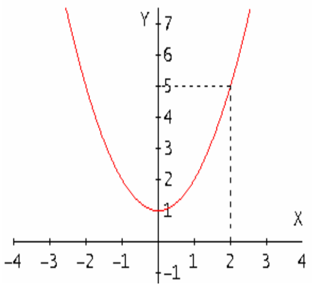
UNIDAD 1 LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. INTRODUCCIÓN

Fíjate en el comportamiento de la función $f(x)=x^2+1$ cuando x toma valores cercanos a 2.



Si x se aproxima a 2, la función toma valores cercanos a 5.
Se escribe:

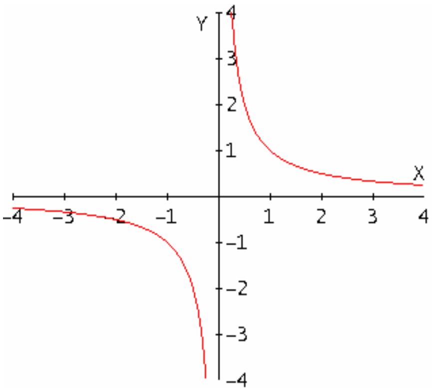
$$\lim_{x\to 2} f(x)=5$$

y decimos que 5 es el límite cuando x tiende a 2 de $f(x)=x^2+1$.

También es fácil ver que: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Observa ahora, con atención, estos otros ejemplos:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad Dom(f)=\Re\setminus\{0\}$ $\quad \mathrm{Re}c(f)=\Re\setminus\{0\}$



$\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$ $\qquad \lim_{x\to -1}\dfrac{1}{x}=-1$

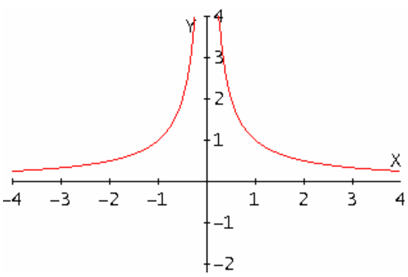
¿Sin embargo, qué valor toma $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$?

Estudiamos los *límites laterales*:

$$\text{Como}\quad \left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ \text{(No existe el límite)}$$

Por otro lado: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ y $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

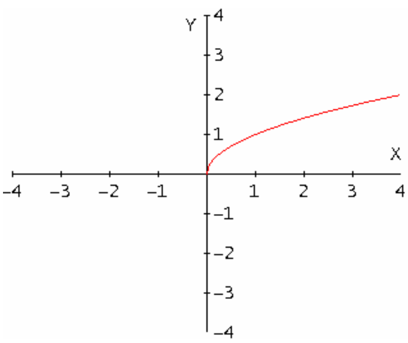
b) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ $\quad Dom(f)=\Re\setminus\{0\}$ $\quad \mathrm{Re}c(f)=(0,+\infty)$



¿Existe en este caso $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{|x|}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{|x|}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$$

c) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad Dom(f)=[0,+\infty)$ $\quad \mathrm{Re}c(f)=[0,+\infty)$



$\nexists \lim_{x\to -4}\sqrt{x}$ (Tampoco existen los límites laterales en -4).

Tampoco existe el límite en $x=0$

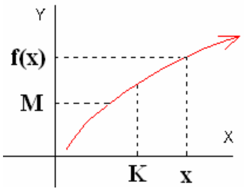
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\nexists\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

No obstante $\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

2. *LÍMITES EN EL INFINITO*

2.1. COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to +\infty$

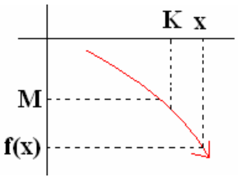
$\boxed{\text{¿Cómo se comporta } f(x) \text{ cuando } x \to +\infty\text{?}}$ Pueden presentarse cuatro casos:



1º) Que $f(x)$ *"crezca cada vez más" sin ninguna cota.*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

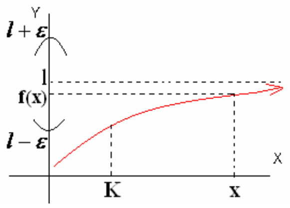
$$\forall\, M \in \Re\ \exists\, K \in \Re \text{ tal que si } x > K \Rightarrow f(x) > M$$



2º) Que los valores de $f(x)$ *se hagan cada vez "más pequeños y negativos".*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

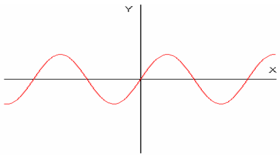
$$\forall\, M \in \Re\ \exists\, K \in \Re \text{ tal que si } x > K \Rightarrow f(x) < M$$



3º) Que los valores de $f(x)$ *se aproximen a un número* l.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K \in \Re \text{ tal que si } x > K \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{f(x)\in(l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)}$$



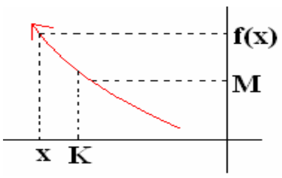
4º) Que $f(x)$ *no presente tendencia alguna.*

En este caso $\boxed{\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)}$ como $f(x) = sen\, x$

Observación: Las definiciones anteriores son ***definiciones formales*** de límites. No es tarea fácil la comprensión y uso de éstas, por lo que emplearemos la frase intuitiva que nos proporciona cada caso junto con su gráfica correspondiente. También tendremos en cuenta esta observación en el apartado *2.2* y en el punto *3*.

