde hay que hallar a_0, a_1 y a_2. Sustituimos por los valores de la tabla,

$$\left\{\begin{array}{ll} x=1; & P_2(1) = a_0 \\ x=3; & P_2(3) = a_0 + a_1(3-1) \\ x=4; & P_2(4) = a_0 + a_1(4-1) + a_2(4-1)(4-3) \end{array}\right.$$

Se obtiene así un sistema triangular fácil de resolver:

$$\begin{array}{lcl} 2 = a_0 & \to & a_0 = 2 \\ 4 = a_0 + 2\,a_1 & \to & a_1 = 1 \\ 8 = a_0 + 3\,a_1 + 3\,a_2 & \to & a_2 = 1 \end{array}$$

Luego el polinomio es $\boxed{P_2(x) = 2 + (x-1) + \ (x-1)(x-3) = x^2 - 3x + 4}$

$\square$

3.2. Con una tabla de diferencias

Queremos calcular el polinomio de 2º grado que pasa por tres puntos que se disponen en la tabla:

x_i	x_0	x_1	x_2
f_i	f_0	f_1	f_2

Buscamos un polinomio de 2º grado que escribimos en la forma:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)(x - x_1)$$

donde hay que hallar a_0, a_1 y a_2. Para ello sustituimos por los valores de la tabla,

$$\left\{\begin{array}{ll} x = x_0; & P_2(x_0) = f_0 = a_0 \\ x = x_1; & P_2(x_1) = f_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ x = x_2; & P_2(x_2) = f_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{array}\right.$$

Se obtiene así un sistema triangular fácil de resolver:

$$a_0 = f_0 \qquad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f_{[x_1,x_2]} - f_{[x_0,x_1]}}{x_2 - x_0}$$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Observar que los coeficientes de a_0 y a_1 coinciden con los de interpolación lineal. Si disponemos una tabla de diferencias se observa que los coeficientes en azul coinciden con los coeficientes a_0, a_1 y a_2 que hemos calculando con el sistema.

Tabla de diferencias divididas

x_i	f_i	$f_{[x_0,x_1]}$	$f_{[x_0,x_1,x_2]}$
x_0	f_0		
		$\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=f_{[x_0,x_1]}$	
x_1	f_1		$\dfrac{f_{[x_1,x_2]}-f_{[x_0,x_1]}}{x_2-x_0}=f_{[x_0,x_1,x_2]}$
		$\dfrac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=f_{[x_1,x_2]}$	
x_2	f_2		

$$P_2(x)=f_0+f_{[x_0,x_1]}\,(x-x_0)+f_{[x_0,x_1,x_2]}(x-x_0)(x-x_1) \qquad (2)$$

Ejemplo 3.2. Hallar el polinomio de 2º grado que pasa por los puntos de la dadso con una tabla en diferencias divididas:

Gastos x	1	3	4
Ingresos y	2	4	8

Solución: Observar con atención la tabla de diferencias divididas, con sencillez se calculan los coeficientes del polinomio de interpolación

x_i	f_i	DD^1	DD^2
1	2		
		$\dfrac{4-2}{3-1} = 1$	
3	4		$\dfrac{4-1}{4-1} = 1$
		$\dfrac{8-4}{4-3} = 4$	
4	8		

Siendo el polinomio buscado

$$P_2(x) = 2 + (x-1) + \ (x-1)(x-3) = x^2 - 3x + 4$$

$\square$

Ejemplo 3.3. En la siguiente tabla se indica el tiempo en días y el peso en gramos de tres embriones embriones en una especie animal:

Tiempo x	3	5	8
Peso y	8	22	73

a) Obtener el polinomio de interpolación de los datos de la tabla.

b) Hallar, a partir de dicho polinomio, el peso correspondiente a un embrión de 6,5 días.

Solución: Como en los ejemplos anteriores realizamos la tabla de diferencias

x_i	f_i	DD^1	DD^2
3	**8**		
		$\dfrac{22-8}{5-3} = \mathbf{7}$	
5	22		$\dfrac{17-7}{8-3} = \mathbf{2}$
		$\dfrac{73-22}{8-5} = 17$	
8	73		

$$P_2(x) = 8+7\,(x-3)+2\,(x-3)(x-5)$$

Así, sustituyendo por $x = 6{,}5$ días

$$P_2(6{,}5) = \mathbf{26{,}75} \text{ gramos}$$

□

Ejemplo 3.4. Una empresa presenta el balance de algunos de sus últimos ejercicios, en los que se han producido las siguientes ganancias en miles de millones:

año x	1992	1994	1996
Ganancia y	20	27	40

Obtener por interpolación cuadrática las ganancias de los años 1993 y 1995.

