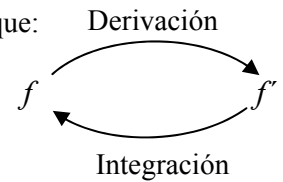


UNIDAD 3 INTEGRAL INDEFINIDA

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN E INTEGRAL INDEFINIDA. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Dadas dos funciones $f(x)$ y $F(x)$ definidas en un dominio D , decimos que:

$$F(x) \text{ es una } \textit{primitiva} \text{ de } f(x) \text{ si } F'(x) = f(x)$$



Ejemplos:

- a) Si $f(x) = 2x$, entonces $F(x) = x^2$ ya que $F'(x) = 2x = f(x)$.
- b) Si $f(x) = \cos x$, entonces $F(x) = \text{sen } x$ ya que $F'(x) = \cos x = f(x)$.
- c) Si $f(x) = \cos x$, entonces $F(x) = 5 + \text{sen } x$ ya que $F'(x) = \cos x = f(x)$.

Derivación e integración son procesos inversos.

Fíjate en el último ejemplo: Si la función primitiva tiene una constante, ésta “se pierde” al derivar $F(x)$.

Por tanto:

$$\text{Si } F(x) \text{ es una primitiva de } f(x) \Rightarrow F(x) + k \text{ también lo es}$$

Es decir, *todas las primitivas de una función se diferencian en una constante.*

Integral indefinida de f : Es el conjunto formado por todas las primitivas de la función f .

$$\int f(x) dx = F(x) + k \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Integral indefinida de } f \text{ respecto a } x$$

$\int \rightarrow$ Símbolo integral

$f(x) \rightarrow$ Integrand

$dx \rightarrow$ Indica la variable respecto a la que estamos integrando

$k \rightarrow$ Constante de integración

A pesar de ser operaciones inversas, la derivación y la integración NO tienen el mismo grado de dificultad:

Derivación: De modo mecánico se calcula la derivada de cualquier función “complicada”.

Integración: Existen funciones sencillas, cuya integral no se puede expresar con funciones elementales, como por ejemplo:

$$\int \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

Propiedades de la integral indefinida:

- a) $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$
- b) $\int f'(x) dx = f(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$ **¡¡Cuidado!!**
- c) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ $\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$
- d) $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$

Ejemplo: Comprueba que $F(x) = x^5$ y $G(x) = x^5 + 7$ son primitivas de la función $f(x) = 5x^4$.

Solución:

$$F'(x) = 5x^4 \Rightarrow F'(x) = f(x), \text{ por tanto, } F \text{ es una primitiva de } f.$$

$$G'(x) = 5x^4 \Rightarrow G'(x) = f(x), \text{ por tanto, } G \text{ es una primitiva de } f.$$

Fíjate: F y G se diferencian en una constante.

2. INTEGRALES INMEDIATAS

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS	
<i>Funciones simples</i>	<i>Funciones compuestas</i>
$\int 0 dx = k$	
$\int dx = x + k$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad \forall n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + k$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln f + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int e^f f' dx = e^f + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{\ln a} + k$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$	$\int \operatorname{sen}(f) \cdot f' dx = -\cos f + k$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \cos(f) \cdot f' dx = \operatorname{sen} f + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \int \sec^2(f) \cdot f' dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f' dx = \operatorname{tg} f + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int (1 + \operatorname{cot}^2 x) dx = -\operatorname{cot} g x + k$	$\int \frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f} dx = \int \operatorname{cosec}^2(f) \cdot f' dx = \int (1 + \operatorname{cot}^2 f) \cdot f' dx = -\operatorname{cot} g f + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \operatorname{arcsen} f + k$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + k$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \operatorname{arccos} f + k$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \operatorname{arctg} f + k$

Otras integrales inmediatas:

- $\int \operatorname{tg} x \sec x dx = \sec x + k$
- $\int \operatorname{cot} g x \operatorname{cosec} x dx = -\operatorname{cosec} x + k$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + k$
- $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arccos}\left(\frac{x}{a}\right) + k$
- $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + k$

Ejemplo: Halla una primitiva de la función $f(x) = x^2 + 2x$, sabiendo que esa primitiva se anula para $x = 1$.

