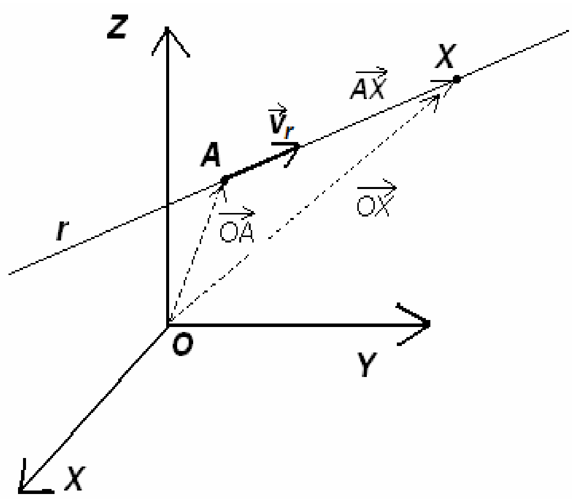
UNIDAD 9 GEOMETRÍA AFÍN

RECTAS EN EL ESPACIO

1. ECUACIONES DE LA RECTA



Una recta r queda determinada por:

- Un punto $A(a_1,a_2,a_3)$
- Un vector de dirección $\vec{v}_r(v_1,v_2,v_3)$

A $r(A;\vec{v}_r)$ se le llama ***determinación lineal*** de la recta r.

Si $X(x,y,z)$ es un punto genérico de la recta:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v}_r$$

Por tanto:

$$\boxed{\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v}_r;\quad \lambda\in\Re}$$

Ecuación vectorial de la recta

En coordenadas:

$$\boxed{r:(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)\quad \lambda\in\Re}$$

Haciendo variar el parámetro λ obtenemos todos los puntos de la recta.

Operando $(x,y,z)=(a_1+\lambda v_1,a_2+\lambda v_2,a_3+\lambda v_3)$ e igualando coordenada a coordenada

$$\boxed{r:\left.\begin{aligned} x&=a_1+\lambda v_1\\ y&=a_2+\lambda v_2\\ z&=a_3+\lambda v_3\end{aligned}\right\}\quad \lambda\in\Re}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta

Despejando λ en estas ecuaciones e igualando:

$$\boxed{r:\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}}$$

Ecuación en forma continua de la recta

A partir de estas ecuaciones tenemos:

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}\qquad \frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$$

Operando se llega a dos ecuaciones de la forma:

$$\boxed{r:\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0\end{aligned}\right\}}$$

Ecuaciones implícitas de la recta

Ejemplo: *Dada la recta* $r(A;\overrightarrow{v_r})$ con $A(3,1,-2)$ y $\vec{v}_r(-3,2,1)$.

a) Determina sus distintas ecuaciones.

*b) Determina dos puntos de **r** distintos de A y un vector director distinto de $\vec{v}_r$.*

*c) Determina si el punto $B(2,-1,4)$ pertenece a **r**.*

Solución:

a) Ecuación vectorial: $r:(x,y,z)=(3,1,-2)+\lambda(-3,2,1)\quad \lambda\in\Re$

Ecuaciones paramétricas: $r:\left.\begin{array}{l} x=3-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+\lambda \end{array}\right\} \quad \lambda\in\Re$

Ecuación en forma continua: $r:\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1}$

Ecuaciones implícitas: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-1}{2} \\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow r:\left.\begin{array}{l} 2x+3y-9=0 \\ y-2z-5=0 \end{array}\right\}$

b) Si $\lambda=1\Rightarrow(x,y,z)=(3,1,-2)+1(-3,2,1)=(0,3,-1)\Rightarrow B(0,3,-1)$
Si $\lambda=2\Rightarrow(x,y,z)=(3,1,-2)+2(-3,2,1)=(-3,5,0)\Rightarrow C(-3,5,0)$
Otro vector director: $w_r=7\vec{v}_r(-3,2,1)=(-21,14,7)\Rightarrow\vec{w}_r(-21,14,7)$

c) Si sustituimos en las ecuaciones paramétricas (por ejemplo):
$\left.\begin{array}{l} 2=3-3\lambda \\ -1=1+2\lambda \\ 4=-2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=\frac{1}{3} \\ \lambda=-1 \\ \lambda=6 \end{array}\right\} \Rightarrow B$ no pertenece a la recta ***r***.

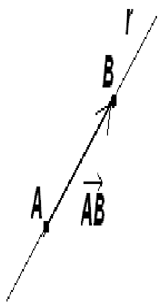
- ***Ecuación de una recta determinada por dos puntos***

  Una recta también queda determinada por dos puntos A y B. Una determinación lineal es $r\left(A;\overrightarrow{AB}\right)$. Es decir, tomamos $\vec{v}_r=\overrightarrow{AB}$

  Ejemplo: *Dados los puntos* $A(3,1,0)$ *y* $B(5,0,-1)$ *se pide:*

  a) Determina las distintas ecuaciones de la recta que pasa por A y B.

  b) Determina, utilizando la ecuación en forma continua, si el punto $C(7,-1,-2)$ *pertenece a dicha recta.*



Solución:

a) Hallamos un vector director de la recta $\vec{v}_r=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{v}_r(2,-1,-1)$
Ecuación vectorial: $r:(x,y,z)=(3,1,0)+\lambda(2,-1,-1) \quad \lambda\in\Re$

Ecuaciones paramétricas: $r:\left.\begin{array}{l} x=3+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=0-\lambda \end{array}\right\} \quad \lambda\in\Re$

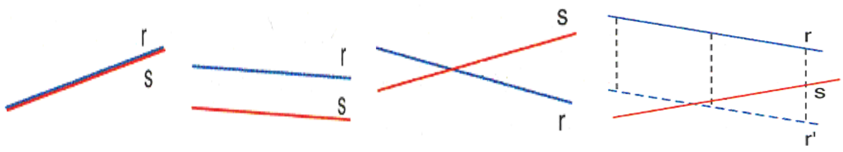
Ecuación en forma continua: $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

Ecuaciones implícitas: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1} \\ \dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow r:\left.\begin{array}{l} -x-2y+5=0 \\ -y+z+1=0 \end{array}\right\}$

b) $\dfrac{7-3}{2}=\dfrac{-1-1}{-1}=\dfrac{-2}{-1}\Rightarrow\dfrac{4}{2}=\dfrac{-2}{-1}=\dfrac{-2}{-1}\Rightarrow 2=2=2\Rightarrow C\in r$.

2. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Dos rectas en el espacio pueden tener las posiciones relativas:



Dadas dos rectas por sus determinaciones lineales:

$$r(A;\vec{v}_r) \qquad s(B;\vec{v}_s)$$

- Si $\vec{v}_r // \vec{v}_s \Rightarrow$ Son coincidentes o paralelas.

  Tomamos $A \in r$ y sustituimos en $s \Rightarrow \begin{cases} Si\ A \in s \Rightarrow Coincidentes \\ Si\ A \notin s \Rightarrow Paralelas \end{cases}$

- Si $\vec{v}_r \# \vec{v}_s$ ($\vec{v}_r$ no es paralelo a $\vec{v}_s$):

  Calculamos $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} Si\ \det\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \Rightarrow r\ y\ s\ se\ cortan \\ Si\ \det\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) \neq 0 \Rightarrow r\ y\ s\ se\ cruzan \end{cases}$

Estudio a partir del rango.
Dadas **r** y **s** en implícitas:

- $\left.\begin{array}{l} r(M) = 2 \\ r(M|b) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv s$
- $\left.\begin{array}{l} r(M) = 2 \\ r(M|b) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow r // s$
- $\left.\begin{array}{l} r(M) = 3 \\ r(M|b) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ r y s secantes
- $\left.\begin{array}{l} r(M) = 3 \\ r(M|b) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$ r y s se cruzan en el espacio

Nota:

$$(M|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{array}\right)$$

Ejemplo: *Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas:*

a) $r:(x,y,z) = (2,1,-3) + \lambda(1,-3,1) \quad \lambda \in \Re \qquad s: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-6} = \dfrac{z+1}{2}$

b) $r:(x,y,z) = (2,1,3) + \lambda(2,-1,1) \ \lambda \in \Re \quad s:(x,y,z) = (-1,-1,4) + \mu(1,3,-2) \ \ \mu \in \Re$

c) $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \qquad \mu \in \Re \\ z = 5 \end{cases}$

d) $r: \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -17 + 5\mu \\ y = 14 - 3\mu \quad \mu \in \Re \\ z = \mu \end{cases}$

Solución:

a) $\vec{v}_r(1,-3,1), \vec{v}_s(2,-6,2) \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \vec{v}_r // \vec{v}_s \Rightarrow$ Son coincidentes o paralelas.

Tomamos $A(2,1,-3) \in r$ y vemos si pertenece a s: $\dfrac{2-2}{2} \neq \dfrac{1+3}{-6} \Rightarrow A \notin s$

Por tanto, r y s son paralelas.

b) $\vec{v}_r(2,-1,1), \vec{v}_s(1,3,-2) \Rightarrow \dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-1}{3} \neq \dfrac{1}{-2} \Rightarrow$ Se cortan o se cruzan.

Tomamos $A(2,1,3) \in r$ y $B(-1,-1,4) \in s \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-3,-2,1)$

$$\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan ya que } rang\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = 2$$

c) $\vec{v}_r(-3,5,1), \vec{v}_s(-1,1,0) \Rightarrow \dfrac{-3}{-1} \neq \dfrac{5}{1} \neq \dfrac{1}{0} \Rightarrow$ Se cortan o se cruzan.

Tomamos $A(2,3,0) \in r$ y $B(1,0,5) \in s \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-1,-3,5)$

$$\det\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 14 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan ya que } rang\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AB}\right) = 3$$

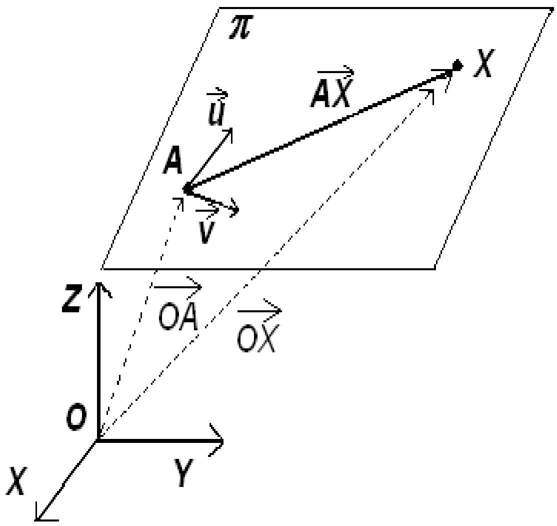
d) $\vec{v}_r(-5,3,-1), \vec{v}_s(5,-3,1) \Rightarrow \frac{-5}{5} = \frac{3}{-3} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \vec{v}_r // \vec{v}_s \Rightarrow$ Son coincidentes o paralelas.