2.2. COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$

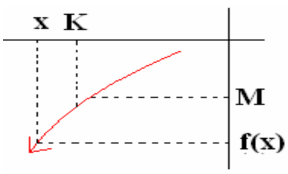
$\boxed{\text{¿Cómo se comporta } f(x) \text{ cuando } x \to -\infty\text{?}}$ De nuevo pueden presentarse cuatro casos:



1º) Que $f(x)$ *"crezca cada vez más" sin ninguna cota.*

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

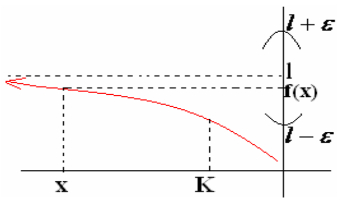
$$\forall\, M \in \Re\ \exists\, K \in \Re \text{ tal que si } x < K \Rightarrow f(x) > M$$



2º) Que los valores de $f(x)$ *se hagan cada vez "más pequeños y negativos".*

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

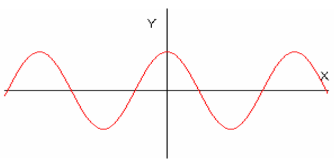
$$\forall\, M \in \Re\ \exists\, K \in \Re \text{ tal que si } x < K \Rightarrow f(x) < M$$



3º) Que los valores de $f(x)$ *se aproximen a un número* l.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = l}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, K \in \Re \text{ tal que si } x < K \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{f(x)\in(l-\varepsilon,\, l+\varepsilon)}$$

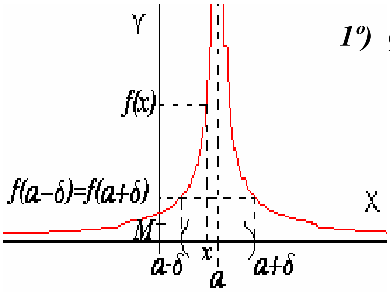


4º) Que $f(x)$ *no presente tendencia alguna.*

En este caso $\boxed{\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)}$ como $f(x) = \cos x$

3. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

$\boxed{\textit{¿Cómo se comporta } f(x) \textit{ cuando } x \to a\,?}$ Pueden presentarse cuatro casos:



1º) Que $f(x)$ "crezca cada vez más" sin ninguna cota.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$$

$$\forall M \in \Re \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } \underbrace{0 < |x-a| < \delta}_{\substack{x\in(a-\delta,\,a+\delta)\\ x\neq a}} \Rightarrow f(x) > M$$

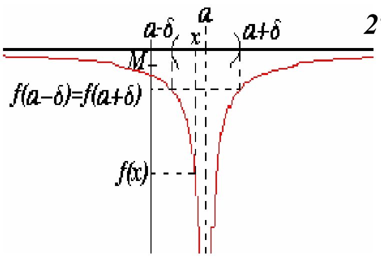
Esto implica la existencia de los ***límites laterales*** y su ***igualdad***, y dependiendo de si x se acerca a a con valores más pequeños o bien más grandes que a tenemos:

Límite lateral por la izquierda en a:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty} \quad \forall M \in \Re \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) > M$$

Límite lateral por la derecha en a:

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty} \quad \forall M \in \Re \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > M$$



2º) Que los valores de $f(x)$ se hagan cada vez "más pequeños y negativos".

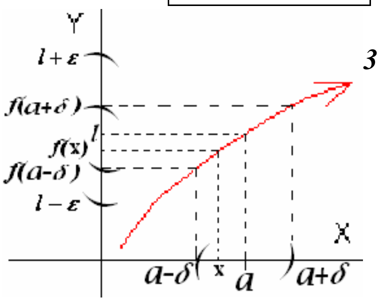
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$

$$\forall M \in \Re \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } \underbrace{0 < |x-a| < \delta}_{\substack{x\in(a-\delta,\,a+\delta)\\ x\neq a}} \Rightarrow f(x) < M$$

De nuevo, esto implica la existencia de los ***límites laterales*** y su ***igualdad***:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty} \quad \forall M \in \Re \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < M$$

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty} \quad \forall M \in \Re \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < M$$



3º) Que los valores de $f(x)$ se aproximen a un número l.

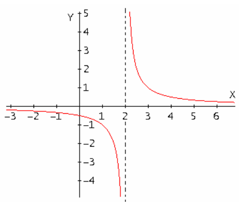
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } \underbrace{0 < |x-a| < \delta}_{\substack{x\in(a-\delta,\,a+\delta)\\ x\neq a}} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-l| < \varepsilon}_{f(x)\in(l-\varepsilon,\,l+\varepsilon)}$$

Esto implica la existencia de los ***límites laterales*** y su ***igualdad***:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = l} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = l} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tal que si } x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$



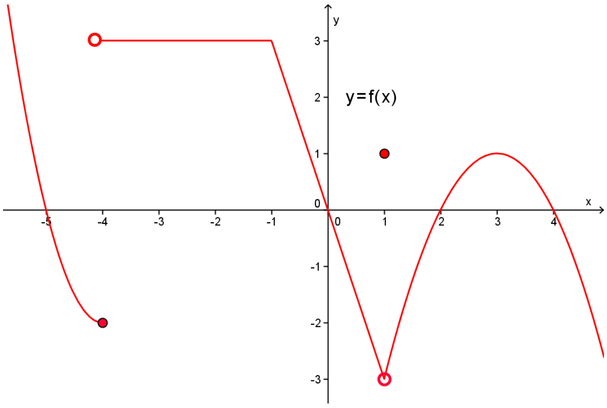
4º) Que $f(x)$ no tenga límite en ese punto debido a que los límites laterales no coinciden o bien a que alguno de ellos no exista.

En este caso $\boxed{\nexists \lim_{x\to a} f(x)}$ como $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Propiedad: Una función tiene límite en un punto si existen los límites laterales en dicho punto y además coinciden, y recíprocamente.
En caso contrario, NO existe el límite en ese punto.
El límite, si existe, es único.