Solución:

$$\int (x^2 + 2x) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + k \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + k$$

$$\text{Como } F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + 1 + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{4}{3} \quad \text{Por tanto: } F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{4}{3}.$$

Ejercicio 1: Dada la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$, calcula:

- La primitiva cuya gráfica pasa por el punto $A(2,1)$.
- La primitiva que se anula para $x = 2$.

Ejercicio 2: Determina $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 2$.

3. MÉTODOS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

3.1. INTEGRACIÓN INMEDIATA Y POR DESCOMPOSICIÓN

Función integrando \rightarrow Se expresa (si no es inmediata) como combinación lineal de funciones que sabemos integrar de modo inmediato, aplicando las propiedades de la integral indefinida.

Ejercicio 3: Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lllll} a) \int 2x dx & b) \int 3x dx & c) \int \frac{x}{3} dx & d) \int 2x^7 dx & e) \int x^{-3} dx \\ f) \int \frac{7}{x^4} dx & g) \int \frac{1}{(x-3)^3} dx & h) \int \frac{7}{(x-2)^4} dx & i) \int 7x^{\frac{1}{2}} dx & j) \int \frac{5}{4} \sqrt{x} dx \\ k) \int \sqrt{7x} dx & l) \int \sqrt{4x^7} dx & m) \int \frac{4}{3x} dx & n) \int \frac{1}{x+2} dx & ñ) \int \frac{2x-3}{x^2-3x+6} dx \\ o) \int \text{sen}(2x) dx & p) \int e^{4x} dx & q) \int e^{4x+7} dx & r) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx & s) \int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{5x}} dx \\ t) \int (2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 7x + 3) dx & u) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx & v) \int x \sqrt[3]{x} dx & w) \int \frac{\text{sen } x}{\cos x} dx \\ x) \int \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 2}{x-2} dx & y) \int \frac{3x^2 + \cos x + 2e^{2x}}{x^3 + \text{sen } x + e^{2x}} dx & z) \int \left(\frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen } x \cos x} + \cos x \right) dx \end{array}$$

Ejercicio 4: Calcula:

$$\begin{array}{llll} a) \int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{2}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx & b) \int \frac{(\sqrt{x} - 2x)^2}{\sqrt{x}} dx & c) \int \frac{3+x}{1+x^2} dx & d) \int (\sqrt{x} + 2)^2 dx \\ e) \int \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx & f) \int \frac{9^x + 6^x}{3^x} dx & g) \int \frac{x^3 + 4x + 3}{x} dx & h) \int \frac{4+3x}{1+x^2} dx \\ i) \int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{5x^3}}{3x} dx & j) \int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x-1} dx & k) \int \frac{x^3 - 3x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} dx \\ l) \int \text{tg}^2 x dx & m) \int \frac{x}{x+5} dx & n) \int \frac{x^4 - 5x^2 + 10}{x^2} dx \\ ñ) \int \frac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} dx & o) \int \cos^2 x dx & p) \int \frac{3 \cos x + 2 - 2 \text{sen}^2 x}{\cos x} dx \end{array}$$

3.2. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN (CAMBIO DE VARIABLE)

Dada $\int f(x) dx$ “NO INMEDIATA”

1) Realizamos el cambio de variable:

$$\begin{array}{|c|} \hline t = g(x) \\ \hline \Downarrow \\ \hline dt = g'(x)dx \\ \hline \end{array} \quad \text{o bien:} \quad \begin{array}{|c|} \hline x = g(t) \\ \hline \Downarrow \\ \hline dx = g'(t)dt \\ \hline \end{array}$$

- 2) Sustituimos en el integrando y calculamos la nueva integral.
- 3) Deshacemos el cambio de variable.