Tomamos $A(3,2,4) \in r$ y vemos si pertenece a s:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -17 + 5\mu \\ 2 = 14 - 3\mu \\ 4 = \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 4 \\ \mu = 4 \\ \mu = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow A \in s \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son coincidentes.}$$

PLANOS EN EL ESPACIO

3. ECUACIONES DEL PLANO



Un plano π queda determinado por:

- Un punto $A(a_1, a_2, a_3)$
- Dos vectores no paralelos (linealmente independientes) $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, llamados ***vectores directores*** del plano.

Decimos que $\pi(A; \vec{u}, \vec{v})$ es una ***determinación lineal*** del plano π.

Si $X(x, y, z)$ es un punto genérico del plano:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$$

Como $\overrightarrow{AX}$ es un vector del plano π

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Por tanto:

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}; \quad \lambda, \mu \in \Re}$$

Ecuación vectorial del plano

En coordenadas:

$$\boxed{\pi : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3); \quad \lambda, \mu \in \Re}$$

Haciendo variar λ y $\mu \in \Re$ obtenemos todos los puntos del plano.

Operando: $(x, y, z) = (a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1, a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2, a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3)$ e igualando coordenada a coordenada

$$\boxed{\pi : \left.\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\} \quad \lambda, \mu \in \Re}$$

Ecuaciones paramétricas del plano

Eliminando los parámetros λ y μ obtenemos:

$$\boxed{\pi : Ax + By + Cz + D = 0}$$

Ecuación general o implícita del plano

- ***Forma de obtener la ecuación general o implícita del plano***

Para eliminar λ y μ a partir de las ecuaciones paramétricas escribimos:

$$\left.\begin{array}{l} x-a_1=\lambda u_1+\mu v_1 \\ y-a_2=\lambda u_2+\mu v_2 \\ z-a_3=\lambda u_3+\mu v_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AX}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$$

Es decir, $\overrightarrow{AX}, \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes $\Rightarrow rang\left(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right)=2$. Por tanto:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-a_1 & u_1 & v_1 \\ y-a_2 & u_2 & v_2 \\ z-a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}=0}$$

y desarrollando este determinante obtenemos la ecuación implícita del plano.

Propiedad: El vector $\vec{n}(A,B,C)$ es un vector ortogonal (perpendicular) al plano. Se llama ***vector normal o característico del plano***.

Demostración: Si $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$ son dos puntos arbitrarios del plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow Ap_1+Bp_2+Cp_3+D=0$ y $Aq_1+Bq_2+Cq_3+D=0$.

Como $\overrightarrow{PQ}(q_1-p_1, q_2-p_2, q_3-p_3)$ y $\vec{n}(A,B,C)$, entonces:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=A(q_1-p_1)+B(q_2-p_2)+C(q_3-p_3)=\underbrace{Aq_1+Bq_2+Cq_3}_{-D}-\underbrace{(Ap_1+Bp_2+Cp_3)}_{-D}=-D+D=0$$

Luego $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ y $\overrightarrow{PQ}$ es un vector arbitrario de dicho plano (por ser arbitrarios *P* y *Q*). Se tiene, por tanto, que $\vec{n}$ es un vector ortogonal al plano π.

Ejemplo 1: *Escribe la ecuación vectorial, paramétricas e implícita del plano que pasa por el punto* $A(2,-1,3)$ *y con vectores directores* $\vec{u}(2,1,-1)$ *y* $\vec{v}(-1,0,3)$.

Ecuación segmentaria del plano:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

con $a,b,c\neq 0$.

Siendo: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ los puntos de corte del plano con los ejes.

Solución:

Ecuación vectorial: $\pi:(x,y,z)=(2,-1,3)+\lambda(2,1,-1)+\mu(-1,0,3); \quad \lambda,\mu\in\Re$

Ecuaciones paramétricas: $\pi: \left.\begin{array}{l} x=2+2\lambda-\mu \\ y=-1+\lambda \\ z=3-\lambda+3\mu \end{array}\right\} \quad \lambda,\mu\in\Re$

Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y+1 & 1 & 0 \\ z-3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(x-2)+y+1+z-3-6(y+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-6+y+1+z-3-6y-6=0 \Rightarrow \pi: 3x-5y+z-14=0$$

Ejemplo 2: *Averigua si los dos sistemas de ecuaciones siguientes representan sendos planos y, en caso que así sea, indica un punto y dos vectores directores de cada uno.*

$$a)\ \left.\begin{array}{l} x=2+2\lambda \\ y=3+\mu \\ z=2+\lambda+3\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu\in\Re \qquad b)\ \left.\begin{array}{l} x=2+3\lambda-6\mu \\ y=7-\lambda+2\mu \\ z=-5+4\lambda-8\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu\in\Re$$

Solución:

a) El plano pasa por el punto $A(2,3,2)$ y tiene por vectores directores $\vec{u}(2,0,1)$ y $\vec{v}(0,1,3)$, ya que son linealmente independientes.
b) Al ser los vectores $\vec{u}(3,-1,4)$ y $\vec{v}(-6,2,-8)$ linealmente dependientes, no representan ningún plano.