Ejemplo: *Fíjate en las gráficas y en el cálculo de los siguientes límites:*

a)



$Dom(f)=\Re \qquad Rec(f)=\Re$

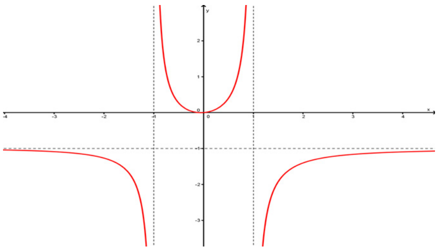
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=-2\\ \lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to-4} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-3\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to1} f(x)=-3$$

Observa que, sin embargo, $f(1)=1$

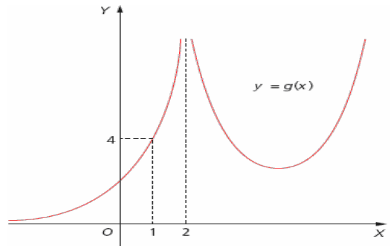
b) $Dom(f)=\Re\setminus\{-1,1\}$; $Rec(f)=\Re\setminus[-1,0)$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

$\nexists \lim\limits_{x\to-1} f(x) \qquad \nexists \lim\limits_{x\to1} f(x)$

c) $Dom(g)=\Re\setminus\{2\}$; $Rec(g)=(0,+\infty)$



$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1} g(x)=4 \qquad \lim\limits_{x\to2} g(x)=+\infty$

4. CÁLCULO DE LÍMITES

El cálculo de un límite a partir de la gráfica de una función es una tarea fácil, basta con observar con atención dicha gráfica. Sin embargo no siempre se dispondrá de ella por lo que habrá que recurrir a su expresión algebraica. No obstante, el cálculo analítico del límite de una función puede ser fácil de obtener, o bien dar lugar a una indeterminación que se debe resolver del modo adecuado.

Propiedades: Si $\lim\limits_{x\to\left\{\begin{smallmatrix}a\\+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}\right.} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to\left\{\begin{smallmatrix}a\\+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}\right.} g(x)=M$

Entonces:

$a)\ \lim\limits_{x\to\left\{\begin{smallmatrix}a\\+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}\right.} [f(x)\pm g(x)]=L\pm M$

$b)\ \lim\limits_{x\to\left\{\begin{smallmatrix}a\\+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}\right.} f(x)\cdot g(x)=L\cdot M$

$c)\ \lim\limits_{x\to\left\{\begin{smallmatrix}a\\+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}\right.} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}\quad (Si\ M\neq 0)$

$d)\ \lim\limits_{x\to\left\{\begin{smallmatrix}a\\+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}\right.} f(x)^{g(x)}=L^M$

NOTA: Si L y/o M son límites infinitos ó M=0, pueden aparecer indeterminaciones en las expresiones anteriores. Se resolverán de un modo específico.

Casos de indeterminación:

$a)\left[\dfrac{k}{0}\right] \quad b)\left[\dfrac{0}{0}\right] \quad c)\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \quad d)\,[\infty-\infty] \quad e)\,[0\cdot\infty] \quad f)\,[1^\infty] \quad g)\,[\infty^0] \quad h)\,[0^0]$

4.1. Cálculo de límites cuando $x \to a$

a) Casos inmediatos

Se obtiene el límite calculando $f(a)$, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$ $\quad b)\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x}{x-5} = -\dfrac{10}{3}$ $\quad c)\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{3x+4} = \sqrt{3\cdot 7+4} = \sqrt{25} = 5$

$d)\lim\limits_{x\to 0}(5+2x)^x = 5^0 = 1$ $\quad e)\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x} = \nexists$ $\quad f)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x + e^{2x}}{\ln(x+1)+x^3+1} = \dfrac{0^2\cdot\cos 0 + e^{2\cdot 0}}{\ln 1 + 0^3 + 1} = 1$

$g)\lim\limits_{x\to 2}(-2x^3+2x^2-1) = -2\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 1 = -9$ $\quad h)\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$ $\quad i)\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x} = \nexists$ $\quad j)\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = \nexists$

$k)\lim\limits_{x\to 12}\sqrt{x-3} = 3$ $\quad l)\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2} = \nexists$ $\quad m)\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2} = 0$ $\quad n)\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2} = \nexists$

b) Cociente de polinomios

Objetivo: calcular $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas.

Caso 1º $\boldsymbol{Q(a) \neq 0}$

Sigue siendo un caso inmediato.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+8}{x^2-4} = \dfrac{9}{-3} = -3$ $\quad b)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

Caso 2º $\boldsymbol{P(a) \neq 0}$ y $\boldsymbol{Q(a) = 0}$. ***Indeterminación*** $\dfrac{k}{0}$

Se resuelve obteniendo el valor de los límites laterales.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3} = \left(\dfrac{6}{0}\right)$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}$$

$b)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{(x-3)^2} = \left(\dfrac{6}{0}\right)$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{(x-3)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{(x-3)^2} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{(x-3)^2} = +\infty$$

Caso 3º $\boldsymbol{P(a) = 0}$ y $\boldsymbol{Q(a) = 0}$. ***Indeterminación*** $\dfrac{0}{0}$

Se resuelve factorizando el numerador y el denominador.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x+5} = \dfrac{-1}{7}$$

$b)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x-2} = 3$$

$c)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\left(\frac{2}{0}\right)$$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$$

c) Cálculo de límites de funciones definidas a trozos

Ejemplo: Hallar el límite de la función $f(x)=\begin{cases}2x-5 & si\ x<3\\ -x+7 & si\ 3\leq x<6\\ x/6 & si\ x\geq 6\end{cases}$ en 1, 3 y 6.

$\boxed{\text{En } x=1}$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(2x-5)=-3$$

$\boxed{\text{En } x=3}$ Límites laterales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-5)=1\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(-x+7)=4\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 3}f(x)$$

$\boxed{\text{En } x=6}$ Límites laterales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 6^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(-x+7)=1\\ \lim\limits_{x\to 6^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{x}{6}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to 6}f(x)=1$$

4.2. Cálculo de límites cuando $x\to+\infty$

a) Casos inmediatos.

En el caso de funciones polinómicas tendremos en cuenta el signo del coeficiente del término de mayor grado.

