4 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 98

Resolución de sistemas 2 × 2 mediante determinantes

■ **Resuelve, aplicando** $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ **e** $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$**, los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{cases}$

Comprueba, en cada caso, la solución que obtengas.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26$; $|A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156$;

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286$;

Por tanto: $x = \dfrac{156}{26} = 6$; $y = \dfrac{-286}{26} = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83$; $|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415$;

$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166$;

Por tanto: $x = \dfrac{-415}{-83} = 5$; $y = \dfrac{-166}{-83} = 2$

c) $\left.\begin{array}{l} 6x + 2y = 8 \\ -5x + 9y = -60 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 64$; $|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -60 & 9 \end{vmatrix} = 192$;

$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -5 & -60 \end{vmatrix} = -320$;

Por tanto: $x = \dfrac{192}{64} = 3$; $y = \dfrac{-320}{64} = -5$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 6x - 2y = 28 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -10;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 28 & -2 \end{vmatrix} = -30;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 28 \end{vmatrix} = 50;$

Por tanto: $x = \dfrac{-30}{-10} = 3;\quad y = \dfrac{50}{-10} = -5$

Página 99

Extensión del resultado a sistemas 3 × 3

- **¿Cómo crees que sería la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas según la regla anterior? Pon las fórmulas correspondientes y aplícalas a la resolución de los sistemas siguientes:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right.$

Comprueba las soluciones.

Si tenemos un sistema 3×3:

$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\}$ y llamamos: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$

$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$ $A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{pmatrix};$ $A_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{pmatrix};$

entonces: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|},\quad y = \dfrac{|A_y|}{|A|},\quad z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$

(siempre que $|A| \neq 0$).

Si aplicamos las fórmulas a la resolución de los sistemas propuestos, tenemos que:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 20 & -2 & 1 \\ 14 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -50;$ $|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 20 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 10;$ $|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 20 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30$

Por tanto: $x = \dfrac{-50}{-10} = 5;\quad y = \dfrac{10}{-10} = -1;\quad z = \dfrac{-30}{-10} = 3$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Por tanto: $x = \dfrac{8}{2} = 4; \quad y = \dfrac{2}{2} = 1; \quad z = \dfrac{-4}{2} = -2$

Inversa de una matriz 2 × 2

■ $\boldsymbol{x = \dfrac{a_{22}}{|A|}, \; y = \dfrac{-a_{21}}{|A|}}$**. Obtén, de forma similar, las expresiones de** $\boldsymbol{z}$ **y de** $\boldsymbol{t}$**. Llegarás, así, a la siguiente conclusión:**

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}z + a_{12}t = 0 \\ a_{21}z + a_{22}t = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a_{12}}{|A|}; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a_{11}}{|A|}$$

Por tanto: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

■ **Comprueba, efectuando el producto, que:** $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = I}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

■ **Aplica la expresión anterior para calcular** $\boldsymbol{M^{-1}}$ **siendo:** $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

■ **Haz los productos** $\boldsymbol{M \cdot M^{-1}}$ **y** $\boldsymbol{M^{-1} \cdot M}$ **y comprueba que, en ambos casos, obtienes la matriz unidad.**

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 3/5 & -7/10 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ **¿Por qué crees que es necesario que $|A| \neq 0$ para que una matriz cuadrada sea regular (tenga inversa)?**

En su obtención, dividimos por $|A|$.

Es necesario que $|A| \neq 0$ para que el sistema que obtenemos tenga solución única.

Página 101

1. Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ x + 3y &= -2 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 4x + 5y &= 7 \\ 2x - y &= 0 \\ 7x + 11y &= 4 \end{aligned}\right.$ **c)** $\left\{\begin{aligned} x + y + 2z &= 7 \\ 3x - y + 4t &= 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &= 6 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ x + 3y &= -2 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow \ ran\,(A) = 2 \\ &|A'| = 0 \qquad\qquad\quad \rightarrow \ ran\,(A') = 2 \end{aligned}\right\}$

El sistema es *compatible*.

b) $\left.\begin{aligned} 4x + 5y &= 7 \\ 2x - y &= 0 \\ 7x + 11y &= 4 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 7 \\ 3x - y + 4t &= 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &= 6 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

2. **Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior, averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \qquad z &= 2 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \qquad z &= 2 \\ 2y - z &= 5 \end{aligned}\right.$ **c)** $\left\{\begin{aligned} x + y + 2z \qquad &= 7 \\ 3x - y + \qquad 4t &= 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &= -13 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \qquad z &= 2 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues la 1ª y la 3ª columna son iguales)} \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema es *compatible*.

Observación: Como la 4ª columna de A' y la 1ª son iguales, necesariamente $ran(A') = ran(A)$; es decir, el sistema es compatible.

b) $\left.\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ 2x + \qquad z &= 2 \\ 2y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran(A) = 2$ (ver apartado a) de este ejercicio).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z \qquad &= 7 \\ 3x - y + \qquad 4t &= 1 \\ x - 3y - 4z + 4t &= -13 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran(A) = 2$ (ver apartado c) del ejercicio anterior).

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema es *compatible*.

Página 102

1. Enuncia la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right.$$

Si $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3 = ran\,(A')$

Por tanto, el sistema es *compatible*.

Su solución es: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$, $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, $z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$,

siendo A_x la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes. Análogamente, A_y y A_z se obtienen sustituyendo en A la columna de los coeficientes de la incógnita correspondiente por la de los términos independientes.

2. Utilizando la regla de Cramer, resuelve el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x - 3y + 5z &=& -24 \\ 2x - y + 4z &=& -8 \\ x + y &=& 9 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x - 3y + 5z &=& -24 \\ 2x - y + 4z &=& -8 \\ x + y &=& 9 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

Página 103

3. Demuestra la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Procede de forma análoga a como se ha hecho en esta página.

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\}, \quad \text{con} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Hemos de despejar cada una de las incógnitas. Empecemos por la x.

Para despejar x, hemos de eliminar y, z. Esto se consigue multiplicando las tres ecuaciones, que llamamos (1), (2), (3), por los adjuntos de los coeficientes de la x:

$$(1) \cdot A_{11} \rightarrow a_{11} A_{11} x + a_{12} A_{11} y + a_{13} A_{11} z = c_1 A_{11}$$
$$(2) \cdot A_{21} \rightarrow a_{21} A_{21} x + a_{22} A_{21} y + a_{23} A_{21} z = c_2 A_{21}$$
$$(3) \cdot A_{31} \rightarrow a_{31} A_{31} x + a_{32} A_{31} y + a_{33} A_{31} z = c_3 A_{31}$$

Sumando, obtenemos una igualdad que vamos a analizar por partes:

– El coeficiente de la x es:

$$a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = |A|$$

– El coeficiente de la y es:

$$a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} = 0$$

Análogamente, se ve que el coeficiente de z es cero.

– El término independiente es:

$c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + c_3 A_{31}$, que es el determinante de la matriz A_x que resulta al sustituir en A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes:

$$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Recapitulamos: al efectuar la suma $(1) \cdot A_{11} + (2) \cdot A_{21} + (3) \cdot A_{31}$, obtenemos:

$$|A| x + 0y + 0z = |A_x|$$

Puesto que $|A| \neq 0$, podemos despejar la x, y obtenemos:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

Para despejar la y habría que multiplicar las ecuaciones (1), (2), (3) por A_{12}, A_{22}, A_{32}, respectivamente. Y análogamente procederíamos para despejar z, obteniéndose:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

Página 105

1. Halla los valores de las incógnitas en los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ \quad - 2y + 7z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ \quad - 2y + 7z = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\text{ y }\; |A| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la 1ª y la 3ª columna son iguales)} \;\rightarrow\; ran\,(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \;\rightarrow\; x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \;\rightarrow\; y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Solución: $x = 1 + \lambda,\;\; y = 7\lambda,\;\; z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$

Sabemos, por el apartado a), que $ran\,(A) = 2$.