Ejemplo 3: *Averigua si los puntos $P(0,-3,2)$ y $Q(5,3,1)$ pertenecen al plano π dado por las ecuaciones paramétricas siguientes:*

$$\left.\begin{array}{l} x = 2+\lambda+3\mu \\ y = -\lambda+2\mu \\ z = 5-2\lambda+\mu \end{array}\right\} \lambda,\mu \in \Re$$

Solución:
Calculamos la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y & -1 & 2 \\ z-5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: 3x-7y+5z-31=0$$

$¿P \in \pi?\ 3\cdot 0-7\cdot(-3)+5\cdot 2-31=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow P\in\pi$
$¿Q \in \pi?\ 3\cdot 5-7\cdot 3+5\cdot 1-31=0 \Rightarrow -32\neq 0 \Rightarrow Q\notin\pi$

Ejemplo 4: *Determina la ecuación general del plano que contiene el punto $A(1,0,3)$ y con vectores directores $\vec{u}(-1,3,2)$ y $\vec{v}(2,1,0)$.*
Solución:
Llamamos π a ese plano, entonces:

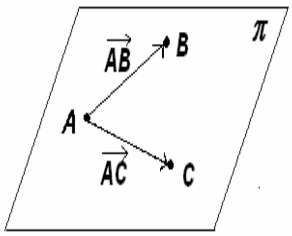
$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 3 & 1 \\ z-3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -2x+4y-7z+23=0$$

- ***ECUACIÓN DE UN PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS NO ALINEADOS***

Tres puntos no alineados determinan un plano. Para ello tomamos como determinación lineal del plano $\pi\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Ejemplo 5: *Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,0,3)$, $B(2,1,-1)$ y $C(3,1,0)$.*
Solución:
Necesitamos un punto, por ejemplo A, y dos vectores directores del plano:
$\overrightarrow{AB}(1,1,-4)$, $\overrightarrow{AC}(2,1,-3)$
$\pi:(x,y,z)=(1,0,3)+\lambda(1,1,-4)+\mu(2,1,-3);\ \lambda,\mu\in\Re$
Si queremos obtener la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x-5y-z+2=0$$



Ejemplo 6: *Dada la ecuación general del plano $\pi: x-2y+3z-1=0$, determina tres puntos del plano y una ecuación vectorial.*
Solución:
Damos valores a dos de las incógnitas y despejamos la tercera:

Si $y=0,\ z=0 \Rightarrow x-2\cdot 0+3\cdot 0-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0,0)$
Si $y=1,\ z=0 \Rightarrow x-2\cdot 1+3\cdot 0-1=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow B(3,1,0)$
Si $y=0,\ z=1 \Rightarrow x-2\cdot 0+3\cdot 1-1=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow C(-2,0,1)$

Calculamos su ecuación vectorial:
$\overrightarrow{AB}(2,1,0),\ \overrightarrow{AC}(-3,0,1)$
$\pi:(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(2,1,0)+\mu(-3,0,1);\ \lambda,\mu\in\Re$

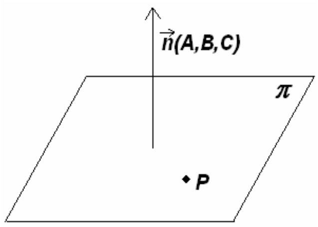
- ***ECUACIÓN DE UN PLANO CONOCIDO UN PUNTO Y UN VECTOR NORMAL***

Ejemplo 7: *Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto* $P(3,7,-2)$ *siendo el vector* $\vec{n}(3,-2,1)$ *normal al plano.*

Solución:
Por ser $\vec{n}$ un vector normal al plano, su ecuación general es de la forma:

$$\pi: 3x-2y+z+D=0$$

Como $P\in\pi \Rightarrow 3\cdot 3-2\cdot 7-2+D=0 \Rightarrow D=7$
Por tanto, $\pi: 3x-2y+z+7=0$



Nota: Resuelve el E*jemplo 4* de la página anterior obteniendo un vector normal $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$.

- ***ECUACIÓN DE UN PLANO QUE CONTIENE UNA RECTA Y UN PUNTO EXTERIOR A ELLA***

Dada $r(A;\vec{v}_r)$ tomamos el punto A de r y su vector director $\vec{v}_r$. Obtenemos el vector $\overrightarrow{AP}$.
Entonces $\pi\left(P;\vec{v}_r,\overrightarrow{AP}\right)$.

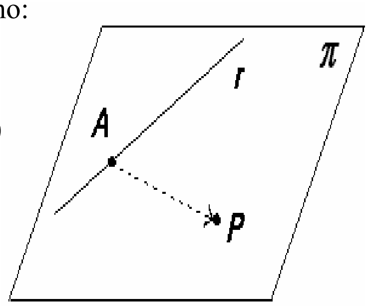
Ejemplo 8: *Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto* $P(1,3,-2)$ *y contiene a la recta* $r:\dfrac{x-1}{3}=y+1=z-2$

Solución:
Comprobamos primero que el punto P no pertenece a la recta r:

$$\frac{1-1}{3}\neq 3+1\neq -2-2$$

De la recta r obtenemos: $A(1,-1,2),\ \vec{v}_r(3,1,1)$ y calculamos $\overrightarrow{AP}(0,4,-4)$.
$(x,y,z)=(1,3,-2)+\lambda(3,1,1)+\mu(0,4,-4);\ \lambda,\mu\in\Re$
Si queremos obtener la ecuación general del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0\\ y-3 & 1 & 4\\ z+2 & 1 & -4\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: -2x+3y+3z-1=0$$

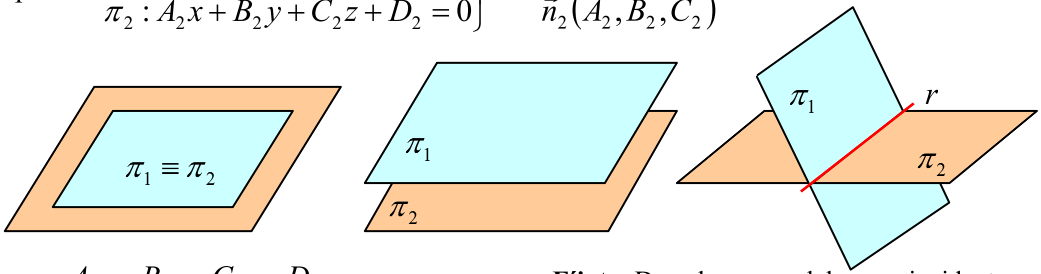


4. POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Dados dos planos $\left.\begin{array}{l}\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)\\ \vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)\end{array}$