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-7x)=+\infty$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^2+5x)=-\infty$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2-30x)=+\infty$

$d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-5000x^2)=+\infty$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}=+\infty$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+7}=+\infty$

$g)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3-x}=\nexists$

b) Cociente de polinomios

Surge la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Se resuelve analizando los términos de mayor grado del numerador y del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases}+\infty\ \text{ó}\ -\infty & si\ n>m,\ y\ \dfrac{a_n}{b_m}>0,\ o\ bien,\ \dfrac{a_n}{b_m}<0\\ \dfrac{a_n}{b_m} & si\ \ n=m\\ 0 & si\ \ n<m\end{cases}$$

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{10x^2-7x+3}=+\infty$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-7x}{-5x^2+3x-2}=-\infty$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^3+5x^2+1}{6x^3+3x+1}=-\dfrac{1}{3}$

$d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^7+3x+1}{2x^7+5}=2$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{5x^2+2}=0$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+5x-2}=0$

4.3. Cálculo de límites cuando $x \to -\infty$

Tendremos en cuenta que:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)}$$

y calcularemos el límite de la expresión resultante.

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x^2-5x+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((-x)^2-5(-x)+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+5x+3\right)=+\infty.$

$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(3x^3+2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3(-x)^3+2(-x)-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3-2x-1\right)=-\infty.$

$c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-7}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(-x)-7}{3(-x)^2+2(-x)-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-7}{3x^2-2x-1}=0.$

4.4. Límites de funciones irracionales. Indeterminación $\frac{0}{0}$ e $\infty-\infty$

Se resuelven multiplicando y dividiendo la función por la expresión radical conjugada.

Ejemplos:

$a)\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}.$$

$b)\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}.$$

$c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4-x^2+2}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=\frac{6}{+\infty}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=0.$$

$d)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{Indet.}$$

Se divide por x el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

$$e)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2\right]\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left[\left(\sqrt{x+6}\right)^2-3^2\right]\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6-9)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{3}{2}.$$

$$f)\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)=(\infty-\infty)\ \text{Indeterminación.}$$

Se pasa a un límite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{(-x)^2+(-x)+6}+(-x)\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-x+6}-x\right)=(\infty-\infty).\ \text{Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+6}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-x+6}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x^2}-x+6-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-x+6}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x+6}{\sqrt{x^2-x+6}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Se resuelve esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por x:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{-x+6}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-x+6}+x}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{-x}{x}+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{6}{x^2}}+\dfrac{x}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-1+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1}=\frac{-1}{\sqrt{1}+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}+x\right)=-\frac{1}{2}.$$

$$g)\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-3}}=\frac{(\infty-\infty)}{(\infty-\infty)}\ \text{Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left[\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)}{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2\right]\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left[\cancel{x}-1-\cancel{x}+2\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)}{\left[\cancel{x}-\cancel{x}+3\right]\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}{3\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Se resuelve esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}}{3\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\sqrt{\dfrac{x}{x}-\dfrac{3}{x}}}{3\left(\sqrt{\dfrac{x}{x}-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{3\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{1}}{3\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)}=\frac{1}{3}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-3}}=\frac{1}{3}.$$

4.5. Indeterminación $0\cdot\infty$ y otros casos de $\infty-\infty$

Se opera previamente y pasamos a un caso de indeterminación conocida tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ó $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+1}{x^2-3}\cdot\dfrac{x^2-4}{4x}\right)=(0\cdot\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3+x^2-20x-4}{4x^3-12x}\right)=\frac{5}{4}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{x^2-3}\cdot\frac{x^2-4}{4x}\right)=\frac{5}{4}.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x^4-1}{x^2+5}\right)=(0\cdot\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^4-2}{x^3+5x}\right)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot\frac{x^4-1}{x^2+5}\right)=+\infty.$$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+4}{x-3}-\dfrac{4x+5}{2}\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(2x^2+4)-(4x+5)(x-3)}{2(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+8-4x^2+12x-5x+15}{2x-6}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+23}{2x-6}=\frac{7}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+4}{x-3}-\frac{4x+5}{2}\right)=\frac{7}{2}.$$

$d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+5x}{2x+5}-\dfrac{6x^2+9x}{4x-1}\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+5x)(4x-1)-(6x^2+9x)(2x+5)}{(2x+5)(4x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-31x^2-50x}{8x^2+18x-5}=-\frac{31}{8}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+5x}{2x+5}-\frac{6x^2+9x}{4x-1}\right)=-\frac{31}{8}.$$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}:\dfrac{x-1}{x^2+5}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Aunque no es una indeterminación del tipo que estamos estudiando, también se resuelve operando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+10}{x^2-x}\right)=2\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}:\frac{x-1}{x^2+5}\right)=2.$$

4.6. Indeterminación 1^∞

Para resolverla tendremos en cuenta que:

> Si $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} g(x)=\infty$ (ya sea $+\infty$ o bien $-\infty$) entonces:
>
> $$\lim_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=1^\infty$ Indeterminación.

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x-1)(x-3)}{x^2+2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}}=e^3\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=e^3.$$

Otra forma de resolver esta indeterminación:

Se basa en que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$ La idea es buscar esta estructura en nuestro límite:

1º) Se suma y se resta 1 a la base: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)^{3x-1}$

2º) Se opera la base inicial con -1: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{x^2}+x-1-\cancel{x^2}-2}{x^2+2}\right)^{3x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-3}{x^2+2}\right)^{3x-1}$

3º) Se necesita un 1 en el numerador del segundo sumando de la base: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x-3}}\right)^{3x-1}$

4º) Se busca tener en el exponente la misma expresión que en el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x-3}}\right)^{\frac{x^2+2}{x-3}}\right]^{\frac{x-3}{x^2+2}(3x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+2}{x-3}}\right)^{\frac{x^2+2}{x-3}}}_{\downarrow\, e}\right]^{\frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}} = e^3.$$

$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{x-2} = 1^\infty$ Indeterminación.

$$e^{\lim_{x\to+\infty}(x-2)\left(\frac{3x+1}{3x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{3x}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{x-2} = \sqrt[3]{e}.$$

$c)\ \lim_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty$ Indeterminación.

$$e^{\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)} = e^{\lim_{x\to2}\frac{-x+2}{2x(x-2)}} = e^{\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}} = e^{\lim_{x\to2}\frac{-1}{2x}} = e^{\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{e} \Rightarrow \lim_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}.$$

$d)\ \lim_{x\to6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}} = 1^\infty$ Indeterminación.

