

Capítulo 5

Cálculo de Primitivas

5.1. Tabla de integrales inmediatas

$$[1] \int f'(x)[f(x)]^n dx = \begin{cases} \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} & \text{si } n \neq -1 \\ \ln[f(x)] & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

$$[2] \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)}$$

$$[3] \int f'(x)a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$$

$$[4] \int f'(x) \operatorname{sen}(f(x)) dx = -\cos(f(x))$$

$$[5] \int f'(x) \operatorname{cos}(f(x)) dx = \operatorname{sen}(f(x))$$

$$[6] \int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \int f'(x)[1 + \operatorname{tg}^2(f(x))] dx = \operatorname{tg}(f(x))$$

$$[7] \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx = \int f'(x)[1 + \operatorname{ctg}^2(f(x))] dx = -\operatorname{ctg}(f(x))$$

$$[8] \int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \operatorname{arc tg}[f(x)]$$

$$[9] \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \operatorname{arc sen}[f(x)]$$

$$[10] \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}} dx = \ln(f(x) + \sqrt{1 + [f(x)]^2})$$

$$[11] \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - 1}} dx = \ln(f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 - 1})$$

5.2. Inmediatas

- [1] $\int \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) dx = -\frac{1}{x} - x + C$; [2] $\int \frac{x+1}{x} dx = x + \ln x + C$
- [3] $\int \frac{1}{\sqrt{x-5}} dx = 2\sqrt{x-5} + C$; [4] $\int \sqrt[5]{x^2} dx = \frac{5x^{7/5}}{7} + C$
- [5] $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \frac{3(x+1)^{2/3}}{2} + C$; [6] $\int \frac{1}{(x-2)^3} dx = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C$
- [7] $\int \cos(3x-1) dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x-1) + C$; [8] $\int 3^{x+1} dx = \frac{3^{x+1}}{\ln 3} + C$
- [9] $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + C$; [10] $\int \frac{1}{2-x} dx = -\ln(2-x) + C$
- [11] $\int \frac{3x-1}{1+x^2} dx = \frac{3}{2} \ln(1+x^2) - \operatorname{arc\,tg} x + C$; [12] $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2-6x+5) + C$
- [13] $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3}x) + C$; [14] $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}} dx = 2\sqrt{x^3+2x+1} + C$
- [15] $\int (2 + \operatorname{tg}^2 x) dx = x + \operatorname{tg} x + C$; [16] $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) + C$
- [17] $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C$; [18] $\int \frac{2x}{1+x^4} dx = \operatorname{arc\,tg}(x^2) + C$
- [19] $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + C$; [20] $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C$
- [21] $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen} x) + C$; [22] $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$
- [23] $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$; [24] $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen}(x^3) + C$
- [25] $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = -\ln(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$; [26] $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln(\cos x) + C$
- [27] $\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$; [28] $\int 5 \cdot 3^{1-x} dx = -5 \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C$
- [29] $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$; [30] $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
- [31] $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$; [32] $\int \frac{1}{1-\cos x} dx = -\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$
- [33] $\int \frac{\cos x}{1-\cos x} dx = -\operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} \right) - x + C$; [34] $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$
- [35] $\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^4+x^2+1) + C$; [36] $\int \frac{4}{1-3x} dx = -\frac{4}{3} \ln(3x-1) + C$
- [37] $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$; [38] $\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^4} dx = -\frac{1}{6x^3(x+2)^3} + C$
- [39] $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}(x^2) + C$; [40] $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x}) + C$
- [41] $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x^3) x^2 dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C$; [42] $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2}{2} + C$
- [43] $\int \operatorname{sen}^4 x \cos x dx = \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x + C$; [44] $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + C$