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

2. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 3} \\ \boldsymbol{y + z = 5} \\ \boldsymbol{x + z = 4} \\ \boldsymbol{5x - y + z = 6} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{3x + 4y = 4} \\ \boldsymbol{2x + 6y = 23} \\ \boldsymbol{-2x + 3y = 1} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \ ran\,(A) = 3$

Calculamos el rango de A':

$|A'| = 0 \rightarrow \ ran\,(A') = 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1, \ y = 2, \ z = 3$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 4 \\ 2x + 6y &= 23 \\ -2x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$.

El sistema es *incompatible*.

Página 106

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Por tanto, $ran\,(A) = 3 =$ *nº incógnitas.*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

b) $\left.\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \\ x - 5y - 9z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \textit{ran}\,(A) = 2$

Podemos suprimir la 3ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \end{array}\right\} \textit{Solución: } x = -\lambda, \; y = -2\lambda, \; z = \lambda$$

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow \textit{ran}\,(A) = 3 = \textit{nº de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

d) $$\left.\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \rightarrow \textit{ran}\,(A) = 3$$

Para resolverlo, pasamos la t al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y = 2t \\ x - y + z = t \end{array}\right\} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solución: $x = \lambda, \; y = -\lambda, \; z = 0, \; t = 2\lambda$

2. Resuelve:

a) $$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y + 3z = 0} \\ \boldsymbol{y + z = 0} \\ \boldsymbol{x - 3y + 2z = 0} \\ \boldsymbol{-x + 5y = 0} \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x + 3z = 0} \\ \boldsymbol{y - t = 0} \\ \boldsymbol{x + y + 2t = 0} \\ \boldsymbol{2x + 2y + 3z + t = 0} \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran\,(A) = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de las dos últimas ecuaciones y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = -3z \\ y = -z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -3z + 2y = -3z - 2z = -5z \\ y = -z \end{array}\right\}$$

Solución: $x = -5\lambda, \ \ y = -\lambda, \ \ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{rl} x \qquad + 3z \qquad &= 0 \\ y - \qquad t &= 0 \\ x + \ \ y + \qquad 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + \ \ t &= 0 \end{array}\right\} \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 3 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación y pasar la t al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{rl} x \qquad - 3z &= 0 \\ y \qquad &= t \\ x + y \qquad &= -2t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = \dfrac{-x}{3} = \dfrac{3t}{3} = t \\ y = t \\ x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{array}$$

Solución: $x = -3\lambda, \ \ y = \lambda, \ \ z = \lambda, \ \ t = \lambda$

Página 108

1. Discute y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{rl} \boldsymbol{x + \ \ y + az} &\boldsymbol{= \ \ 0} \\ \boldsymbol{ax - \ \ y} \qquad &\boldsymbol{= -1} \\ \boldsymbol{x + 4y + 6z} &\boldsymbol{= \ \ 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{rl} \boldsymbol{x + \ \ y} &\boldsymbol{= \ k} \\ \boldsymbol{kx - \ \ y} &\boldsymbol{= 13} \\ \boldsymbol{5x + 3y} &\boldsymbol{= 16} \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{rl} x + \ \ y + az &= \ \ 0 \\ ax - \ \ y \qquad &= -1 \\ x + 4y + \ 6z &= \ \ 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{array}{l} \nearrow a = 2 \\ \searrow a = \dfrac{-3}{4} \end{array}$$

• **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

• **Si $a = -3/4$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema es *incompatible*.

• **Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solución: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \quad y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \quad z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\} \qquad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

• **Si $k = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\} \text{Sumando: } 3x = 15 \;\rightarrow\; x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5$, $y = -3$

• **Si $k = 5/3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - y = 13 \end{array}\right\} \text{Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \dfrac{11}{2}$, $y = \dfrac{-23}{6}$

• **Si $k \neq 2$ y $k \neq 5/3$** $\rightarrow$ $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$, el sistema es *incompatible*.

2. Discute y resuelve, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

- **Si $\boldsymbol{a} = 0$**, queda:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \; y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, \; y = \lambda$

- **Si $\boldsymbol{a} = 1$**, queda:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, \; y = 0$

- **Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ y $\boldsymbol{a} \neq 1$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = 2$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \; y = 0$

Página 110

1. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$$|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

2. Calcula la inversa de estas matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$$|A| = -8 \neq 0 \rightarrow \text{ existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 & -3 \\ -6 & 12 & 10 & 6 \\ -9 & 14 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 & 3 \\ 6 & 12 & -10 & 6 \\ -9 & -14 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 6 & -9 & -1 \\ -6 & 12 & -14 & 2 \\ 3 & -10 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 9 & 1 \\ 6 & -12 & 14 & -2 \\ -3 & 10 & -7 & 1 \\ -3 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Página 111

1. Expresa en forma matricial y resuelve (ten en cuenta el ejercicio 1 de la página anterior):

a) $\left\{\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x + 3z &= 2 \\ -2x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ x - 2y &= 11 \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x + 3z &= 2 \\ -2x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$

En el ejercicio 1 de la página 112 hemos calculado A^{-1}.

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 106, \; y = 64, \; z = 36$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - \;\; y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$

En el ejercicio 1 de la página 112 hemos calculado B^{-1}.

$$B \cdot X = C \;\rightarrow\; X = B^{-1} \cdot C = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1, \; y = -5$

2. Expresa en forma matricial y resuelve:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - 2y - 3z - t = 19 \\ \quad\;\; y + 2z \quad\;\; = 12 \\ \quad 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y \qquad + t = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y \qquad\quad = 5 \\ \quad y + z \qquad = -1 \\ \qquad z + t = 4 \\ \qquad\quad\;\; t = 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y - 3z - t = 19 \\ y + 2z \quad\;\; = 12 \\ 2y + 3z + t = 16 \\ 3x - 2y \qquad + t = 5 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -5 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = -1$

$$= \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -175 \\ -196 \\ 68 \\ 108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ (196/5) \\ -(68/5) \\ -(108/5) \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 35, \; y = \dfrac{196}{5}, \; z = -\dfrac{68}{5}, \; t = -\dfrac{108}{5}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y \hspace{2.2em}= \ \ 5 \\ \hspace{1.4em} y+z \hspace{1em}= -1 \\ \hspace{2.8em} z+t= \ \ 4 \\ \hspace{4.2em} t= \ \ 2 \end{array}\right\}$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{C}$

En el ejercicio 2 de la página anterior hemos calculado B^{-1}.

$$B \cdot X = C \ \rightarrow \ X = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 8, \ \ y = -3, \ \ z = 2, \ \ t = 2$

Página 117

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Escribe en forma matricial los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y-z= \ \ 1 \\ 2x \hspace{2.5em} +z=-1 \\ x-y+z= \ \ 2 \\ \hspace{1.5em} 2y-z= \ \ 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x- \ \ y+z-t=2 \\ \hspace{1.5em} 3y \hspace{2em} +t=1 \\ 2x+ \ \ y \hspace{2em} -t=0 \end{array}\right.$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 **Escribe en la forma habitual estos sistemas:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=4 \\ x- \ \ y- \ \ z=0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ 3x-y=0 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$