Estudio a partir del rango:

- $\left.\begin{array}{l}r(M)=1\\ r(M|b)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1\equiv\pi_2$
- $\left.\begin{array}{l}r(M)=1\\ r(M|b)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1 // \pi_2$
- $\left.\begin{array}{l}r(M)=2\\ r(M|b)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1,\pi_2$ secantes



- Si $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}\Rightarrow$ *Coincidentes*
- Si $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}\Rightarrow$ *Paralelos*
- Si $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ *ó* $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$ *ó* $\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}\Rightarrow$ *Secantes (Se cortan en una recta)*

Fíjate: Dos planos paralelos o coincidentes tienen sus vectores normales proporcionales. En caso contrario son secantes:

- $\vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Rightarrow \pi_1$ *y* π_2 *coincidentes o paralelos*
- $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \pi_1$ *y* π_2 *secantes*

Fíjate: En este último caso, las dos ecuaciones implícitas de los planos forman la *ecuación implícita de la recta que determinan.*

Ejemplo 1: *Los planos* $\pi_1: 0.6x-0.2y-0.4z+2.4=0$ *y* $\pi_2: 3x-y-2z+12=0$ *son coincidentes, puesto que:* $\dfrac{0.6}{3}=\dfrac{-0.2}{-1}=\dfrac{-0.4}{-2}=\dfrac{2.4}{12}$. *Observa que* $5\vec{n}_1=\vec{n}_2$

Ejemplo 2: *Los planos* $\pi_1: 2x+3y-z+1=0$ *y* $\pi_2: 4x+6y-2z+7=0$ *son paralelos, puesto que:* $\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{-1}{-2}\neq\dfrac{1}{7}$. *Observa que* $2\vec{n}_1=\vec{n}_2$

Ejemplo 3: *Los planos* $\pi_1: 2x-y+3z+1=0$ *y* $\pi_2: x+y+5z+4=0$ *son secantes, puesto que:* $\dfrac{2}{1}\neq\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{3}{5}$. *Observa que, en este caso,* $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$ *(no son proporcionales).*

- ***OBTENCIÓN DE LA RECTA EN LA QUE SE CORTAN DOS PLANOS***

Se necesita un punto y un vector director para obtener una determinación lineal de la recta.

Ejemplo: *Hallar la ecuación de la recta intersección de los planos* $\pi_1: -2x+y+2z+1=0$ *y* $\pi_2: 4x+3y-z+4=0$.

Solución:

1ª Forma: Se resuelve el SEL para obtener las ecuaciones paramétricas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&2&-1\\4&3&-1&-4\end{array}\right)\xrightarrow[F_2+2F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&2&-1\\0&5&3&-6\end{array}\right)\ \text{S.C.I.}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-2x+y+2z=-1\\5y+3z=-6\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tomo } z=\lambda\Rightarrow 5y+3\lambda=-6\Rightarrow y=\dfrac{-3\lambda-6}{5}\\ -2x+y+2z=-1\Rightarrow -2x+\dfrac{-3\lambda-6}{5}+2\lambda=-1\Rightarrow -10x-3\lambda-6+10\lambda=-5\\ \Rightarrow 10x=7\lambda-1\Rightarrow x=\dfrac{7\lambda-1}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r:\left.\begin{array}{l}x=\frac{-1}{10}+\frac{7}{10}\lambda\\ y=\frac{-6}{5}-\frac{3}{5}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right\}\lambda\in\Re}$$

Por tanto: $A\left(\frac{-1}{10},\frac{-6}{5},0\right)$; $\vec{v}_r\left(\frac{7}{10},\frac{-3}{5},1\right)$, o mejor $\vec{v}_r(7,-6,10)$

Si queremos la ecuación en forma vectorial: $r:(x,y,z)=\left(\frac{-1}{10},\frac{-6}{5},0\right)+\lambda(7,-6,10)\ \lambda\in\Re$

La ecuación en forma continua: $r:\dfrac{x+\frac{1}{10}}{7}=\dfrac{y+\frac{6}{5}}{-6}=\dfrac{z}{10}$

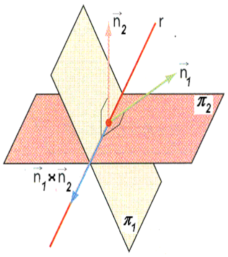
Para obtener un punto de la recta también se puede resolver el SEL dando un valor a una incógnita cualquiera y resolviendo el sistema 2×2 que resulta.

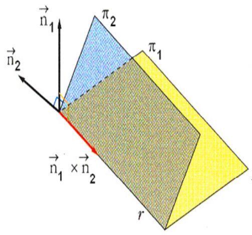
Ejemplo:
Tomo $z=0$ y resuelvo:

$$\left.\begin{array}{r}-2x+y=-1\\4x+3y=-4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$x=-\frac{1}{10};\ y=-\frac{6}{5}$

$\Rightarrow A\left(\frac{-1}{10},\frac{-6}{5},0\right)$





2ª Forma: Obtención de un vector normal usando el producto vectorial.

$\boxed{\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \text{ es un } \textbf{vector director} \text{ de la recta } r}$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : -2x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1(-2,1,2) \\ \pi_2 : 4x + 3y - z + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2(4,3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\vec{i} + 6\vec{j} - 10\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_r(-7,6,-10).$$

Un punto de la recta se calcula como en la primera forma resolviendo el SEL, o bien como se expresa en el margen de la página anterior.