5.3. Integración por partes

$$\begin{aligned}
 [45] \quad \int x \operatorname{sen} x \, dx &= \operatorname{sen} x - x \cos x + C & ; & \quad [46] \quad \int x e^x \, dx = (x - 1)e^x + C \\
 [47] \quad \int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx &= x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - x^2} + C & ; & \quad [48] \quad \int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C \\
 [49] \quad \int x^2 \operatorname{sen} x \, dx &= (2 - x^2) \cos x + 2x \operatorname{sen} x + C & ; & \quad [50] \quad \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C \\
 [51] \quad \int x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + C
 \end{aligned}$$

$$[52] \quad \int x^m \ln x \, dx = \begin{cases} \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} [(m+1) \ln x - 1], & \text{si } m \neq -1 \\ \frac{\ln^2 x}{2}, & \text{si } m = -1 \end{cases} + C$$

$$[53] \quad \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x^2} \, dx = -\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) + C$$

$$[54] \quad \int (x - 1)e^x \, dx = (x - 2)e^x + C$$

$$[55] \quad \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{(x^2 + 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2} - \frac{x}{2} + C$$

$$[56] \quad \int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$$

$$[57] \quad \int x^m (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3} [(m+1)^2 (\ln x)^2 - 2(m+1) \ln x + 2] + C$$

$$[58] \quad \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} \, dx = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2} - \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C$$

$$[59] \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$$

$$[60] \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C$$

5.4. Racionales

$$[61] \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2} dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x + 2) + C$$

$$[62] \int \frac{x + 5}{x - 1} dx = x + 6 \ln(x - 1) + C$$

$$[63] \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + C$$

$$[64] \int \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 7 \ln(x - 3) + C$$

$$[65] \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) + C$$

$$[66] \int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x} dx = \ln(x + 1) + 3 \ln(x - 1) - 3 \ln x + C$$

$$[67] \int \frac{x + 5}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{\ln(x + 2)}{3} - \frac{\ln(x - 1)}{3} - \frac{2}{x - 1} + C$$

$$[68] \int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{\ln(x + 1)}{2} - \frac{\ln(x - 1)}{2} - \frac{4}{x - 1} + C$$

$$[69] \int \frac{x^2 + 4}{(x - 2)^3} dx = \ln(x - 2) - \frac{4}{(x - 2)^2} - \frac{4}{x - 2} + C$$

$$[70] \int \frac{1}{x^3 + x} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

$$[71] \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) + C$$

$$[72] \int \frac{1}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

$$[73] \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 5x + 4} dx = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{2 \ln(x - 1)}{3} + \frac{65 \ln(x - 4)}{3} + C$$

$$[74] \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx = \ln x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

$$[75] \int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{5}{3} \ln(x + 1) - \frac{8}{3} \ln(x - 2) + \ln x + \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$[76] \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \ln(x - 1) + \ln(x - 2) + \frac{x^2}{2} + x + C$$

5.5. Cambio de variable

$$77) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \{1+x^2=t^2\} = \frac{(x^2-2)\sqrt{x^2+1}}{3} + C$$

$$78) \int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad \{x=a \cos t\} = \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + C$$

$$79) \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx \quad \{x+1=t^2\} = 2\sqrt{x+1} - 2 \ln(1+\sqrt{x+1}) + C$$

$$80) \int \frac{1}{1+e^x} dx \quad \{e^x=t\} = x - \ln(1+e^x) + C$$

$$81) \int \frac{e^x}{(e^x+4)^2} dx \quad \{e^x=t\} = -\frac{1}{4+e^x} + C$$

$$82) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} dx \quad \{x=t^6\} = \sqrt[6]{x}(2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}+6) - 6 \ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

$$83) \int \frac{e^x+1}{1-e^x} dx \quad \{e^x=t\} = x - 2 \ln(e^x-1) + C$$

$$84) \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx \quad \{x-1=t^2\} = \frac{2\sqrt{x-1}(5x^3+6x^2+8x+16)}{35} + C$$

$$85) \int \sec^3 x dx \quad \{\sen x=t\} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sen x}{\cos x} \right) + \frac{\sen x}{2 \cos^2 x} + C$$

$$86) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx \quad \{x=\sqrt{2t}\} = \ln(x+\sqrt{x^2-2}) + C$$

5.6. Miscelánea

$$[87] \int \frac{2x+1}{x^3+x} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$$

$$[88] \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C$$

$$[89] \int \frac{3}{4+9x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{3x}{2} \right) + C$$

$$[90] \int x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$[91] \int \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 5\sqrt{x^2+1} + C$$

$$[92] \int 5x \cos(x^2+3) dx = \frac{5}{2} \operatorname{sen}(x^2+3) + C$$

$$[93] \int \frac{x+1}{(x-1)^2} dx = \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$$

$$[94] \int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} dx = 3 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{3} \right) - \sqrt{9-x^2} + C$$

5.7. Problemas

1. Empleando el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x)$, calcular:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + \cos(x) \operatorname{sen}(x)}$$

Solución: $\ln |1 + \operatorname{tg}(x)|$

2. Calcular la integral

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx$$

realizando el cambio de variable $t = \cos x$.