3 **Estudia la compatibilidad de estos sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x- \ \ y= \ \ 6 \\ 4x+ \ \ y=-1 \\ 5x+2y=-5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x+ \ \ y- \ \ z=-2 \\ 2x- \ \ y-3z=-3 \\ x-2y-2z= \ \ 0 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-z=3 \\ -x-5y+z=0 \\ 3x+ \ \ y-z=6 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - y - 2z = 2} \\ \mathbf{2x + y + 3z = 1} \\ \mathbf{3x \quad\ + z = 3} \end{array}\right.$ **e)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + y + z = 2} \\ \mathbf{x - 2y - 7z = 0} \\ \mathbf{y + z = -1} \\ \mathbf{2x + 3y \quad = 0} \end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + 3y + z = -1} \\ \mathbf{x - y - z = -1} \\ \mathbf{2x + y + 3z = 5} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ Sumando: $5x = 5 \rightarrow x = 1$; $y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5$ *Solución:* $(1, -5)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow$ *ran* $(A') = 2 \neq$ *ran* $(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Luego *ran* $(A') = 2 =$ *ran* $(A) <$ *nº incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2x - z = 3 - 3y \\ -x + z = 5y \end{array}\right\}$ Sumando: $x = 3 + 2y$; $z = 5y + x = 5y + 3 + 2y = 3 + 7y$

Soluciones: $x = 3 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 3 + 7\lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\;\; + z = 3 \end{array}\right\}\; A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, con A la matriz de los coeficientes (tres primeras columnas).

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego, $ran\ (A') = 2 = ran\ (A) <$ *nº incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\;\; + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x \quad\;\; = 3 - z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3-z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array}\right\} \text{Hacemos } z = 3\lambda$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda,\ \ y = -1 - 7\lambda,\ \ z = 3\lambda$

e) $\left.\begin{array}{r} x + \;\;y + \;\;z = \;\;2 \\ x - 2y - 7z = \;\;0 \\ y + \;\;z = -1 \\ 2x + 3y \qquad\;\; = \;\;0 \end{array}\right\}\; A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$, con A la matriz de los coeficientes (tres primeras columnas).

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la cuarta ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3,\ \ y = -2,\ \ z = 1$

f) $\left.\begin{array}{l} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$, with A the first three columns.

Como $|A| = -14 \neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solución: $x = 0,\ y = -1,\ z = 2$

4 **Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:**

a) $\begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{array}\right\}\quad A' = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 2 \\ 3 & -5 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -82 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A| = -4 \neq 0$, with A the first three columns.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Solución: $x = 1, \ y = 1, \ z = 1$

c) $$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to |A| = 1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \ y = -5, \ z = 7$

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \to |A| = -11 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solución: $x = -1, \ y = 2, \ z = -2$

e) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y \qquad - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$. Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \quad \textit{Soluciones:} \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$$

f) $\left.\begin{array}{r} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x - y = 4 + z - t \\ x + y = 2 - z + t \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z-t & -1 \\ 2-z+t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z-t \\ 1 & 2-z+t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-2z+2t}{2} = -1 - z + t$$

Soluciones: $x = 3, \ y = -1 - \lambda + \mu, \ z = \lambda, \ t = \mu$

5 S **Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

6 **Estudia y resuelve los sistemas, cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t = 0 \\ 2x + 2z + t = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}}_{A} \left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right.\right)$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \frac{-1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{-1}{3}$

b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}}_{A} \left|\begin{array}{c} -2 \\ -2 \\ -2 \end{array}\right.\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que *ran* $(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego, *ran* $(A') = 3 \neq$ *ran* $(A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{rl} x + 2y + z & = 0 \\ -x + 4y + 3z + 2t & = 0 \\ x + 7y + 7z + 4t & = 0 \\ 2x \quad + 2z + t & = 0 \end{array}\right\}$ Es un sistema homogéneo.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to |A'| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \to \textit{ran}\ (A) = 3. \text{ Es } \textit{compatible indeterminado.}$$

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación y pasar la t al 2º miembro. Así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2t & 4 & 3 \\ -4t & 7 & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{6t}{16} = \frac{3t}{8}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2t & 3 \\ 1 & -4t & 7 \end{vmatrix}}{16} = \frac{4t}{16} = \frac{t}{4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2t \\ 1 & 7 & -4t \end{vmatrix}}{16} = \frac{-14t}{16} = \frac{-7t}{8}. \quad \textit{Soluciones:} \left(\frac{3}{8}\lambda, \frac{1}{4}\lambda, \frac{-7}{8}\lambda, \lambda\right)$$

d) $\left.\begin{array}{rl} x + y & = 5 \\ x \quad + z & = 6 \\ y + z & = 7 \\ 2x + y + z & = 11 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right)$

Tenemos que $|A'| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Luego, *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4. \quad \textit{Solución: } x = 2, \ y = 3, \ z = 4$$

7 **Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, *ran* $(A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{array}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces: *ran* $(A) = 3 =$ *nº incógnitas*.

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

8 **Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$

$|A| = 2 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1, \;\; y = 0, \;\; z = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$

$|A| = 11 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = -1, \;\; y = 2, \;\; z = -2$

9 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible: $\left\{\begin{array}{r} \mathbf{2x + 3y = 5} \\ \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{ax + y = 3} \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right)$; $|A'| = 6 - 7a = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{6}{7}$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Si $a = \frac{6}{7}$, $ran\ (A) = ran\ (A')$ → *Sistema compatible.*

Si $a \neq \frac{6}{7}$, $ran\ (A) \neq ran\ (A')$ → *Sistema incompatible.*

Página 118

10 S **Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:**

a) $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $|A| = -7 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$X \cdot A = I$ → $X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1}$ → $X = A^{-1}$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto: $X = \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 0$, no existe A^{-1}. La ecuación *no* tiene solución.

c) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 4 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

PARA RESOLVER

11 **S** **Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de a que sea posible:**

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Luego, existe A^{-1} para cualquier valor de a. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2a \neq 0$ si $a \neq 0$. Solo existe A^{-1} si $a \neq 0$.

La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{2a} & \dfrac{3}{2a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \to |A| = (a-2)\, a \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 2$

Existe A^{-1} solo cuando $a \neq 0$ y $a \neq 2$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

12 **S** **Consideramos la matriz siguiente:** $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

13 **S** **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = m-1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{l} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m \\ x + y + (1+m)z = m^2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{array}\right)$, con A la matriz de coeficientes (las tres primeras columnas).

$|A| = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = 1, \; m = -1$

- **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias $\rightarrow$ Sistema *incompatible.*

- **Si $m = -1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias $\rightarrow$ Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado.*

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$, con A la matriz de coeficientes (las tres primeras columnas).

$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow m = 1, \; m = 2$

- **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Contradictorias $\rightarrow$ El sistema es *incompatible.*

- **Si $m = 2$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$, con A la matriz de coeficientes (las tres primeras columnas). Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A') = ran\ (A) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$

El sistema es *compatible indeterminado.*

• **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. Sistema *compatible determinado.*

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$, with the 3×3 block on the left labelled A.

$|A| = -2m + 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$

• **Si $m = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

entonces: $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. Sistema *incompatible.*

• **Si $m \neq 1$**, queda: $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. Sistema *compatible determinado.*

d) $\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, with the 3×3 block on the left labelled A.