$e^{\lim_{x\to6}\frac{1}{x-6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}-1\right)} = e^{\lim_{x\to6}\frac{x^2-5x-6}{(x-4)(x-6)}} = e^{\frac{0}{0}}$ De nuevo tenemos una indeterminación.

$$e^{\lim_{x\to6}\frac{(x+1)(x-6)}{(x-4)(x-6)}} = e^{\lim_{x\to6}\frac{x+1}{x-4}} = e^{\frac{7}{2}} = \sqrt{e^7} = e^3\sqrt{e} \Rightarrow \lim_{x\to6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}} = e^3\sqrt{e}.$$

Observación:

Para resolver indeterminaciones del tipo ∞^0 ó 0^0 es muy útil tomar logaritmos y posteriormente usar la Regla de L´Hôpital que veremos en la unidad de derivación.

4.7. Comparación de infinitos

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty$ entonces decimos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ es un **infinito de orden superior** que $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ si:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty,\ \text{o bien}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

Escala de infinitos:

$\boxed{\text{Logaritmos con } a>1} < \boxed{\text{Potencias (de menor a mayor exponente)}} < \boxed{\text{Exponenciales con } a>1}$

Es decir:

$$\boxed{Orden\ \lim_{x\to+\infty}\log_a x < Orden\ \lim_{x\to+\infty} x^n < Orden\ \lim_{x\to+\infty} a^x}\quad a>1.$$

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3}{\log_2 x}=+\infty$

$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{7x^3}=0$

$c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{-\log_3 x}=-\infty$

$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_3 x}{5^x}=0$

$e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{3x^7}=+\infty$

$f)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^7}{2^x}=0$

$g)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{\ln(4x-1)}=+\infty$

$h)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(4x-1)}{e^{3x}}=0$

$i)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2^x-\sqrt{x^5-1}\right)=+\infty$

4.8. Infinitésimos equivalentes

Decimos que f es un infinitésimo en a si $\lim_{x\to a} f(x)=0$.

Dos infinitésimos f y g son equivalentes en a si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Entonces escribiremos $f\sim g$.

Infinitésimos equivalentes más usuales en $a=0$:

$$sen\ x\sim x \qquad tg\ x\sim x \qquad e^x-1\sim x \qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2} \qquad \ln(x+1)\sim x$$

Estas equivalencias también son ciertas si sustituimos x por $h(x)$ con $\lim_{x\to 0} h(x)=0$.

Los infinitésimos equivalentes son muy importantes ya que en el cálculo de límites se puede sustituir un infinitésimo por su equivalente, siempre que aparezca multiplicando o dividiendo.

Ejemplos:

$a)\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{7x^2}=\underset{Ind.}{\left[\frac{0}{0}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{7x}=\frac{1}{0}\Rightarrow\nexists$ ya que los límites laterales en $x=0$ son distintos.

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2}=0.$$

$$c)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(5x+1)}{tg\ 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{5x}=\underset{Ind.}{\left[\frac{0}{0}\right]}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

5. ASÍNTOTAS

De modo informal podemos definir los siguientes conceptos:

Ramas infinitas: Tramos de la curva que se "alejan" indefinidamente del origen de coordenadas.

Asíntota: Recta a la que se "ciñe" (aproxima) una rama infinita.

Rama asintótica: Rama infinita que se "ciñe" a una asíntota.

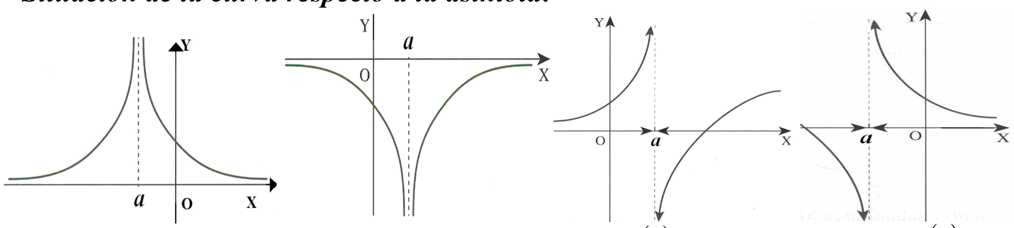
5.1. RAMAS INFINITAS EN $x = a$. ASÍNTOTAS VERTICALES

Si

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ ó } -\infty \qquad \text{y/o} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \text{ ó } -\infty}$$

entonces la función tiene una rama infinita por la derecha o por la izquierda (o por las dos), y la recta $x = a$ es una ***asíntota vertical.***

- ***Situación de la curva respecto a la asíntota:***



$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

Observaciones:

- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ racional, ***los candidatos a asíntotas verticales*** son los valores de x que anulan el denominador.
- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.

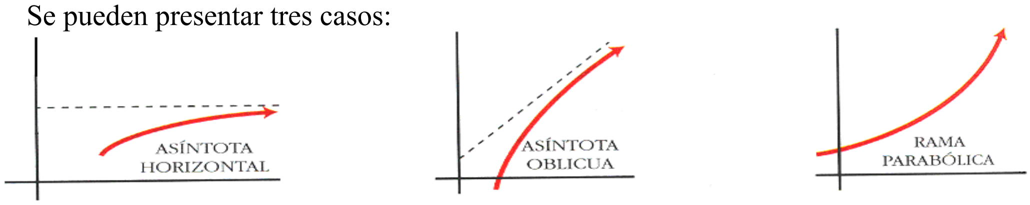
Ejemplo 1: Calcula las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \frac{5}{x-3} \qquad b)\ f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2} \qquad c)\ f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \qquad d)\ f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

Ejemplo 2: ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la función $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 16}$?