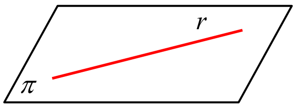
Así se obtiene $A\left(\frac{-1}{10}, \frac{-6}{5}, 0\right)$, y por tanto, $r : (x,y,z) = \left(\frac{-1}{10}, \frac{-6}{5}, 0\right) + \lambda(-7,6,-10) \quad \lambda \in \Re$.

5. *POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO*

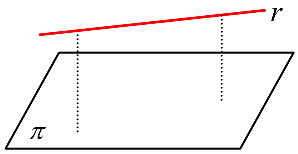
1ª Forma: ***Útil si tanto r como π vienen dados en implícitas***

$$\text{Sean } r : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

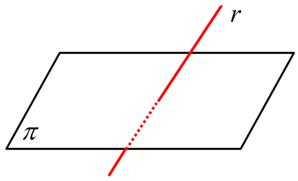
Sistema compatible indeterminado. Sus soluciones dependen de un parámetro.
La recta está **contenida** en el plano.



Sistema incompatible. No hay puntos Comunes.
La recta y el plano son **paralelos.**



Sistema compatible determinado.
La recta y el plano son **secantes.**



Consideramos las matrices asociadas al sistema formado por las tres ecuaciones:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad (M|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

- Si $rang(M) = rang(M|b) = 3 \Rightarrow SCD \Rightarrow$ La recta corta al plano en un punto.
  Para calcular el punto se resuelve el SEL
- Si $rang(M) = 2;\ rang(M|b) = 3 \Rightarrow SI \Rightarrow$ Recta paralela y exterior al plano.
- Si $rang(M) = rang(M|b) = 2 \Rightarrow SCI \Rightarrow$ Recta contenida en el plano.

Ejemplo: *Averigua la posición relativa de la recta* $r : \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 5y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$ *y el plano* $\pi : 2x + y + z - 9 = 0$. *En el caso de que sean secantes, halla el punto de corte.*

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad (M|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 8 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow rang(M) = rang(M|b) = 3 \Rightarrow SCD \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La recta corta al plano en un punto.

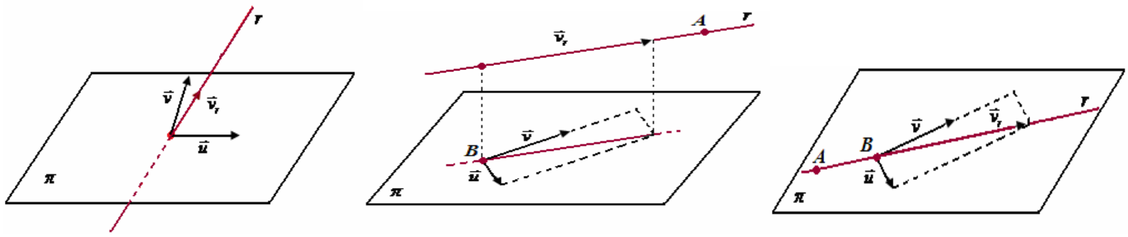
El punto de corte será la solución del sistema. Aplicamos la Regla de Cramer para hallar dicho punto:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9&1&1\\3&-1&1\\8&5&-2\end{vmatrix}}{10}=\frac{10}{10}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&9&1\\2&3&1\\1&8&-2\end{vmatrix}}{10}=\frac{30}{10}=3;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&9\\2&-1&3\\1&5&8\end{vmatrix}}{10}=\frac{40}{10}=4.$$

Por tanto, el punto de corte es $P(1,3,4)$.

$\boxed{2^a\ Forma:}$ *Útil si r y π vienen dados por sus determinaciones lineales*

Sean $r(A;\vec{v}_r)$ y $\pi(B;\vec{u},\vec{v})$. Consideramos el vector $\overrightarrow{AB}$.



- Si $\vec{u},\vec{v},\vec{v}_r$ son linealmente independientes, es decir, $rang(\vec{u},\vec{v},\vec{v}_r)=3\Rightarrow$ Recta y plano se cortan en un punto P $(r\cap\pi=P)$.
- Si $\vec{u},\vec{v},\vec{v}_r$ son linealmente dependientes, es decir, $rang(\vec{u},\vec{v},\vec{v}_r)=2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } \overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v} \text{ son linealmente independientes} \Rightarrow \text{Recta paralela al plano } (r\,//\,\pi).\\ \text{Si } \overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v} \text{ son linealmente dependientes} \Rightarrow \text{Recta contenida en el plano } (r\subset\pi).\end{cases}$$

Ejemplo: *Determina la posición relativa de la recta $r:(x,y,z)=(2,-1,0)+\lambda(1,2,1);\ \lambda\in\Re$ y el plano $\pi:(x,y,z)=(5,0,0)+\lambda(3,0,1)+\mu(4,-1,1);\ \lambda,\mu\in\Re$.*

Solución:

$$\begin{vmatrix}3&4&1\\0&-1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow rang(\vec{u},\vec{v},\vec{v}_r)=2,\text{ ya que }\begin{vmatrix}3&4\\0&-1\end{vmatrix}=-3\neq0,\text{ o porque } \vec{u},\vec{v} \text{ son lin.ind.}$$

Por tanto, la recta estará contenida en el plano o será paralela a él.

$A(2,-1,0);\ B(5,0,0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(3,1,0)$

$$\begin{vmatrix}3&3&4\\1&0&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=4\neq0\Rightarrow\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\text{ son linealmente independientes}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La recta r es paralela al plano π.

$\boxed{3^a\ Forma:}$ *Útil si r viene dada por una determinación lineal y π en implícitas*

Sean $r(P;\vec{v}_r)$ y $\vec{n}$ vector normal al plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$.