$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\rightarrow\; m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$

• **Si $m = 3$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$ Contradictorias $\rightarrow$ Sistema *incompatible.*

• **Si $m = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, with the 3×3 block on the left labelled A. La 1ª y la 3ª fila son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas.$

El sistema es *compatible indeterminado.*

• **Si $m \neq 3$ y $m \neq 1$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{\underline{o}}\ incógnitas = 3$. Sistema *compatible determinado.*

e) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & z & = & -1 \\ & & 2y & - & z & = & -2 \\ x & - & y & + & mz & = & -5 \end{array}\right\}$ $\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{array}\right)$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} \underset{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \end{array}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} \underset{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - m + 7) =$$

$$= 18(-m - 2) = 0 \ \rightarrow \ m = -2$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = 3$

- **Si $m = -2$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado.*

- **Si $m \neq -2$** $\rightarrow$ *ran* (A') = 4 $\neq$ *ran* (A) = 3. Sistema *incompatible.*

f) $\left.\begin{array}{rcrcrcl} (1+m)x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & (1+m)y & + & z & = & m \\ x & + & y & + & (1+m)z & = & m^2 \end{array}\right\}$ $\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 & m \\ 1 & 1 & 1+m & m^2 \end{array}\right)$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{pmatrix}$

$$|A| = m^3 + 3m^2 = m^2(m+3) = 0 \ \begin{cases} m = 0 \\ m = -3 \end{cases}$$

- **Si $m = 0$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es *incompatible.* (La 1ª ecuación contradice las otras).

- **Si $m = -3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = 2$

Además, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A') = 3$

Luego el sistema es *incompatible*.

- **Si $m \neq 0$ y $m \neq -3$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*.

14 **S** **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\ (A) = ran\ (A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \ \rightarrow \ a = -5$

- **Si $a = -5$** $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = ran\ (A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq -5$** $\rightarrow$ Solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax \quad + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\ (A) = ran\ (A')$.

$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \ \rightarrow \ a = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \dfrac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$

- **Si $a = -3$ o $a = 2$** $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = ran\ (A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a \neq -3$ y $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. Solo existe la solución trivial $(0, 0, 0)$.

c) $\left.\begin{array}{l} ax + \quad y - \quad z = 0 \\ x + \;\; 2y + \quad z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -2a - 5 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{-5}{2}$$

- **Si** $\boldsymbol{a = -\frac{5}{2}}$ $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq -\frac{5}{2}}$ $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

d) $\left.\begin{array}{l} 3x + 3y - \quad z = 0 \\ 4x + 2y + az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$|A| = 3a - 46 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{46}{3}$$

- **Si** $\boldsymbol{a = \frac{46}{3}}$ $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si** $\boldsymbol{a \neq \frac{46}{3}}$ $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Solo existe la solución trivial (0, 0, 0).

15 S **Determina los valores de m para los cuales son incompatibles estos sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} mx - y - \quad z = m \\ \;\; x - y + mz = m \\ \;\; x + y + \quad z = -1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} (m + 1)\,x + \quad y + \quad z = 3 \\ x + \;\; 2y + mz = 4 \\ x + my + \;\; 2z = 2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x + \qquad\qquad y - \quad z = m - 4 \\ \qquad (m - 6)\,y + 3z = 0 \\ (m + 1)\,x + \quad 2y \qquad = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} mx - y - \quad z = m \\ \;\; x - y + mz = m \\ \;\; x + y + \quad z = -1 \end{array}\right\} \quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix} m \\ m \\ -1 \end{matrix}$

$$|A| = -m^2 - 2m - 1 = -(m + 1)^2 = 0 \;\rightarrow\; m = -1$$

- **Si** $\boldsymbol{m = -1}$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ Contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si** $\boldsymbol{m \neq -1}$, es compatible determinado, pues $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$.
- Por tanto, solo es incompatible para $m = -1$.

b) $\left.\begin{array}{r} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m & 4 \\ 1 & m & 2 & 2 \end{array}\right)$, where the first three columns form A.

$$|A| = -m^3 - m^2 + 6m = -m(m-2)(m+3) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$$

- **Si** $\boldsymbol{m = 0}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces: $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 \;\rightarrow\;$ *Compatible indeterminado.*

- **Si** $\boldsymbol{m = 2}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \;\rightarrow\; \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- **Si** $\boldsymbol{m = -3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -45,$$

entonces: $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible.*

- **Si** $\boldsymbol{m \neq 0,\; m \neq 2}$ **y** $\boldsymbol{m \neq -3} \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*, pues $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$.

Por tanto, es incompatible para $m = 2$ y para $m = -3$.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = m - 4 \\ (m-6)y + 3z = 0 \\ (m+1)x + 2y = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & m-4 \\ 0 & m-6 & 3 & 0 \\ m+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$, where the first three columns form A.

$$|A| = m^2 - 2m - 15 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \quad \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$$

- **Si** $\boldsymbol{m = 5}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right). \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$; el sistema es *compatible indeterminado.*

• **Si** $\boldsymbol{m = -3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\underbrace{}_{A}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 72$,

entonces *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

• **Si** $\boldsymbol{m \neq 5}$ **y** $\boldsymbol{m \neq -3}$ → Sistema *compatible determinado*, pues *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$.

Por tanto, es incompatible solo para $m = -3$.

16 **S** **¿Existe algún valor de $\boldsymbol{a}$ para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?**

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ (A the 3×3 part)

$|A| = 9a + 27 = 0$ → $a = -3$

• **Si** $\boldsymbol{a = -3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces:

ran $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$ → El sistema es *incompatible*.

• **Si** $\boldsymbol{a = -3}$ → *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3$ → *Compatible determinado*.

Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0$ → $a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2}$ $\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

• **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix}$$ Contradictorias. El sistema es *incompatible*.

• **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$. Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

• **Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado*.

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

c) $$\left.\begin{aligned} (a+1)x + 2y + z &= a + 3 \\ ax + y &= a \\ ax + 3y + z &= a + 2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{matrix} a+1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & 3 & 1 \end{matrix}\right.\underbrace{}_{A}\left|\begin{matrix} a+3 \\ a \\ a+2 \end{matrix}\right)$$

$|A| = a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

• **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 2 \\ -1 & 1 & 0 & | & -1 \\ -1 & 3 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$. La primera fila es la tercera menos la segunda.

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*.

• **Si $a \neq -1$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ $\rightarrow$ *Compatible determinado*.

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = -1$.

