TEMA 6. INTEGRALES INDEFINIDAS

1. Definición de Integral. Primitiva de una función.
2. Propiedades de las integrales.
3. Integrales inmediatas
4. Métodos de integración
   4.1. Obtención de integrales inmediatas
   4.2. Cambio de variable
   4.3. Por partes
   4.4. Funciones racionales
   4.5. Funciones trigonométricas.

Contexto con la P.A.U.

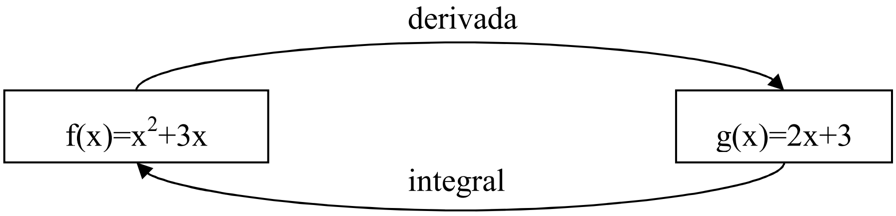
En casi todos los exámenes de la PAU en una opción, e incluso a veces en las 2, tendremos que realizar una integral, bien sea indefinida o bien definida para calcular un área. La integración aparece como una cuestión de 1 punto o un apartado del problema de funciones.

Para el cálculo de áreas y el de integrales definidas (que veremos en el siguiente tema) es necesario el cálculo antes de integrales indefinidas. Por lo general si nos piden calcular un área la integral a calcular será más sencilla que si nos piden calcular directamente la integral indefinida.

Por lo general al alumno la realización de integrales le resulta costosa al principio. Pero una vez que el alumno empiece a coger soltura y a realizar los ejercicios, comprenderá el método de integración a aplicar y no le resultará excesivamente complicado

1. Definición de integral. Primitiva de una función.

La integral es la operación contraria de la derivada. Así si $f(x)=x^2+3x$ entonces $g(x)=2x+3$ es su derivada; de igual forma la integral de $g(x)$ es $f(x)$.



***Definición**:* una función F(x) es una **primitiva** de otra función f dada, si la derivada de F(x) es f(x):

F primitiva de f ←→F'(x)=f(x)

El proceso mediante el cual obtenemos una primitiva de una función f(x) se denomina **integración**.

Así como dada una función f(x) su función derivada es única, existen infinitas primitivas de una función. Todas las primitivas se diferencian por una constante. Así si F(x) es una primitiva de f(x) toda función de la forma G(x)=F(x)+K es también primitiva, ya que G'(x)=(F(x)+k)'=F'(x)=f(x).

Definición: la integral definida de una función f es el conjunto de todas las primitivas de f, y se representa por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde F(x) es una primitiva de f(x) y C es una constante (constante de integración).

El símbolo integral $\int$ siempre va acompañado del diferencial, dx, que nos indica sobre que variable se realiza la integral.

2. Propiedades de la integral

Veamos las siguientes propiedades básicas para realizar las integrales:

- **P1**: la integral de un número real por una función es igual al número por la integral de la función, es decir las constantes se pueden sacar fuera de la integral:

  $$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

- **P.2:** La integral de la suma o diferencia de dos funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales de dichas funciones:

  $$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. Integrales inmediatas

Al igual que las derivadas tenemos una tabla de integrales inmediatas, es fácil de estudiarlas ya que es la aplicación inversa a la derivada. En esta tabla además de las integrales inmediatas veremos la primitiva compuesta, donde en vez de x aparecerá f(x) y en vez de dx aparece f´(x)dx.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS		
PRIMITIVA SIMPLE	**PRIMITIVA COMPUESTA**	**EJEMPLO**
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ (a \neq -1)$	$\int f(x)^a \cdot f'(x)dx = \frac{f(x)^{a+1}}{a+1} + C \ (a \neq -1)$	$\int sen^3(x) \cdot \cos(x)dx = \frac{sen^4(x)}{4} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{x^2} \cdot 2xdx = e^{x^2} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\int 3^{\tan(x)} \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)} = \frac{3^{\tan(x)}}{\ln(3)} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$	$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx = \ln(x^2+3x-5) + C$
$\int sen(x)dx = -\cos(x) + C$	$\int sen(f(x)) \cdot f'(x)dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int sen(x^2) \cdot 2xdx = -\cos(x^2) + C$
$\int \cos(x)dx = sen(x) + C$	$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x)dx = sen(f(x)) + C$	$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx = sen(\ln x) + C$
$\int (1 + tg^2 x)dx = tg(x) + C$	$\int (1 + tg^2 f(x)) \cdot f'(x)dx = tg(f(x)) + C$	$\int 3x^2 (1 + tg^2(x^3))dx = tg(x^3) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = tg(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = tg(f(x)) + C$	$\int \frac{2x+1}{\cos^2(x^2+x)} dx = tg(x^2+x) + C$
$\int (1+\cot g^2 x)dx = -\cot g(x) + C$	$\int (1+\cot g^2 f(x)) f'(x)dx = -\cot g(f(x)) + C$	$\int 2 (1+\cot g^2(2x))dx = -\cot g(2x) + C$
$\int \frac{1}{sen^2(x)} dx = -\cot g(x) + C$	$\int \frac{f'(x)}{sen^2(f(x))} dx = -\cot g(f(x)) + C$	$\int \cdot(1+\cot g(x+2))dx = -\cot g(x+2) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + C$	$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{1-f(x)^2}} = arcsen(f(x)) + C$	$\int \frac{1dx}{x \cdot \sqrt{1-\ln^2(x)}} = arcsen(\ln(x)) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + C$	$\int \frac{f'(x)dx}{1+f(x)^2} = arctg(f(x)) + C$	$\int \frac{2dx}{1+(2x)^2} = arctg(2x) + C$