- Si $\vec{v}_r\perp\vec{n}\Rightarrow$ Recta paralela o contenida en el plano

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } P\in\pi\Rightarrow\text{Recta contenida en el plano}\\ \text{Si } P\notin\pi\Rightarrow\text{Recta paralela al plano}\end{cases}$$

- Si $\vec{v}_r\not\perp\vec{n}\Rightarrow$ Recta y plano se cortan en un punto (secantes).

Nota: Si $\pi(B;\vec{u},\vec{v})$ podemos utilizar esta forma tomando $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$.

6. POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Dados los planos:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1) \\ \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2) \\ \vec{n}_3(A_3, B_3, C_3)\end{array}$$

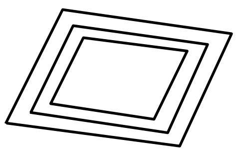
Consideramos las matrices asociadas al sistema formado por las tres ecuaciones:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad (M|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

- Si $rang(M) = rang(M|b) = 3 \Rightarrow SCD \Rightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $rang(M) = 2;\ rang(M|b) = 3 \Rightarrow SI \Rightarrow \begin{cases}\text{Secantes dos a dos} \\ \text{Dos paralelos y uno secante a ambos.}\end{cases}$
- Si $rang(M) = rang(M|b) = 2 \Rightarrow SCI$ (Dependiente de 1 parámetro) $\Rightarrow$ Tienen una recta en común $\Rightarrow \begin{cases}\text{Los tres planos secantes en una recta} \\ \text{Dos coincidentes y uno secante a ambos}\end{cases}$
- Si $rang(M) = 1;\ rang(M|b) = 2 \Rightarrow SI \Rightarrow \begin{cases}\text{Planos paralelos y distintos} \\ \text{Dos coincidentes y uno paralelo a ambos}\end{cases}$
- Si $rang(M) = rang(M|b) = 1 \Rightarrow SCI$ (Dependiente de 2 parámetros) $\Rightarrow$ Planos coincidentes.

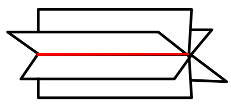
Sistema Compatible Indeterminado o Sistema Compatible Determinado:

Sistema compatible indeterminado. Sus soluciones dependen de dos parámetros. Los planos son **coincidentes**.

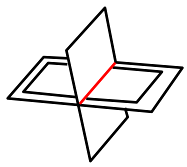


Sistema compatible indeterminado. Sus soluciones dependen de un parámetro. Por tanto los tres planos tienen una recta en común. Hay que determinar si existen dos planos coincidentes.

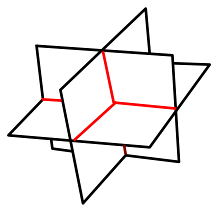
No existen planos coincidentes. Los tres planos son **secantes en una recta**.



Existen planos coincidentes. **Dos planos son coincidentes y secantes al tercero**.

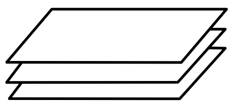


Sistema compatible determinado. Los planos son **secantes en un punto**.

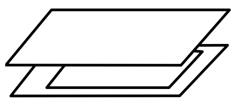


Sistema Incompatible:

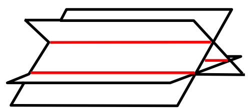
No existen planos coincidentes. Planos **paralelos y distintos dos a dos**.



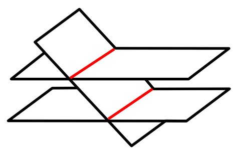
Existen planos coincidentes. **Dos planos coincidentes y paralelos al tercero**



No existen planos paralelos. Los planos son **secantes**, o **se cortan dos a dos**.



Existen planos paralelos. **Dos planos paralelos** y **secantes al tercero**.



Ejemplo: *Estudia la posición relativa de los planos dados por las siguientes ecuaciones:*

$$a)\ \begin{array}{l}\pi_1 : 2x + y - z - 2 = 0 \\ \pi_2 : 3x + 2y - z - 3 = 0 \\ \pi_3 : 2x + 3y + z - 1 = 0\end{array} \qquad b)\ \begin{array}{l}\pi_1 : x + 3y - 5z - 3 = 0 \\ \pi_2 : 2x - y + z = 0 \\ \pi_3 : 2x + 6y - 10z - 7 = 0\end{array}$$

Solución:

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 2$

$$(M|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&2\\3&2&-1&3\\2&3&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{vmatrix}2&1&2\\3&2&3\\2&3&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow rang(M|b)=3$$

Por tanto, son secantes dos a dos o bien hay dos paralelos y uno secante a ambos.

Determinamos si existen planos paralelos:

Recuerda : $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}\Rightarrow \textit{Paralelos}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}\neq\frac{1}{2}\Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ no son paralelos}\\ \frac{2}{2}\neq\frac{1}{3}\Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ no son paralelos}\\ \frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\Rightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ no son paralelos}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Luego } \pi_1,\ \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan dos a dos.}$$

b) $$M=\begin{pmatrix}1&3&-5\\2&-1&1\\2&6&-10\end{pmatrix}\Rightarrow |M|=\begin{vmatrix}1&3&-5\\2&-1&1\\2&6&-10\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix}=-7\neq 0\Rightarrow rang(M)=2$$

$$(M|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-5&3\\2&-1&1&0\\2&6&-10&7\end{array}\right)\Rightarrow\begin{vmatrix}1&3&3\\2&-1&0\\2&6&7\end{vmatrix}=-7\neq 0\Rightarrow rang(M|b)=3$$

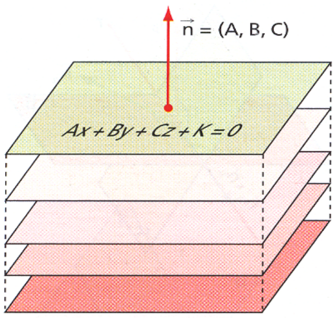
Por tanto, son secantes dos a dos o bien hay dos paralelos y uno secante a ambos.