17 **S** **Discute y resuelve según los valores de m:** $\left\{\begin{aligned} mx + y &= 2 - 2m \\ x + my &= m - 1 \end{aligned}\right.$

$$\left.\begin{aligned} mx + y &= 2 - 2m \\ x + my &= m - 1 \end{aligned}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} m & 1 \\ 1 & m \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2-2m \\ m-1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$x + y = 0 \rightarrow y = x$. *Soluciones:* $x = \lambda$, $y = -\lambda$

- **Si $m = -1$**, queda:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$ Las ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-2m & 1 \\ m-1 & m \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{-2m^2+m+1}{m^2-1} = \frac{(-2m-1)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{-2m-1}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 2-2m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}}{m^2-1} = \frac{m^2+m-2}{m^2-1} = \frac{(m+2)(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{m+2}{m+1}$$

Solución: $x = \dfrac{-2m-1}{m+1}$; $y = \dfrac{m+2}{m+1}$

18 **Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:**
S

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Multiplica C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.***

$AXB = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1 \rightarrow$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 119

19 **S** **Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.**

☛ ***Multiplica dos veces por A^{-1}, una vez por la izquierda y otra por la derecha.***

Calculamos A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \to$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

20 **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $AB + CX = D$.

$$AB + CX = D \to CX = D - AB \to X = C^{-1} \cdot (D - AB)$$

- Calculamos C^{-1} ($|C| = -2 \neq 0 \to$ existe C^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(C) \longrightarrow (Adj(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21 **Halla X tal que $3AX = B$, siendo:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$3AX = B \;\rightarrow\; X = \frac{1}{3}A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

22 **Resuelve la ecuación:** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

23 **S** **Discute y resuelve, según los diferentes valores del parámetro a, estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\left\{\begin{array}{l} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \quad\quad - az = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax \quad\quad = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x \quad\quad - az = 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 20 & 1 \\ a & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$ (bajo las tres primeras columnas: A) $|A| = 1 - a^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

• **Si $a = 1$,** queda:

$$\underbrace{A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)}_{A}$$

. Observamos que la 1ª y la 3ª columna son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$; luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 1ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x + 8y = 1 - 23z \\ x \quad\quad = 1 + z \end{array}\right\} \ 8y = 1 - 23z - 1 - z = -24z \ \rightarrow \ y = -3z$$

Soluciones: $(1 + \lambda, -3\lambda, \lambda)$

• **Si $a = -1$,** queda:

$$\underbrace{A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{A}$$

. Como $\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Luego, $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

• **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 20 \\ 1 & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{1 - a}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{1}{1 + a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 20 \\ a & 1 & 23 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{3 - 3a}{1 - a^2} = \frac{3(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{3}{1 + a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 7 & 1 \\ a & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{a - 1}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-(1 - a)}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{-1}{1 + a}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{1 + a}, \quad y = \dfrac{3}{1 + a}, \quad z = \dfrac{-1}{1 + a}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$

$$|A| = -a(2 - a) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $\boldsymbol{a = 0}$**, queda:

  $A' = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$. Sistema **incompatible** (la 2ª ecuación es imposible).

- **Si $\boldsymbol{a = 2}$**, queda:

  $A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right.\right)$. La 1ª y la 3ª columna son iguales.

  Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

  El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación:

  $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 - x - z = -z \end{array}\right\}$ *Soluciones:* $(1, -\lambda, \lambda)$

- **Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq 2}$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{vmatrix}}{-a(2 - a)} = \frac{-2(2 - a)}{-a(2 - a)} = \frac{2}{a}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-a(2 - a)} = \frac{2(2 - a)}{-a(2 - a)} = \frac{-2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{-a(2 - a)} = \frac{-a(2 - a)}{-a(2 - a)} = 1; \qquad \text{Solución: } x = \frac{2}{a}, \quad y = \frac{-2}{a}, \quad z = 1$$

24 **S** **Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso $a = 2$:**

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{array}\right)$$

(Las tres primeras columnas forman A.)

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

(Las tres primeras columnas forman A.) La 1ª y la 3ª fila son iguales.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$; luego, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *nº incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3ª ecuación (puesto que es igual que la 1ª):

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y + 3z = -x \\ y + 2z = 1 - x \end{array}\right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1-x & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{x-3}{-1} = 3 - x; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Soluciones: $x = \lambda,\ y = 3 - \lambda,\ z = -1$

- **Si $a = -2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{array}\right)$$

(Las tres primeras columnas forman A.)

Como $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20$ y $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -128 \neq 0$, entonces $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$.

El sistema es *incompatible*.

- **Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 =$ *nº incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

25 **S** **Averigua los valores de α para los cuales admiten infinitas soluciones los sistemas siguientes. Obtén todas las soluciones e interpreta geométricamente los resultados obtenidos:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + \alpha z = 5 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + \alpha z = 5 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$ $|A| = \alpha - 9 = 0 \rightarrow \alpha = 9$

- **Si $\alpha = 9$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, entonces:

ran (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 3 - 2z \\ x + 2y = 5 - 9z \end{array}\right\}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 5-9z & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 + 5z;$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 1 & 5-9z \end{vmatrix}}{1} = 2 - 7z$

Soluciones: $x = 1 + 5\lambda,\ y = 2 - 7\lambda,\ z = \lambda$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en una recta.

- **Si $\alpha \neq 9$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & \alpha \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{\alpha - 9}{\alpha - 9} = 1;$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & \alpha \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{2\alpha - 18}{\alpha - 9} = \dfrac{2(\alpha - 9)}{\alpha - 9} = 2$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\alpha - 9} = \dfrac{0}{\alpha - 9} = 0.$ *Solución:* $x = 1,\ y = 2,\ z = 0$

Geométricamente, son tres planos que se cortan en el punto (1, 2, 0).

b) $\left.\begin{array}{l} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right)$

$|A| = -\alpha^2 + 1 = 0 \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

• **Si $\alpha = 1$**, queda:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y$. *Soluciones:* $x = 1 + \lambda,\ y = \lambda$.

Geométricamente, son rectas coincidentes (se trata de la misma recta).

• **Si $\alpha = -1$**, queda:

$A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Las ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

Geométricamente, son dos rectas paralelas.

• **Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 2. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\alpha - 1 & -\alpha \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{\alpha - 1}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-1}{1 + \alpha}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2\alpha - 1 \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{(\alpha - 1)(2\alpha + 1)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Solución: $x = \dfrac{-1}{1 + \alpha}$; $y = \dfrac{-2\alpha - 1}{\alpha + 1}$

Geométricamente, son dos rectas que se cortan en un punto.

26 **Discute la compatibilidad del siguiente sistema según los diversos valores de λ y resuélvelo para $\lambda = -1$ y para $\lambda = 2$:**
S

$$\begin{cases} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x + \lambda y + 2z = \lambda \\ 2x + \lambda y - z = 2 \\ \lambda x - y + 2z = \lambda \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \end{array}}_{A} \;\middle|\; \begin{array}{c} \lambda \\ 2 \end{array}\right)$$

$|A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = -3(\lambda + 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

• **Si $\lambda = -1$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}}_{A} \;\middle|\; \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right).$$ La 1ª y la 3ª ecuación son iguales.

Como $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, entonces $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Lo resolvemos. Podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y = -1 - 2z \\ 2x - y = 2 + z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 1 + 2z \\ 2x - y = 2 + z \end{array}\right\} \text{ Sumando: } 3x = 3 + 3z \ \rightarrow \ x = 1 + z$$

$y = 1 + 2z - x = 1 + 2z - 1 - z = z$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, \ y = \lambda, \ z = \lambda$

- **Si $\lambda \neq -1$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos para el caso en que $\lambda = 2$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-18}{-27} = \frac{2}{3}; \qquad \textit{Solución: } x = \frac{2}{3}, \ y = \frac{2}{3}, \ z = \frac{2}{3}$$

27 **S** **Halla, en función de a, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ y calcula, si existe, la matriz inversa A^{-1} en los casos $a = 1$ y $a = -1$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \ \rightarrow \ |A| = a^2 + 4a + 3 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & a & \boxed{-3} \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Por tanto:

- **Si $a = -1$ o $a = -3$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = 2$
- **Si $a \neq -1$ y $a \neq -3$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = 3$

Así, si $a = -1$, como $|A| = 0$, no existe A^{-1}.