4. Método de Integración

4.1. Obtención de integrales inmediatas

El método consiste en desarrollar las funciones, introducir factores, o manipular las funciones aplicando las dos propiedades de las integrales vistos en el apartado 2 para obtener una integral inmediata fácilmente calculable:

Veamos algunos ejemplos:

(1) $\int (7+6x^2+5x^3)^2\,dx = \int (25x^6+60x^5+36x^4+70x^3+84x^2+49)dx =$

$= \frac{25}{7}x^7 + 10x^6 + \frac{36}{5}x^5 + \frac{35}{2}x^4 + 28x^3 + 49x + C$

(2) $\int sen(7x)dx = \frac{1}{7}\cdot\int 7\cdot sen(7x)dx = -\frac{1}{7}\cos(7x) + C$

(3) $\int \frac{6x^2-3}{4x^3-6x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{12x^2-6}{4x^3-6x}dx = \frac{\ln(4x^3-6x)}{2} + C$

(4) $\int 4\cdot\sqrt[3]{5x^2}\,dx = 4\int \sqrt[3]{5}\cdot(x)^{2/3}\,dx = 4\cdot\sqrt[3]{5}\,\frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} = 4\cdot\sqrt[3]{5}\,\frac{x^{5/3}}{5/3} = \frac{12}{5}\cdot\sqrt[3]{5\cdot x^5} + C$

(5) $\int \frac{1+tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\cdot\int \frac{1+tg^2\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}dx = 2\cdot tg(\sqrt{x}) + C$

(6) $\int tg(x) = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)} = -\int \frac{-sen(x)}{\cos(x)} = -\ln(\cos(x) + C$

(7) $\int (x^2+1)sen(x^3+3x)dx = \frac{1}{3}\int (3x^2+3)sen(x^3+3x)dx = -\frac{1}{3}\cdot\cos(x^3+3x) + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3(1-\frac{5}{3}x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\frac{5}{3}x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\int \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}arcsen(\sqrt{\frac{5}{3}}x) + C = \frac{\sqrt{5}}{5}arcsen(\sqrt{\frac{5}{3}}x) + C$

$$(9)\int\frac{dx}{2+3x^2}=\int\frac{dx}{2(1+\frac{3}{2}x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}\int\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}dx}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}arctg(\sqrt{\tfrac{3}{2}}x)+C$$

$$(10)\ \int\frac{dx}{(x-3)^2}=\int(x-3)^{-2}dx=-(x-3)^{-1}=\frac{-1}{(x-3)}+C$$

4.2 Cambio de Variable

El método de cambio variable consiste en sustituir la variable x por una función g(t) (x=g(t)). De esta forma dx=g´(t)dt. Al realizar esta sustitución la función solo debe depender de t, y el objetivo es que la función obtenida sea más sencilla que la original. Una vez realizada la integral en t, se deshace el cambio de variable $t=g^{-1}(x)$.

En la práctica el cambio se utiliza cuando en la integral tenemos una función composición de f(x), H(f(x)) y la derivada f'(x) (o una función proporcional a ésta) dividiendo. De esta forma con el cambio f(x)=t, dx=dt/f'(x) tendremos la integral de H(t) que debería de ser más sencilla que la integral original si queremos que este método sea útil.

Este método nos permite resolver integrales semejantes a las calculadas en el apartado anterior, pero de forma más sistemática.