Determinamos si existen planos paralelos:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\neq\frac{3}{-1}\Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ no son paralelos}\\ \frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{-5}{-10}\neq\frac{3}{7}\Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son paralelos}\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son paralelos y secantes a } \pi_2.$$

7. HAZ DE PLANOS

7.1. HAZ DE PLANOS PARALELOS



Se llama ***haz de planos paralelos*** al conjunto de planos paralelos a uno dado.

Un plano $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ $\vec{n}(A,B,C)$ determina un haz de planos paralelos:

$$\boxed{\pi_K: Ax+By+Cz+K=0;\quad K\in\Re}$$

Observa: Todos tienen el mismo vector normal $\vec{n}(A,B,C)$.

Ejemplo: *Determina la ecuación del haz de planos paralelos al plano* $\pi: x-2y+7z-1=0$. *A continuación, halla el plano del haz que contiene el punto* $A(5,0,3)$.

Solución:

La ecuación del haz de planos paralelos es:

$$\pi_K: x-2y+7z+K=0,\ \ K\in\Re$$

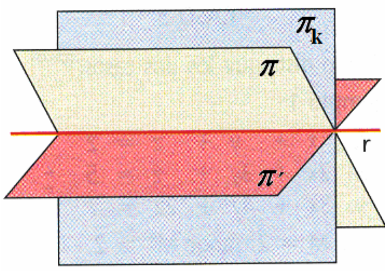
El valor de K para el que π contiene el punto A es el que cumple:

$$5-2\cdot 0+7\cdot 3+K=0\Rightarrow K=-26$$

La ecuación del plano será:

$$\pi_{-26}: x-2y+7z-26=0$$

7.2. HAZ DE PLANOS SECANTES



El plano π_k es combinación de los planos π y π'

Se llama ***haz de planos secantes*** al conjunto de planos que contienen a una recta llamada ***arista del haz***.

Dados los planos $\left.\begin{array}{l}\pi : Ax+By+Cz+D=0\\ \pi' : A'x+B'y+C'z+D'=0\end{array}\right\}$ que se cortan en una recta ***r***, cualquier otro plano que contenga a la recta se puede poner como combinación lineal de π y π', ya que la recta es solución común a las tres ecuaciones de los planos que forman un SCI.

Por tanto, el haz queda determinado por dos planos distintos, y su ecuación es:

$$\pi_{\lambda,\mu}=\lambda\pi+\mu\pi' \Rightarrow \pi_{\lambda,\mu} : \lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0;\ \ \lambda,\mu\in\Re$$

Si dividimos por λ y tomamos $k=\frac{\mu}{\lambda}$ ($\lambda\neq 0$) la ecuación del haz resulta:

$$\boxed{\pi_k=\pi+k\pi' \Rightarrow \pi_k : (Ax+By+Cz+D)+k(A'x+B'y+C'z+D')=0;\ \ k\in\Re}$$

Ejemplo 1: *Halla la ecuación del haz de planos que contiene la recta r y escribe la ecuación del plano del haz que contiene el punto* $P(2,-1,0)$.


Un haz de planos secantes puede identificarse con las hojas de un libro abierto.

$$r:\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\ -x+y+2=0\end{cases}$$

Solución:

La ecuación del haz de planos secantes es:

$$\pi_k : (2x-y+3z-1)+k(-x+y+2)=0$$

El valor de k para que π_k contenga al punto P es el que cumple:

$$(2\cdot 2-(-1)+3\cdot 0-1)+k(-2-1+2)=0 \Rightarrow 4-k=0 \Rightarrow k=4$$

La ecuación del plano será:

$$(2x-y+3z-1)+4(-x+y+2)=0 \Rightarrow \pi_4 : -2x+3y+3z+7=0$$

Ejemplo 2: *Halla la ecuación del haz de planos que contiene la recta r y escribe la ecuación del plano del haz que contiene el punto* $P(2,0,0)$.

$$r:\begin{cases}2x+3y-z-9=0\\ -x+2y+3z+2=0\end{cases}$$

Solución:

La ecuación del haz de planos secantes es:

$$\pi_k : (2x+3y-z-9)+k(-x+2y+3z+2)=0$$

El valor de k para que π_k contenga al punto P es el que cumple:

$$(2\cdot 2+3\cdot 0-0-9)+k(-2+2\cdot 0+3\cdot 0+2)=0 \Rightarrow -5-k\cdot 0=0 \Rightarrow -5=0$$

¿Qué ha pasado? Hemos obtenido una contradicción. Ocurre porque $P\in\pi'$ con lo cual hemos acabado el ejercicio $\Rightarrow \pi' : -x+2y+3z+2=0$

Observación: Esta segunda ecuación de un haz de planos puede no dar el resultado esperado como hemos visto anteriormente . Ocurre si quiero obtener el plano de un haz que pasa por un cierto punto, resulta que es uno de los dos planos iniciales y coincide con el que he multiplicado por *k* en la ecuación.

Fíjate: Si hubiésemos tomado $\pi_k : k(2x+3y-z-9)+(-x+2y+3z+2)=0$

$$\Rightarrow k(2\cdot 2+3\cdot 0-0-9)+(-2+2\cdot 0+3\cdot 0+2)=0 \Rightarrow -5k=0 \Rightarrow k=0$$

$$\Rightarrow \pi' : -x+2y+3z+2=0.$$