Para $a = 1$, $|A| = 8 \neq 0$, sí existe A^{-1}. La calculamos en este caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -12 & -4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

28 S **Considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$**.**

a) ¿Cuándo el determinante de A **es el seno de algún número real?**

b) Calcula A^{-1} **cuando exista.**

c) Determina todos los pares (a, b) **para los que** A **coincide con su inversa.**

a) $|A| = b$ será el seno de algún número real cuando $-1 \le b \le 1$.

b) Existirá A^{-1} cuando $|A| \ne 0$, es decir, cuando $b \ne 0$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} \to \begin{cases} a = -\dfrac{a}{b} \to ab + a = 0 \to a(b+1) = 0 \\ b = \dfrac{1}{b} \to b^2 = 1 \begin{cases} b = 1 \to a = 0 \\ b = -1 \to a \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$$

$A = A^{-1}$ cuando
- $a = 0$ y $b = 1$ → $(0, 1)$
- $b = -1$ y a cualquier número real → $(a, -1)$

29 S **Halla los valores del parámetro** t **para los cuales las matrices** A **y** B **no son invertibles y calcula:**

a) A^{-1} **si** $t = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$

b) B^{-1} **si** $t = 2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \to t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

A no es invertible para $t = 2$ ni para $t = -6$.

Calculamos A^{-1} para $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no es invertible para $t = 1$ ni para $t = -1$.

Calculamos B^{-1} para $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

30 S **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es cualquier número real:**

a) Encuentra los valores de λ para los que AB es invertible.

b) Determina los valores de λ para los que BA es invertible.

c) Dados a y b, números reales cualesquiera, ¿puede ser el siguiente sistema compatible determinado?

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\lambda \\ 1 - \lambda & 1 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2} \\ \end{cases}$$

$A \cdot B$ es invertible cuando $\lambda \neq \frac{1}{2}$ y $\lambda \neq -2$.

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda - 3 \\ \lambda & 2\lambda & \lambda^2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$|B \cdot A| = 0 \rightarrow B \cdot A$ no es invertible.

c) $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right)$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \rightarrow$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado,* para cualquier valor de a y b. Por tanto, no puede ser *compatible determinado*.

Página 120

31 S En el supuesto de que exista, calcula una matriz X tal que $AX = B$ en los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}. Luego:

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & -14 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 & -14 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para poder efectuar el producto $A \cdot X = B$, X debería ser (si existiera) de dimensión 2×3.

Sea $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Entonces:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2x+a & 2y+b & 2z+c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x + a = 2 \quad \to \quad x = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2x + a = 1 \quad \to \quad 2x = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \quad \to \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$3a = 5 \quad \to \quad a = \frac{5}{3}$$

No tiene solución. Luego *no* existe X tal que $AX = B$.

32 **S** **Dado el sistema:** S: $\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha} \\ \boldsymbol{x \quad + \quad z = \beta} \\ \boldsymbol{x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta} \end{array} \right.$

a) Demuestra que es compatible determinado para cualquier valor de α **y** β**.**

b) Resuélvelo para $\alpha = \beta = 1$**.**

a) $\left. \begin{array}{l} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array} \right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix} \right. \right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha+\beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = ran\ (A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de α y β.

b) Si $\alpha = \beta = 1$, queda:

$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \right. \right)$, con $|A| = -2$. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}. \quad \textit{Solución:} \ x = \frac{-1}{2}, \ y = \frac{3}{2}, \ z = \frac{3}{2}$$

33 **a) Discute, en función de a, el siguiente sistema:** $\left\{\begin{array}{l} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right.$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

a) $\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right)$, with A the 3×3 block on the left

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$ El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = -2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

entonces *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

b) **Para $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ y sabemos que $|A| = 4$.

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$ *Solución:* $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-1}{2}$, $z = 0$

CUESTIONES TEÓRICAS

34 **S** **En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:**

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser compatible indeterminado si *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) < *nº incógnitas*.

b) No, pues al ser *ran* (*A*) < *nº incógnitas*, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al 2º miembro las incógnitas que sea necesario.

35 **S** **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3.**

¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que *ran* (*A*) = *ran* (*A'*) = = *nº incógnitas* = 3. El sistema sería compatible determinado. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial (0, 0, 0).

36 **¿Qué condición debe cumplir una matriz cuadrada para tener inversa?**

La condición necesaria y suficiente para que una matriz, A, cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero, es decir, $|A| \neq 0$.

37 **Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?**

Si A y B son inversas una de otra, entonces $A \cdot B = I$. Así:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

38 **S** **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1. ¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?**

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

39 **¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?**

$$\begin{vmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.

40 S **Dadas estas ecuaciones:** $\begin{cases} 3x - 2y + z = \;\;\,5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido para añadir la ecuación.

a) Por ejemplo, $3x - 2y + z = 1$ contradice la 1ª ecuación; luego, si añadimos esta ecuación, el sistema obtenido sería incompatible.

b) Por ejemplo, si añadimos la ecuación $y = 0$, como

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ el sistema sería compatible determinado.}$$

41 S **Representa matricialmente los sistemas:**

$$s: \begin{cases} 3x + \;\;y = 1 \\ 11x + 4y = 0 \end{cases} \qquad s': \begin{cases} 3x + \;\;y = 0 \\ 11x + 4y = 1 \end{cases}$$

Resuélvelos y averigua si existe alguna relación entre las soluciones obtenidas y la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$**. Justifica la relación obtenida.**

SISTEMA S

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMA S'

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ $(|A| = 1 \neq 0)$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA S

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA S'

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones obtenidas son cada una de las columnas de la matriz inversa. Observamos que las matrices de los términos independientes de los dos sistemas son las columnas de la matriz identidad. Por tanto, las incógnitas que hallamos son los elementos de la matriz inversa.

42 S **Demuestra que no hay valores de** m **para los que el siguiente sistema no tenga solución:**

$$\begin{cases} x + \;\,2y + \;\;z = 3 \\ x + \;\,3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + \;\;2y + \;\;\; z = 3 \\ x + \;\;3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ \underbrace{1 \quad m \quad 3}_{A} & & & 7 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4 - m = 0 \;\; \to \;\; m = 4$$

- **Si $\boldsymbol{m = 4}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

con A la matriz de las tres primeras columnas. La 4ª columna se obtiene sumando la 2ª y la 3ª.

Luego, $ran\ (A) = ran\ (A')$. El sistema es compatible. (En este caso sería compatible indeterminado, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \;\to\; ran\ (A) = ran\ (A') = 2$).

- **Si $\boldsymbol{m \neq 4}$** $\;\to\;$ $ran\ (A) = ran\ (A') = n^{o}\ incógnitas = 3$. El sistema es compatible determinado.

Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

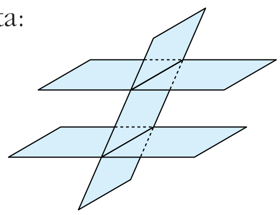
43
S

Si el rango de la matriz de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos y el de la matriz ampliada tres, ¿qué interpretaciones geométricas podemos dar a ese sistema? Pon un ejemplo de un sistema de esas características y su interpretación geométrica.

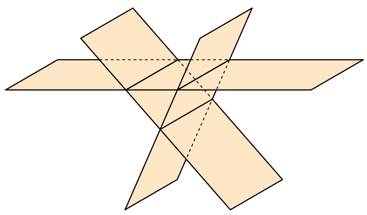
Si $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$, el sistema es incompatible.