5.2. RAMAS INFINITAS CUANDO $x \to +\infty$ (ó $x \to -\infty$)

Se pueden presentar tres casos:



a) ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Si

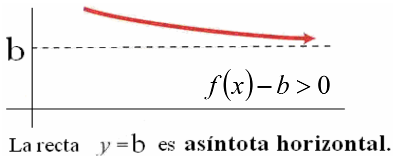
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \quad (b \in \Re)}$$

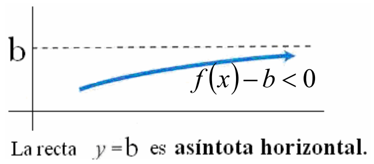
entonces la función f tiene una rama infinita cuando $x \to +\infty$ y la recta $y = b$ es una ***asíntota horizontal*** en $+\infty$.

- ***Situación de la curva respecto de la asíntota:***

Estudiamos el signo de $f(x) - b$ para valores "grandes" de x (es decir, si $x \to +\infty$):

- Si $f(x) - b > 0 \Rightarrow$ curva por encima de la asíntota.
- Si $f(x) - b < 0 \Rightarrow$ curva por debajo de la asíntota.





Análogamente si $x \to -\infty$.

Observaciones:

- Una función tendrá, a lo sumo, dos asíntotas horizontales, una en $+\infty$ y otra en $-\infty$.
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es un cociente de polinomios, la función tendrá la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$. Será necesario que $Grado\,P(x)\le Grado\,Q(x)$.

Ejemplo: Calcula las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2-x} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-2x+1} \qquad c)\ f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x-3}$$

b) ASÍNTOTAS OBLICUAS

Si

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0}$$

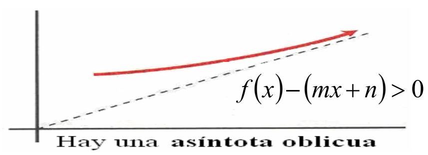
entonces la función f tiene una rama infinita cuando $x\to+\infty$ y la recta $\boldsymbol{y=mx+n}$ es una ***asíntota oblicua*** en $+\infty$.

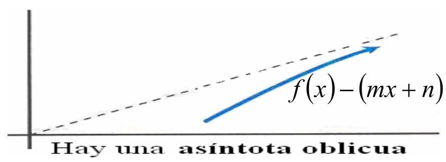
Para calcularla: $\boxed{m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \qquad n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]}$

- ***Situación de la curva respecto de la asíntota:***

  Estudiamos el signo de $f(x)-(mx+n)$ para valores "grandes" de x (si $x\to+\infty$):

  - Si $f(x)-(mx+n)>0 \Rightarrow$ curva por encima de la asíntota.
  - Si $f(x)-(mx+n)<0 \Rightarrow$ curva por debajo de la asíntota.





Análogamente si $x\to-\infty$.

Observaciones:

- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es un cociente de polinomios, la función tendrá asíntota oblicua si $Grado\ P(x)-Grado\ Q(x)=1$. La asíntota oblicua será el cociente obtenido al efectuar la división de polinomios anterior.
- Una función tendrá, a lo sumo, dos asíntotas oblicuas, una en $+\infty$ y otra en $-\infty$.
- Si hay asíntota horizontal $\Rightarrow$ No hay asíntota oblicua y viceversa.

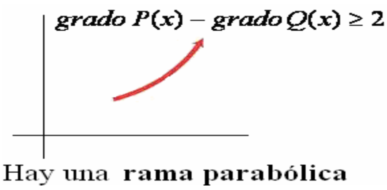
Ejemplo 1: Calcula las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{2x^2+5x+3}{x+4} \qquad b)\ f(x)=\frac{5x^3-2x^2+3}{x^2-4}$$

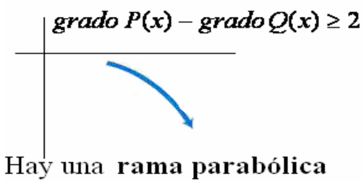
Ejemplo 2: La función $f(x)=\dfrac{px^2+1}{x+1}$ tiene como asíntota oblicua la recta de ecuación $y=-2x+2$. Determina el valor de p y estudia si la gráfica de la función corta a la asíntota.

c) ***RAMAS PARABÓLICAS (<u>en funciones racionales</u>)***

Si $Grado\ P(x) - Grado\ Q(x) \geq 2$ entonces hay una rama parabólica "hacia arriba" o "hacia abajo" dependiendo de que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$ ó $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = -\infty$ respectivamente.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

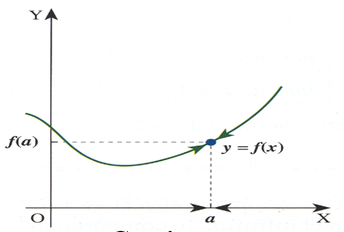
Análogamente si $x \to -\infty$.

Ejemplo: Estudia si las siguientes funciones tienen ramas parabólicas:

$$a)\ f(x) = \frac{x^3 - 5x^2}{-x+3} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 + 3}$$

6. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

6.1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO



Continua en *a*

Una función f ***es continua en*** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Esta definición implica que se cumplan ***tres*** condiciones:

1) Existe $f(a)$ (Es decir, $a \in Dom(f)$.)
2) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y <u>es finito.</u>
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (Es decir, 1) y 2) coinciden).

Si no se cumple alguna de estas tres condiciones, diremos que la función es ***discontinua*** en a.