Veamos algunos ***ejemplos***:

$$(11)\ \int\frac{1+tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+tg(t^2)}{t}\cdot 2t\cdot dt=2\cdot\int\left(1+tg^2(t)\right)dt=2\cdot tg(t)+C=2\cdot tg(\sqrt{x})+C$$

$$\boxed{\sqrt{x}=t\ \rightarrow\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\ \rightarrow\ dx=2\sqrt{x}dt=2tdt}$$

$$(12)\int(x^2+1)\,sen(x^3+3x)\cdot dx=\int(x^2+1)sen(t)\cdot\frac{dt}{3x^2+3}=\frac{1}{3}\int sen(t)\cdot dt=$$

$$=-\cos(t)+C=-\frac{1}{3}\cos(x^3+3x)+C$$

$$\boxed{x^3+3x=t\ \rightarrow\ (3x^2+3)dx=dt\ \rightarrow\ dx=\frac{dt}{3x^2+3}}$$

$$(13)\int\frac{dx}{2+3x^2}=\int\frac{dx}{2(1+\frac{3}{2}x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{\frac{dt}{\sqrt{3/2}}}{1+(t)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot arctg(t)+C=\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot arctg(\sqrt{\tfrac{3}{2}}x)+C$$

$$\boxed{\sqrt{\tfrac{3}{2}}x=t\ \rightarrow\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot dx=dt\ \rightarrow\ dx=\frac{dt}{\sqrt{3/2}}}$$

(14) $\int \frac{3dx}{x\ln(x)} = \int \frac{3\cdot xdt}{x\cdot t} = \int \frac{3dt}{t} = 3\ln(t) + C = 3\ln(\ln(x)) + C$

ln(x)=t → $\frac{dx}{x} = dt$ → dx=xdt

4.3 Integral por Partes

El método de integral por partes se basa en la utilización de la siguiente igualdad:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Nota: regla nemotécnica *"Un Día Vi Una Vaca Vestida De Uniforme"*

En la práctica se utiliza cuando en una integral $\int g(x)\cdot f(x)dx = \int u\cdot dv$, donde la función f(x)dx=dv y g(x)=u se cumple:

- **a.** f(x) es fácil de integral para obtener así v = $\int f(x)dx = F(x)$
- **b.** Al derivar g(x), obtenemos du=g'(x)dx cumpliéndose que la integral $\int v\cdot du =$ $\int F(x)\cdot g'(x)dx$ es más sencilla que la original.

Mediante este método se calculan los siguientes 4 tipos de integrales:

Tipo 1: $\int P(x)\cdot e^{ax}dx$, llamando u=P(x)=polinomio y dv=e^{ax}dx se cumple los requisitos:

a. La integral $v = \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$ es inmediata

b. du=P'(x) baja un grado el polinomio, con lo que $\int P'(x)\cdot e^{ax}dx$ es más sencilla de calcular.

Deberemos realizar la integral por partes tantas veces como el grado de P(x) hasta que la última integral a realizar sea $\int v\cdot du = \int ke^{ax}dx$ que también es inmediata

Ejemplo:

(15) $\int (x^2 + 3x)\cdot e^{-2x}dx =$

u=x^2+3x → du=(2x+3)dx
dv=e^{-2x}dx → v=$-\frac{e^{-2x}}{2}$

$= -\frac{e^{-2x}}{2}\cdot(x^2+3x) + \frac{1}{2}\int (2x+3)e^{-2x}dx =$

u=2x+3 → du=2dx
dv= e^{-2x}dx → v=$-\frac{e^{-2x}}{2}$

$=-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+3x)+\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}(2x+3)+\int e^{-2x}dx\right)=\ -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+3x)\ -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+3)-\frac{e^{-2x}}{4}\ =$

$=-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+4x+2)+C$

(16) $\int (x^2-4)\cdot e^{3x}dx=\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x-34)$ +C (Hacer por el alumno)

<u>Tipo 2:</u> $\int P(x)\cdot sen(ax)dx\ \ o\ \ \int P(x)\cdot \cos(ax)dx$, llamando u=P(x) y dv=sen(ax)·dx se cumple los requisitos:

a. La integral $v=\int sen(ax)dx=-\frac{\cos(ax)}{a}$ o $v=\int \cos(ax)dx=\frac{sen(ax)}{a}$ es inmediata

b. du=P'(x)dx baja un grado el polinomio, con lo que $\int P'(x)\cdot\frac{sen(ax)}{a}dx$ o $\int P'(x)\cdot\frac{\cos(ax)}{a}dx$ es más sencilla de calcular que la anterior.