Solución: Se puede tomar 1992 como 0, 1994 como 2 y así sucesivamente.

x_i	f_i	DD^1	DD^2
0	20		
		3,5	
2	27		0,75
		6,5	
4	40		

$$P_2(x) = 20 + 3{,}5\,(x) + 0{,}75\,(x)(x-2)$$

Así, para estimar el valor en 1993 hacemos $x = 1$

$$P_2(1) = 20 + 3{,}5\,(1) + 0{,}75\,(1)(1-2) = \mathbf{22{,}75}$$

Así, para estimar el valor en 1995 hacemos $x = 3$

$$P_2(1) = 20 + 3{,}5\,(3) + 0{,}75\,(3)(3-2) = \mathbf{32{,}75}$$

□

MATEMATICAS 1º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
INTERPOLACIÓN
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 4. Un banco ha registrado los siguientes depósitos en los años que se indican en distintos años.(Los depósitos están en millones de euros)

Año	1990	1992	1994
Depósitos	25	32	45

Hallar por interpolación cuadrática los depósitos estimados en los años 1991 y 1993. (Se puede trabajar sustituyendo 1990 por $x = 0$, así 1992 será $x = 2$, etc).

Ejercicio 5. En una fábrica de automóviles, un modelo de coche X da a distintas velocidades los niveles de ruido que se registran en la tabla:

Velocidad (km/h)	60	90	120	140
Decibelios	62,7	70,2	75,5	77,5

Estimar por interpolación cuadrática los decibelios producidos cuando la velocidad es de 130 km/h.

Ejercicio 6. El número de turistas entre 1975-1990 en millones se registra en la tabla:

Años	1995	1980	1985	1990
Turistas	24,1	30,1	38,1	43,2

Estimar por interpolación cuadrática los millones de turistas de los años 1987 y 1993 km/h.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. Realizamos la tabla de diferencias de 1º orden

	x_i	f_i	$f_{[x_0,x_1]}$
1990	0	25	
			$\dfrac{32-25}{2-0}=3{,}5$
1992	2	32	
			$\dfrac{45-32}{4-2}=6{,}5$
1994	4	45	

▶ Para estimar los depósitos en 1991, con $x = 1$, interpolamos entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$ usando el polinomio

$$P_1(x) = 25 + 3{,}5\,(x-0)$$

luego para $x = 1$

$$P_1(1) = 25 + 3{,}5\,(1-0) = \mathbf{28{,}5}$$

▶ Para estimar los depósitos en 1993, con $x = 3$, interpolamos entre $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$ usando el polinomio

$$P_1(x) = 32 + 6{,}5\,(x-2)$$

luego para $x = 3$

$$P_1(3) = 32 + 6{,}5\,(3-2) = \mathbf{38{,}5}$$

Ejercicio 1

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 2. Realizamos la tabla de diferencias de 1º orden

x_i	f_i	$f_{[x_0,x_1]}$
60	62,7	
		$\dfrac{70{,}2-62{,}7}{30}=0{,}25$
90	70,2	
		$\dfrac{75{,}5-70{,}2}{30}=0{,}1767$
120	75,5	
		$\dfrac{77{,}7-75{,}5}{20}=0{,}11$
140	77,7	

▶ Para estimar los decibelios con $x = 75$ km/h, interpolamos entre $x_0 = 60$ y $x_1 = 90$ usando el polinomio

$$P_1(x) = 62{,}7 + 0{,}25\,(x - 60)$$

luego para $x = 75$

$$\begin{aligned} P_1(75) &= 62{,}7 + 0{,}25\,(75 - 60) \\ &= \mathbf{66,45} \text{ decibelios} \end{aligned}$$

▶ Para estimar los decibelios con $x = 130$ km/h, interpolamos entre $x_2 = 120$ y $x_3 = 140$ usando el polinomio

$$P_1(x) = 75{,}5 + 0{,}11\,(x - 120)$$

luego para $x = 130$

$$\begin{aligned} P_1(130) &= 75{,}5 + 0{,}11\,(130 - 120) \\ &= \mathbf{76,6} \text{ decibelios} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