Interpretaciones geométricas posibles:

1) Dos planos paralelos y otro que los corta:



2) Tres planos que se cortan dos a dos, pero sin ningún punto común a los tres:



Un ejemplo de cada uno de los dos casos sería:

$$1)\;\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y \qquad\; = 2 \\ x + y + z = 3 \end{array}\right\} \qquad\qquad 2)\;\left.\begin{array}{l} \;\;x + \;\;y + z = 1 \\ \;\;x + \;\;y \qquad = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{array}\right\}$$

Página 121

44 **S** **Si dos sistemas de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, $AX = B$ y $AX = B'$, tienen una misma matriz de coeficientes A, ¿puede ser incompatible uno de los dos sistemas mientras que el otro es compatible y determinado?**

No. Si uno de ellos es compatible determinado es porque *ran* (A) = *ran* (A') = 4. Por tanto, si A es la misma matriz en los dos sistemas, también en el otro será *ran* (A) = 4. Luego los dos serían compatibles determinados.

45 **S** **¿Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones lineal homogéneo no tenga solución? ¿Puede ocurrir que tenga infinitas soluciones? Razona las respuestas.**

Un sistema homogéneo siempre tiene, al menos, la solución trivial (0, 0, 0). Además, *ran* (A) = *ran* (A'); luego siempre es compatible. Si *ran* (A) = *nº incógnitas*, entonces solo tendría la solución trivial; y, si *ran* (A) < *nº incógnitas*, sería compatible indeterminado, es decir, tendría infinitas soluciones.

46 **S** **El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?**

La matriz ampliada, A', podría tener rango 3 o rango 4.

- Si *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *nº incógnitas* → El sistema sería compatible determinado, es decir, con una sola solución.
- Si *ran* (A) = 3 ≠ *ran* (A') = 4 → El sistema sería incompatible, sin ninguna solución.

47 **S** **Determina una matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:**

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

La ecuación matricial dada la podemos escribir así:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\} . \text{ Si llamamos } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces: $AX = 0$

Por tanto, la matriz A que buscamos es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

PARA PROFUNDIZAR

48 **a) ¿Para qué valor de a este sistema es compatible determinado?**

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

b) ¿Puede ser compatible indeterminado?

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \\ y + z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 3 = n^{\underline{o}}\ incógnitas$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS: } 1^{a};\ 2^{a}-1^{a};\ 3^{a};\ 4^{a}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$$

$\rightarrow \quad a = 14$

Por tanto, $\begin{cases} \bullet\ \textbf{Si}\ \boldsymbol{a = 14} \;\rightarrow\; ran\ (A) = ran\ (A') = 3 \;\rightarrow\; \textit{Compatible determinado} \\ \bullet\ \textbf{Si}\ \boldsymbol{a \neq 14} \;\rightarrow\; ran\ (A) = 3 \neq ran\ (A') = 4 \;\rightarrow\; \textit{Incompatible} \end{cases}$

b) *No*, por lo que hemos visto en el apartado anterior.

49 **Estudia y resuelve cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y + 2t = 3} \\ \boldsymbol{3x - y + z - t = 1} \\ \boldsymbol{5x - 3y + 2z - 4t = a} \\ \boldsymbol{2x + y + z + t = 2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{ax + z + t = 1} \\ \boldsymbol{ay + z - t = 1} \\ \boldsymbol{ay + z - 2t = 2} \\ \boldsymbol{az - t = 0} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2t = 3 \\ 3x - y + z - t = 1 \\ 5x - 3y + 2z - 4t = a \\ 2x + y + z + t = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & a \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \ \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 3$$

(La 4ª columna depende linealmente de las tres primeras).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & a \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS: } 1^{a};\ 2^{a};\ 3^{a}-2^{a};\ 4^{a}-2\cdot 2^{a}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 3 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & 2 & \boxed{0} & 1 \\ -1 & -1 & \boxed{0} & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & a-2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\text{FILAS: } 1^{a};\ 2^{a}+1^{a};\ 3^{a}+1^{a}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = 3(a+1) = 0 \;\rightarrow\; a = -1$$

- **Si $\boldsymbol{a = -1}$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 3 < *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4ª ecuación y pasar la t al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r}x + y \phantom{{}+z} = 3 - 2t\\ 3x - y + z = 1 + t\\ 2x + y + z = 2 - t\end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}3-2t & 1 & 0\\ 1+t & -1 & 1\\ 2-t & 1 & 1\end{vmatrix}}{-3} = \frac{2t-5}{-3} = \frac{5-2t}{3};\quad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 3-2t & 0\\ 3 & 1+t & 1\\ 1 & 2-t & 1\end{vmatrix}}{-3} = \frac{4t-4}{-3} = \frac{4-4t}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 3-2t\\ 3 & -1 & 1+t\\ 2 & 1 & 2-t\end{vmatrix}}{-3} = \frac{8-5t}{-3} = \frac{-8+5t}{3}$$

Soluciones: $x = \dfrac{5-2\lambda}{3},\quad y = \dfrac{4-4\lambda}{3},\quad z = \dfrac{-8+5\lambda}{3},\quad t = \lambda$

- **Si $\boldsymbol{a \neq -1}$** $\rightarrow$ *ran* $(A) = 3 \neq$ *ran* $(A') = 4$. El sistema es *incompatible*.

b) $$\left.\begin{array}{r}ax + \phantom{ay+{}} z + t = 1\\ ay + z - t = 1\\ ay + z - 2t = 2\\ az - t = 0\end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c}a & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & a & -1 & 0\end{array}\right)$$

con A la matriz de las cuatro primeras columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix}a & 0 & 1 & 1\\ 0 & a & 1 & -1\\ 0 & a & 1 & -2\\ 0 & 0 & a & -1\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}a & 1 & -1\\ a & 1 & -2\\ 0 & a & -1\end{vmatrix} = \begin{array}{c}\text{FILAS}\\ 1^a\\ 2^a - 1^a\\ 3^a\end{array} \rightarrow a\begin{vmatrix}a & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & a & -1\end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{vmatrix} = a \cdot a^2 = a^3 = 0 \quad\rightarrow\quad a = 0$$

- **Si $\boldsymbol{a = 0}$**, queda:

$$A' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{array}{l}\\ \rightarrow\ z = 1\\ \rightarrow\ z = 2\\ \rightarrow\ t = 0\end{array}\ \ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}\ \textit{Incompatible}$$

- **Si $\boldsymbol{a \neq 0}$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 4. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & -1\\ 2 & a & 1 & -2\\ 0 & 0 & a & -1\end{vmatrix}}{a^3} = \frac{(2a+1)a}{a^3} = \frac{2a+1}{a^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^2}{a^3} = \frac{-1}{a}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{a^3} = \frac{-a^3}{a^3} = -1$$

Soluciones: $x = \dfrac{2a+1}{a^2}, \quad y = \dfrac{1}{a^2}, \quad z = \dfrac{-1}{a}, \quad t = -1$

50 S **Discute los siguientes sistemas según los valores de los parámetros que contienen:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \qquad - z = b \\ x \qquad + z = c \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay \qquad = b + 1 \\ -x \qquad + z = b \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 2 \\ -8 \\ b \end{array}\right.\right)$

$|A| = 5a = 0 \;\rightarrow\; a = 0$

- **Si $a = 0$,** queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 2 \\ -8 \\ b \end{array}\right.\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \;\rightarrow\; b = -4$$

- **Si $a = 0$ y $b = -4$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a = 0$ y $b \neq -4$** $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema es *incompatible.*

- **Si $a \neq 0$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b.

b) $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = a - 1 \\ 2x + \ \ y + az = a \\ x + ay + \ \ z = b \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} a-1 \\ a \\ b \end{array}\right.\right)$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$ Contradictorias, a no ser que $b = 0$.