- a) Calcula la misma integral que en el apartado anterior pero haciendo el cambio de variable $u = \operatorname{tg} x$.
- b) ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos casos?. Justificar la respuesta.

Solución: $\frac{1}{2 \cos^2 x}, \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}$.

3. Explicar en qué consiste el método de integración por partes. Calcular

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Solución: $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$

4. Calcular

$$\int \frac{3}{1 + 2\sqrt{e^{-x}}} \, dx$$

Solución: $6 \ln(e^{x/2} + 2)$

5. Calcular

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$$

Solución: $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$

6. Hallar la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Solución: $F(x) = \ln(e^x + 1) + 2 - \ln 2$

7. Determinar $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$, $f''(0) = 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

Solución: $f(x) = x^4 + x^2 + x$

8. **Selectividad Junio 2001.** Siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x , consideramos la función $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \ln x$. Calcular:

a) $\int f(x) \, dx$.

b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1, 0)$.

Solución: $\int f(x) \, dx = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + C$, $F(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + \frac{1}{4}$.

9. **Selectividad Junio 2001.** De la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f''(x) = x^2 + 2x + 2$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$. Hallar la expresión de f .

Solución: $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{10x}{3} + \frac{47}{12}$.

10. **SL.** Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 + x)e^x$.

a) Calcular $\int f(x) \, dx$.

b) Hallar una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$.

Solución: $\int f(x) dx = xe^x + C$; $F(x) = xe^x + 3$

11. **SL.** Determinar la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que su segunda derivada es constante e igual a 3 y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $5x - y - 3 = 0$.

Solución: $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 3}{2}$

12. Hallar una primitiva de la función $f(x) = 2x^2 \sin x$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas.

Solución: $f(x) = -2x^2 \cos x + 4x \sin x + 4 \cos x - 4$

13. **Selectividad Junio 2003.** Sea $\ln(1 - x^2)$ el logaritmo neperiano de $1 - x^2$ y sea $f :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(1 - x^2)$. Calcular la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Solución: $F(x) = x \ln(1 - x^2) - 2x - \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right) + 1$

14. **Selectividad Septiembre 2003.** Sea $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1) \ln(x)$ donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x . Calcular la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1, -3/2)$.

Solución: $F(x) = \frac{2x^2 \ln x - x^2 - 4x \ln x + 4x - 9}{4}$

15. **Selectividad Junio 2004.** De la función $f :] - 1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2}$ y que $f(2) = 0$.

- Determinar f .
- Hallar la primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

Solución: $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$, $F(x) = x - 3 \ln(x + 1) + 1$

16. **Selectividad septiembre 2005.** De una función $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que $f(3) = 6$ y que su función derivada está dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 6x + 8, & \text{si } 1 \leq x < 5 \end{cases}$$

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.

- b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcular sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Solución: $y = 9 - x$; f crece en $\left] \frac{2}{5}, 2 \right[\cup]4, 5[$ y decrece en $\left] 0, \frac{2}{5} \right[\cup]2, 4[$. Los puntos $\left(\frac{2}{5}, \frac{133}{30} \right)$, $\left(4, \frac{16}{3} \right)$ son mínimos locales y $\left(2, \frac{20}{3} \right)$ es un máximo local.

17. **Selectividad septiembre 2006.** Calcular:

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx, \quad \int (2x - 3) \operatorname{tg}(x^2 - 3x) dx$$

siendo tg la función tangente.

Solución: $5x - 4 \ln |x - 5| + 3 \ln |x + 5| + C$; $-\ln |\cos(x^2 - 3x)| + C$.

18. **Selectividad septiembre 2006.** Hallar la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

Solución: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$

19. **Selectividad junio 2007.** Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

Hallar la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas. (\ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución: $F(x) = x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

20. **Selectividad septiembre 2009.** Sea f la función definida por:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}}$$

Hallar la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$.

Sugerencia: utilizar el cambio de variable $t = \frac{3x^2}{2}$.

Solución: $F(x) = 3 + \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{3x^2}{2} \right)$