MATEMATICAS
1º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
INTERPOLACIÓN
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3. Realizamos la tabla de diferencias de 1º orden indicando $x = 0$ como el año 1975

	x_i	f_i	$f_{[x_0,x_1]}$
1975	0	24,1	
			$\dfrac{30{,}1 - 24{,}1}{5} = 1{,}2$
1980	5	30,1	
			$\dfrac{38{,}1 - 30{,}1}{5} = 1{,}6$
1985	10	38,1	
			$\dfrac{43{,}2 - 38{,}1}{5} = 1{,}02$
1990	15	43,2	

► Para estimar los turistas en 1987 con $x = 12$, interpolamos entre $x_2 = 10$ y $x_3 = 15$ usando el polinomio

$$P_1(x) = 38{,}1 + 1{,}02\,(x - 10)$$

luego para $x = 12$

$$\begin{aligned} P_1(12) &= 38{,}1 + 1{,}02\,(12 - 10) \\ &= \mathbf{40,14} \text{ millones} \end{aligned}$$

► Para estimar los turistas en 1993 con $x = 18$, extrapolamos con el polinomio anterior , luego para $x = 18$

$$\begin{aligned} P_1(18) &= 38{,}1 + 1{,}02\,(18 - 10) \\ &= \mathbf{46,26} \text{ millones} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4. Realizamos la tabla de diferencias de 2º orden

	x_i	f_i	DD^1	DD^2
1990	0	25		
			$\dfrac{32-25}{2-0}=3{,}5$	
1992	2	32		$\dfrac{6{,}5-3{,}5}{4-0}=0{,}75$
			$\dfrac{45-32}{4-2}=6{,}5$	
1994	4	45		

El polinomio cuadrático es

$$P_2(x)=25+3{,}5\,(x-0)+0{,}75\,(x-0)(x-2)$$

▶ Para estimar los depósitos en 1991, con $x=1$ sustituyendo

$$P_2(1)=25+3{,}5\,(1-0)+0{,}75\,(1-0)(1-2)=\mathbf{27,75}$$

▶ Para estimar los depósitos en 1993, con $x=3$, sustituyendo

$$P_2(1)=25+3{,}5\,(3-0)+0{,}75\,(3-0)(3-2)=\mathbf{37{,}75}$$

Ejercicio 4

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 5. Realizamos la tabla de diferencias de 2º orden

x_i	f_i	DD^1	DD^2
60	62,7		
		$\dfrac{70{,}2-62{,}7}{30}=0{,}25$	
90	70,2		$\dfrac{0{,}1767-0{,}25}{120-60}=-0,00122$
		$\dfrac{75{,}5-70{,}2}{30}=0{,}1767$	
120	75,5		$\dfrac{0{,}11-0{,}1767}{140-90}=-0,00133$
		$\dfrac{77{,}7-75{,}5}{20}=0{,}11$	
140	77,7		

Para estimar el valor de $x = 130$ usamos el polinomio cuadrático determinado por los puntos 90,120 y 140 que corresponde a

$$P_2(x) = 70{,}2 + 0{,}1767\,(x-90) - 0,00133\,(x-90)(x-120)$$

sustituyendo por $x = 130$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 70{,}2 + 0{,}1767\,(130-90) - 0,00133\,(130-90)(130-120) \\ &= \mathbf{76,74} \text{ decibelios} \end{aligned}$$

Ejercicio 5

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Realizamos la tabla de diferencias de 2º orden indicando $x = 0$ como el año 1975,

	x_i	f_i	$f_{[x_0,x_1]}$	
1975	0	24,1		
			$\dfrac{30{,}1-24{,}1}{5}=1{,}2$	
1980	5	30,1		$\dfrac{1{,}6-1{,}2}{10-0}=0{,}04$
			$\dfrac{38{,}1-30{,}1}{5}=1{,}6$	
1985	10	38,1		$\dfrac{1{,}02-1{,}6}{15-5}=-0,058$
			$\dfrac{43{,}2-38{,}1}{5}=1{,}02$	
1990	15	43,2		

Para estimar los turistas en 1987 y 1993 con $x = 12$ y $x = 18$, usamos el polinomio cuadrático determinado por los puntos 5,10 y 15 que a partir de la tabla corresponde a

$$P_2(x) = 30{,}1 + 1{,}6\,(x-5) - 0,058\,(x-5)(x-10)$$

sustituyendo por $x = 12$ y $x = 18$

$$P_2(12) = \mathbf{40{,}48} \text{ turistas} \qquad P_2(18) = \mathbf{44{,}87} \text{ turistas}$$

Ejercicio 6