— Si $a = 1$ y $b \neq 0$ $\rightarrow$ *Sistema incompatible.*

— Si $a = 1$ y $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$ La primera fila y la tercera son iguales.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \textit{ran } (A) = \textit{ran } (A') = 2 < \textit{nº incógnitas}.$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right)$$ La primera y la tercera columnas son iguales.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \textit{ran } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1$ $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

— Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *nº incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

c) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \qquad\;\; - z = b \\ x \qquad\;\; + z = c \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$|A| = 6 \neq 0 \to$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $\to$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a, b y c.

d) $\left.\begin{array}{l} ax + \;\; y - z = b - 1 \\ 2x + ay \qquad = b + 1 \\ -x \qquad\; + z = b \end{array}\right\}\quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & a & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \begin{cases} a = -1 \\ a = \;\;2 \end{cases}$

- **Si $a = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & -1 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to$ *ran* $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b-1 \\ 2 & -1 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = -3b = 0 \to b = 0$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \to$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \to$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = -1$ y $b = 0 \to$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas* $\to$ El sistema es *compatible indeterminado*.

- **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & 2 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to$ *ran* $(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \to b = 1$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1 \to$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \to$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *nº incógnitas* → El sistema es *compatible indeterminado.*

— Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 =$ *nº incógnitas* → El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

51 **Calcula los valores de a y b para los cuales este sistema tiene infinitas soluciones. Resuélvelo para esos valores:**

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$, siendo A la matriz de las tres primeras columnas.

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

• **Si $a = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A (las tres primeras columnas)

— Si $a = 1$ y $b = 1$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 1$ → *Compatible indeterminado.*

$x + y + z = 1$ → $x = 1 - y - z$. *Soluciones:* $x = 1 - \lambda - \mu$; $y = \lambda$; $z = \mu$

— Si $a = 1$ y $b \neq 1$ → *Incompatible.*

• **Si $a = -2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

A (las tres primeras columnas)

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \;\rightarrow\; ran\ (A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3b + 6 = 0 \;\rightarrow\; b = -2$$

— Si $a = -2$ y $b = -2$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$ → *Compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{r} -2x + y = 1 - z \\ x - 2y = -2 - z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -2-z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z}{3} = z; \; y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1-z \\ 1 & -2-z \end{vmatrix}}{3} = \frac{3z+3}{3} = \frac{3(z+1)}{3} = 1 + z$$

Soluciones: $x = \lambda, \;\; y = 1 + \lambda, \;\; z = \lambda$

— Si $a = -2$ y $b \neq -2 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3 \;\rightarrow\;$ *Incompatible.*

— Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) \neq$ *ran* $(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. El sistema es *compatible determinado.*

b) $\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + y + z &= -b \\ x - ay + z &= b \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -a & 1 & b \end{array}\right)$, con A la matriz de los tres primeros coeficientes

$$|A| = (a+1)(a-1) = 0 \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

- **Si $a = -1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$ Contradictorias a no ser que $b = -b \;\rightarrow\; b = 0$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible.*

— Si $a = -1$ y $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$ La 2ª y 3ª filas son iguales.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\;$ *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 2 <$ *nº incógnitas* $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 4 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -x + y &= 4 - z \\ x + y &= -z \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$2y = 4 - 2z \;\rightarrow\; \begin{cases} y = 2 - z \\ x = -z - y = -z - 2 + z = -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x = -2, \;\; y = 2 - \lambda, \;\; z = \lambda$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -b \\ 1 & -1 & 1 & b \end{array}\right)$$ Contradictorias, a no ser que $-b = 4 \;\rightarrow\; b = -4$

— Si $a = 1$ y $b \neq -4$ → Sistema *incompatible.*

— Si $a = 1$ y $b = -4$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$ La primera y segunda filas son iguales.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ → $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *nº incógnitas* → Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x - y + z = -4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x + y = 4 - z \\ x - y = -4 - z \end{array}$$

Sumando las dos ecuaciones:

$$2x = -2z \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = -z \\ y = 4 - z - x = 4 - z + z = 4 \end{array}\right.$$

Soluciones: $x = -\lambda,\; y = 4,\; z = \lambda$

- **Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$** → $ran(A) = ran(A') =$ *nº incógnitas* → Sistema *compatible determinado* para cualquier valor de b.

52 S **Discute en función de λ y μ:** $\left\{\begin{array}{l} (\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = 1 \\ 3x + (\lambda + 1)y + 2z = \mu - 1 \\ \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda + 1)x + 3y + \lambda z = 1 \\ 3x + (\lambda + 1)y + 2z = \mu - 1 \\ \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} \lambda + 1 & 3 & \lambda \\ 3 & \lambda + 1 & 2 \end{array}}_{A}\;\middle|\;\begin{array}{c} 1 \\ \mu - 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \lambda^2 - 4 = 0 \;\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{array}$$

- **Si $\lambda = 2$**, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}}_{A}\;\middle|\;\begin{array}{c} 1 \\ \mu - 1 \\ 2 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ → $ran(A) = 2$; $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \mu - 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mu + 4 = 0$ → $\mu = 2$

— Si $\lambda = 2$ y $\mu = 2$ → $ran(A) = ran(A') = 2$. *Compatible indeterminado.*

— Si $\lambda = 2$ y $\mu \neq 2$ → $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$. *Incompatible.*

- **Si $\lambda = -2$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & \mu - 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & \mu - 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\mu - 8 = 0 \;\rightarrow\; \mu = -2$$

— Si $\lambda = -2$ y $\mu = -2$ → $ran\,(A) = ran\,(A') = 2$. *Compatible indeterminado.*

— Si $\lambda = -2$ y $\mu \neq -2$ → $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. *Incompatible.*

- **Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2$** → $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. *Compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de μ.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

53 Dada la matriz: $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz (A_{ij}) formada por los adjuntos de los elementos de A.

b) Calcula $|A| = |a_{ij}|$ y $|A_{ij}|$ y halla una relación entre ellos.

a) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $|A| = |a_{ij}| = -13$

$|A_{ij}| = 169 = (-13)^2 = |A|^2$

54 En general, ¿qué relación existe entre el determinante de una matriz A, de orden 3×3, y el determinante de la matriz formada por sus adjuntos? Para demostrarlo, ten en cuenta que: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y la expresión de A^{-1}.

- Sabemos que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$|A_{ij}| = |A_{ji}|.$$

- Por otra parte, tenemos que (suponemos que existe A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) \;\rightarrow\; |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \cdot |A_{ji}| = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| = |A^{-1}|$$

- También sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I \;\rightarrow\; |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \;\rightarrow\; |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

• Uniendo las dos igualdades obtenidas, tenemos que:

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| \quad \rightarrow \quad |A_{ij}| = |A|^2 \ \ (A \text{ de orden } 3 \times 3)$$

55 **Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, da el valor de $|A_{ij}|$ en función de $|A|$.**

Con el mismo razonamiento que hemos seguido en el ejercicio anterior, llegamos a que si A es $n \times n$:

$$\left.\begin{array}{l} |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|^n} \, |A_{ij}| \\[2ex] |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right\} \rightarrow \quad |A_{ij}| = |A|^{n-1}$$