Ejemplos:

Otros cambios de variable

• **Integral tipo:**

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Cambio: $x = a \operatorname{sen} t$

Ejemplo:

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$x = 3 \operatorname{sen} t$$

• **Integral tipo:**

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

Cambio: $a = x \operatorname{cos} t$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx$$

$$x = \frac{2}{\operatorname{cos} t}$$

• **Integral tipo:**

$$\int \operatorname{sen}^n x \operatorname{cos}^m x dx$$

Cambios:

a) **n impar:**

$$t = \operatorname{cos} x$$

b) **n par m impar:**

$$t = \operatorname{sen} x$$

c) **n y m pares:**

Se aplica:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{2}$$

$$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \operatorname{cos} 2x}{2}$$

$$a) \int \frac{x}{1+x^4} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \Rightarrow x^4 = t^2 \\ 2x dx = dt \Rightarrow x dx = dt/2 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + k$$

$$b) \int 3x \sqrt{1-2x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 1-2x^2 = t \\ -4x dx = dt \Rightarrow x dx = -dt/4 \end{array} \right| = -\int \frac{3\sqrt{t}}{4} dt = -\frac{3}{4} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{3}{4} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = -\frac{1}{2} (1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + k = -\frac{1}{2} \sqrt{(1-2x^2)^3} + k$$

$$c) \int \frac{2x}{\sqrt{8+x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} 8+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{t} + k = 2\sqrt{8+x^2} + k$$

Ejercicio 5: Calcula estas integrales usando un cambio de variable:

$$a) \int \frac{(\ln x)^8}{x} dx \quad b) \int \operatorname{cos} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} dx \quad c) \int \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cos} x dx \quad d) \int (4x-2)^5 dx$$

$$e) \int 2x \sqrt{1+3x^2} dx \quad f) \int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}} dx \quad g) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad h) \int x e^{1+x^2} dx$$

$$i) \int \frac{1}{x(1+\ln x)^3} dx \quad j) \int \frac{1}{\sqrt{x} \operatorname{cos}^2 \sqrt{x}} dx \quad k) \int \frac{1}{x^2-4x+9} dx \quad l) \int \frac{2x-5}{x^2-2x+8} dx$$

$$m) \int \frac{1+tg^2 x}{\sqrt{tg} x} dx \quad n) \int \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx \quad \tilde{n}) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos}^5 x} dx \quad o) \int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$p) \int \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{e^x - \operatorname{cos} x}} dx \quad q) \int \frac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}} dx \quad r) \int \frac{1}{\sqrt{17-x^2}} dx \quad s) \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$t) \int \frac{2^x}{1+2^x} dx \quad u) \int \frac{e^{tg x}}{\operatorname{cos}^2 x} dx$$

3.3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Dadas dos funciones $u = u(x)$, $v = v(x)$ derivables en un dominio D.

Por la fórmula de la diferencial de un producto:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \Rightarrow u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

$$\text{Integrando} \Rightarrow \int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du = u \cdot v - \int v du$$

Es decir: $\boxed{\int u dv = u \cdot v - \int v du} \rightarrow$ **Fórmula de integración por partes**

Se utiliza siempre que $\int v du$ sea más fácil de calcular que $\int u dv$.

Ejemplos:

$$a) \int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k = e^x(x-1) + k$$

$$b) \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \text{sen } x \end{array} \right| = x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx = x \text{sen } x + \cos x + k$$

$$c) \int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + k = x(\ln x - 1) + k$$

$$d) \int \arcsen x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsen x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x \arcsen x - \int \frac{-2x}{-2\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + k$$

$$e) \int \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + k = x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2} + k$$

f) A veces hay que repetir la integración por partes:

$$\int x^2 \text{sen } x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \text{sen } x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x) dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \text{sen } x \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx) = -x^2 \cos x + 2x \text{sen } x + 2 \cos x + k$$

g) También puede ocurrir que al integrar una o dos veces, se obtenga una integral igual que la de partida (*integración por partes en forma cíclica*):

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \text{sen } x \end{array} \right| = e^x \text{sen } x - \int e^x \text{sen } x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \text{sen } x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \text{sen } x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) = e^x \text{sen } x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$\text{Si llamo } I = \int e^x \cos x dx \Rightarrow 2I = e^x(\text{sen } x + \cos x) \Rightarrow I = \frac{e^x(\text{sen } x + \cos x)}{2}$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x(\text{sen } x + \cos x)}{2} + k$$

Ejercicio 6: Calcula estas integrales usando la integración por partes:

$$a) \int x \text{sen } x dx \quad b) \int x \ln x dx \quad c) \int x^2 \ln x dx \quad d) \int \text{sen}^2 x dx$$

$$e) \int x \arctg x dx \quad f) \int x^2 \cos x dx \quad g) \int (x-1)e^x dx \quad h) \int e^{\arcsen x} dx$$