6.2. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

f es **continua en (a, b)** si lo es en todo punto de ese intervalo.

f es **continua en [a, b]** si es continua en (a, b) y, además, es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

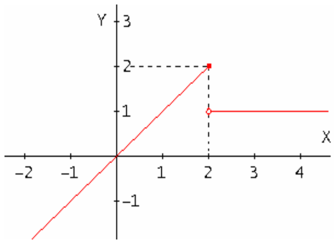
Nota:

f es ***continua por la derecha en*** a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

f es ***continua por la izquierda en*** b si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

6.3. TIPOS DE DISCONTINUIDADES

a) Discontinuidad inevitable de salto finito*:* Presenta un salto en ese punto. Existen los límites laterales y son finitos, pero distintos.



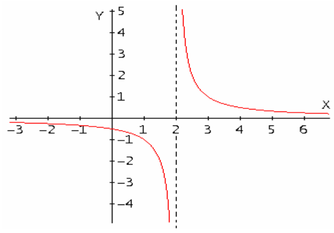
Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \leq 2 \\ 1 & si\ x > 2 \end{cases}$ $\qquad Dom(f) = \Re$

$\exists\, f(2) = 2$

$\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ya que $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$

Discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 2$.

b) Discontinuidad inevitable de salto infinito: Tiene ramas infinitas en ese punto. Uno o los dos límites laterales son infinitos.



Ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ $\quad Dom(f)=\Re\setminus\{2\}$

$\nexists\, f(2)$

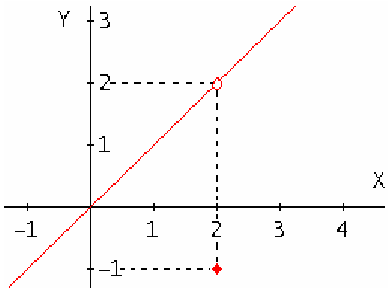
$\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ya que $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=2$.

c) Discontinuidad evitable:

En este caso existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, pero no coincide con $f(a)$ (tiene ese punto "desplazado"), o bien no existe $f(a)$ (Le "falta" ese punto).

Ejemplo: *(Tiene ese punto "desplazado")*



$f(x)=\begin{cases} x & si\ x\neq 2 \\ -1 & si\ x=2 \end{cases}$ $\quad Dom(f)=\Re$

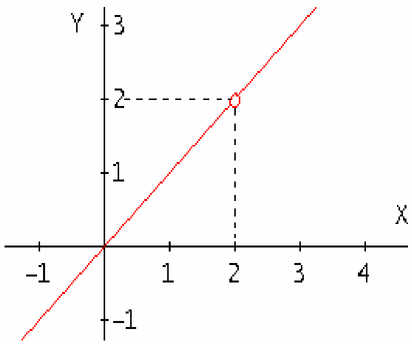
En este caso:

$\exists\, f(2)=-1$ y también $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$

Sin embargo, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

Esta función tiene una ***discontinuidad evitable*** en $x=2$ y se evita redefiniendo $f(2)=2$.

Ejemplo: *(Le "falta" ese punto)*



$f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ $\quad Dom(f)=\Re\setminus\{2\}$

Fíjate que:

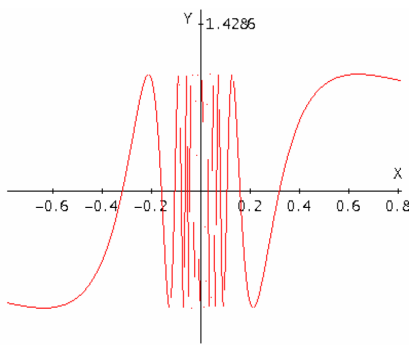
$\nexists\, f(2)$ (La función no está definida en $x=2$)

$\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$ ya que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x=2$$

Esta función tiene una ***discontinuidad evitable*** en $x=2$ y se evita definiendo $f(2)=2$.

d) Discontinuidad esencial: Alguno de los límites laterales no existe.



Ejemplo:

$f(x)=sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad Dom(f)=\Re\setminus\{0\}$

Observa que:

$\nexists\, f(0)$ (La función no está definida en $x=0$)

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ya que: $\left.\begin{array}{l} \nexists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \\ \nexists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{array}\right\}$

f tiene una ***discontinuidad esencial*** en $x=0$

Propiedad: Si f y g son funciones continuas en a, las siguientes funciones también son continuas en a:

$a)\ f\pm g \quad b)\ f\cdot g \quad c)\ k\cdot g \quad k\in\Re \quad d)\ f/g \quad si\ \ g(a)\neq 0 \quad e)\ f\circ g$

Las funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus compuestas, son continuas en su dominio de definición.

Ejemplo 1: Estudiar la continuidad de estas funciones en los puntos que se indican:

$$a)\ f(x)=\begin{cases} 3x-2 & si\ x<-1 \\ x^2+4x-1 & si\ -1\le x\le 2 \\ 11+\ln(x-1) & si\ x>2 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} 2x^2-6 & si\ \ x<1 \\ -4 & si\ \ x=1 \\ \dfrac{2-2x}{\sqrt{x-1}} & si\ \ x>1 \end{cases}$$

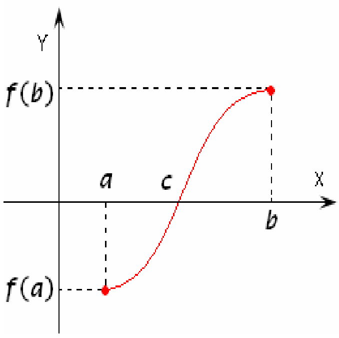
en $x=-1$ y $x=2$. en $x=1$.

Ejemplo 2: Determina los valores de a y b para que las siguientes funciones sean continuas.

$$a)\ f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x\le 1 \\ ax+3 & si\ 1<x\le 2 \\ bx^3-2 & si\ x>2 \end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases} 1+\cos x & si\ x\le 0 \\ 2(a+x) & si\ 0<x<1 \\ b/x^2 & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3: Calcula los valores de m y n sabiendo que la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+n}{x^3+mx^2-14x}$ posee una discontinuidad evitable en $x=2$.

7. FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO. TEOREMA DE BOLZANO. TEOREMA DE WEIERSTRASS

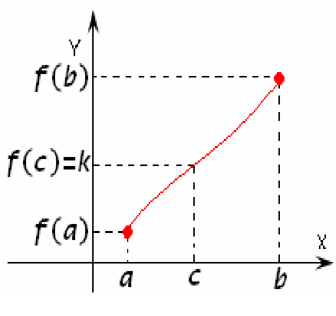


Teorema de Bolzano:

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y $Signo(f(a))\ne Signo(f(b))$, entonces existe al menos $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Ejemplo: Probar que la función $f(x)=x^3-3x+40$ tiene, al menos, una raíz real y localizarla entre dos valores enteros consecutivos.

Los dos siguientes teoremas son importantes consecuencias del Teorema de Bolzano:

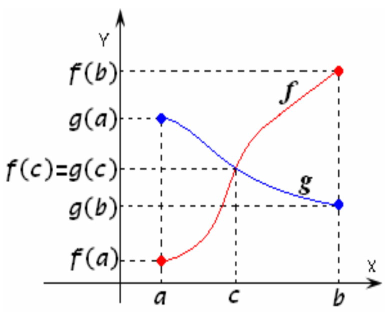


Teorema de los valores intermedios (Darboux):

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y k es un número real comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=k$.

Es decir, la función f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Ejemplo: Dada la función $f(x)=x^3-x^2+x$, ¿se puede afirmar que existe al menos un punto ***c*** en el intervalo $[1,2]$ tal que $f(c)=2$? Razona la respuesta.



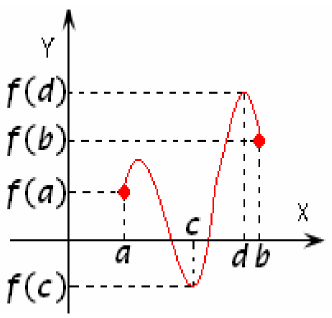
Teorema sobre gráficas que se cortan:

Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ tales que $f(a)<g(a)$ y $f(b)>g(b)$, entonces existe al menos $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=g(c)$.

Es decir, existe un punto en el que las gráficas se cortan, o dicho de otro modo, existe un punto en el que las dos funciones toman el mismo valor.

Ejemplo: Probar que las gráficas de $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en un punto y localízalo entre dos números enteros.

Teorema de acotación:
Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces está acotada en $[a, b]$.



Teorema de Weierstrass:

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$.

Es decir, f está acotada y existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Ejemplo: Indica si la función $f(x) = \ln x$ está acotada en $[1, e]$, y si alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo. En caso afirmativo dibújala y localiza estos puntos.

8. ANEXOS

8.1. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BOLZANO

Supongamos que $f(a)<0<f(b)$.

Sea $x_1=\dfrac{a+b}{2}$. Si $f(x_1)=0 \Rightarrow$ Se toma $c=x_1$ y hemos acabado.

En caso contrario:

Si $f(x_1)>0 \Rightarrow$ Se toma $[a_1,b_1]$ con $a_1=a;\ b_1=x_1 \Rightarrow f(a_1)<0<f(b_1)$.

Si $f(x_1)<0 \Rightarrow$ Se toma $[a_1,b_1]$ con $a_1=x_1;\ b_1=b \Rightarrow f(a_1)<0<f(b_1)$.

Repito el proceso con $x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$. Si $f(x_2)=0 \Rightarrow$ Se toma $c=x_2$ y hemos acabado.

En caso contrario obtengo, de la misma forma anterior, $[a_2,b_2]$ con $f(a_2)<0<f(b_2)$.

Reiterando el proceso, obtenemos una sucesión de intervalos encajados:

$$\ldots\subset[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]\subset[a_{n-2},b_{n-2}]\subset\ldots\subset[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]\subset[a,b]$$

tales que $f(a_i)<0<f(b_i)$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \textit{diámetro}\,[a_n,b_n]=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0\ (*)$.

En estas condiciones, el *Teorema de los Intervalos Encajados de Cantor* nos dice que:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$$

Nos queda comprobar que $f(c)=0$.

Supongamos que no es cierto y que $f(c)>0$.

Por ser f continua en $x=c$, el *Lema de Conservación del Signo* nos dice que:

$$\exists\,\varepsilon>0 \text{ con } f(x)>0 \text{ para cada } x\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$$

Pero por $(*)$ podemos encontrar $n\in\mathbb{N}$ con $[a_n,b_n]\subset(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ lo que es una contradicción con $f(a_n)<0<f(b_n)$.

Por tanto $f(c)=0$.

8.2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS (DARBOUX)

Se define $g(x)=f(x)-k$.

Supongamos que $f(a)<k<f(b)$ (en caso contrario se haría análogamente)

f es continua en $[a,b] \Rightarrow g$ es continua en $[a,b]$.

Además, $\begin{cases} g(a)=f(a)-k<0 \\ g(b)=f(b)-k>0 \end{cases} \underset{\textit{Bolzano}}{\overset{\textit{Teorema}}{\Rightarrow}} \exists\, c\in(a,b)$ tal que $g(c)=0$.

Pero $g(c)=f(c)-k \Rightarrow f(c)-k=0 \Rightarrow f(c)=k$.

8.3. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA SOBRE GRÁFICAS QUE SE CORTAN

Se define $h(x)=f(x)-g(x)$.

f y g son continuas en $[a,b] \Rightarrow h$ es continua en $[a,b]$.

Además, $\begin{cases} h(a)=f(a)-g(a)<0 \\ h(b)=f(b)-g(b)>0 \end{cases} \underset{\textit{Bolzano}}{\overset{\textit{Teorema}}{\Rightarrow}} \exists\, c\in(a,b)$ tal que $h(c)=0$.

Pero $h(c)=f(c)-g(c) \Rightarrow f(c)-g(c)=0 \Rightarrow f(c)=g(c)$.