3.4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Consiste en integrar: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

Suponemos que $grad(P(x)) < grad(Q(x))$, ya que en caso contrario efectuamos previamente la división de polinomios: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, con lo cual:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

A continuación estudiaremos las raíces del denominador $Q(x)$:

Caso 1º: Las raíces son reales y simples (distintas)

Si a, b, \dots, n son las raíces de $Q(x)$ y:

$$Q(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot \dots \cdot (x - n)$$

Entonces es posible la descomposición:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{N}{x-n} \right) dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{N}{x-n} dx = A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \dots + N \ln|x-n| + k$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{1/3}{x-1} dx + \int \frac{2/3}{x+2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{2}{3} \ln|x+2| + k$$

*Descomponemos el integrando en fracciones simples:

$$\frac{x}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)} \Rightarrow x = A(x+2) + B(x-1)$$

Obtenemos A y B :

$$\left. \begin{aligned} \text{Si } x = 1 &\Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = 1/3 \\ \text{Si } x = -2 &\Rightarrow -2 = -3B \Rightarrow B = 2/3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x - 2} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2}$$

Caso 2º: Las raíces son reales y múltiples

Se hace igual que el anterior, pero teniendo en cuenta que si a es una raíz múltiple de multiplicidad k , entonces pondremos:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 5x - 3} dx &= \int \frac{3/8}{x+1} dx + \int \frac{-1/2}{(x+1)^2} dx + \int \frac{5/8}{x-3} dx = \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{5}{8} \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \frac{3}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{8} \ln|x-3| + k = \frac{3}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{5}{8} \ln|x-3| + k \end{aligned}$$

*Descomponemos de nuevo el integrando en fracciones simples:

$$\frac{x^2 + 1}{\underbrace{x^3 - x^2 - 5x - 3}_{(x+1)^2 \cdot (x-3)}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x+1) \cdot (x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2}{(x+1)^2 \cdot (x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = A(x+1) \cdot (x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2$$

Obtenemos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x = -1 \Rightarrow 2 = -4B \Rightarrow B = -1/2 \\ \text{Si } x = 3 \Rightarrow 10 = 16C \Rightarrow C = 5/8 \\ \text{Si } x = 0 \Rightarrow 1 = -3A - 3B + C \Rightarrow A = 3/8 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{\underbrace{x^3 - x^2 - 5x - 3}_{(x+1)^2 \cdot (x-3)}} = \frac{3/8}{x+1} + \frac{-1/2}{(x+1)^2} + \frac{5/8}{x-3}$$

$$b) \int \frac{x-5}{\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2}} dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{-3}{(x-2)^2} dx = \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} + k$$

*Descomponemos el integrando:

$$\frac{x-5}{\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2}} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2) + B}{(x-2)^2} \Rightarrow x-5 = A(x-2) + B$$

Obtenemos A y B :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x = 2 \Rightarrow B = -3 \\ \text{Si } x = 3 \Rightarrow -2 = A + B \Rightarrow A = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x-5}{\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2}} = \frac{1}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}$$

Ejercicio 7: Calcula:

Raíces reales simples en el denominador.

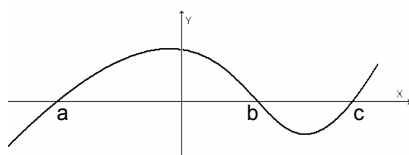
$$a) \int \frac{x+3}{x^2 - 5x + 6} dx \quad b) \int \frac{x^5 - 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx \quad c) \int \frac{4x+4}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx \quad d) \int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1 + e^x} dx$$

Raíces reales múltiples en el denominador.

$$a) \int \frac{x^2 + 2}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} dx \quad b) \int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx$$

Ejercicio 8:

1. La figura muestra la gráfica de la función f . Si F es una primitiva cualquiera de f , razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:



- a) F presenta un máximo relativo en $x = b$ y un mínimo relativo en $x = a$ y $x = c$.
- b) F es estrictamente decreciente en (a, b) .
- c) F es estrictamente creciente en $(c, +\infty)$.

2. La figura muestra la gráfica de la función f . Determina, a partir de la figura, la monotonía y los extremos relativos de cualquier primitiva F de f .