Deberemos realizar la integral por partes tantas veces como el grado de P(x) hasta que la última integral a realizar sea $\int v\cdot du=\int k\cdot sen(ax)dx$ o $\int k\cdot\cos(ax)dx$ que también es inmediata.

Ejemplo:

(17) $\int 2x\cdot sen(3x)dx=$

u=2x → du=2dx
dv=sen(3x) → v=$-\frac{\cos(3x)}{3}$

$=\ -\frac{2}{3}x\cdot\cos(3x)+\int\frac{2}{3}\cos(3x)dx=-\frac{2}{3}x\cdot\cos(3x)+\frac{2}{9}sen(3x)+C$

(18) $\int (x^2+4x)\cdot\cos(4x)dx=\cos(4x)\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{x^2}{4}+x-\frac{1}{32}\right)sen(4x)$ (hacer por alumno)

<u>Tipo 3:</u> $\int e^{ax}\cdot sen(bx)dx\ \ o\ \ \int e^{ax}\cdot\cos(bx)$, podemos llamar u=$e^{ax}$ y dv=sen(bx). En este caso podemos llamar u y dv al revés. Se tiene que hacer dos veces la integración por partes, de forma que volvemos a obtener la integral inicial. Despejando la integral obtenemos el resultado de la misma. Se llama así vulgarmente "la pescadilla que se muerde la cola".

(19) I=$\int e^{-x}\cdot sen(2x)dx=$

u=e^{-x} → du=$-e^{-x}$dx
dv=sen(2x) → v=$-\frac{\cos(2x)}{2}$

$$= -\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)e^{-x}dx =$$

u=e^{-x}	→	du=-e^{-x}dx
dv=cos(2x)	→	v=$\frac{sen(2x)}{2}$

$$= -\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\left(\frac{sen(2x)e^{-x}}{2} + \int \frac{1}{2}e^{-x}sen(2x)\right) =$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\int e^{-x}sen(2x)}_{I}$$

$$I = -\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4} - \frac{1}{4}I \rightarrow \frac{5}{4}I = -\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4} \rightarrow$$

$$I = \int e^{-x}\cdot sen(2x)dx = \frac{4}{5}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}e^{-x} - \frac{sen(2x)e^{-x}}{4}\right) = -e^{-x}\left(\frac{2\cos(2x)}{5} + \frac{sen(2x)}{5}\right) + C$$

(20) $I = \int e^{x}\cdot\cos(3x)dx = \frac{e^{x}}{10}\left(\cos(3x) + 3sen(3x)\right)$ (hacer por el alumno)

Tipo 4: $\int P(x)\cdot\ln(ax)dx$, llamando dv=P(x) y u=ln(ax) se cumple los requisitos:

a. La integral $v = \int P(x)dx$ es inmediata (integral de un polinomio)

b. du=$\frac{1}{x}dx$ con lo que eliminamos el logaritmo de la integral y tendremos que calcular la integrar de otro polinomio.

Ejemplo:

(21) $\int (-x^{7} + 5x^{3} - 2x)\ln(3x) =$

u=ln(3x)	→	du=$\frac{1}{x}dx$
dv=$(-x^{7} + 5x^{3} - 2x)$	→	v=$(-\frac{x^{8}}{8} + \frac{5x^{4}}{4} - x^{2})$

$$= (-\frac{x^{8}}{8} + \frac{5x^{4}}{4} - x^{2})\ln(3x) - \int (-\frac{x^{8}}{8} + \frac{5x^{4}}{4} - x^{2})\frac{1}{x}dx = (-\frac{x^{8}}{8} + \frac{5x^{4}}{4} - x^{2})\ln(3x) -$$

$$-\int (-\frac{x^{7}}{8} + \frac{5x^{3}}{4} - x)dx = (-\frac{x^{8}}{8} + \frac{5x^{4}}{4} - x^{2})\ln(3x) + \frac{x^{8}}{64} - \frac{5x^{4}}{16} + \frac{x^{2}}{2} + c$$

(22) $\int (2x^{3} + 5x^{2} - 2)\ln(x) = \ln(x)\left(\frac{x^{4}}{2} + \frac{5x^{3}}{3} - 2x\right) + \frac{9x^{4} + 40x^{3} - 144x}{72} + C$ (hacer por el alumno)

4.4 Integrales racionales

El método de integrales racionales consiste en descomponer una fracción polinómica en fracciones simples cuyas integrales son o logaritmos neperianos o arcotangentes. Las integrales que deseamos resolver son del tipo:

I=$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Anexo: vamos a resolver primero las integrales que aparecerán en las integrales racionales:

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln(x-a)$

Ejemplo: $\int \frac{5}{x-2} dx = 5 \cdot \ln(x-2)$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \int A \cdot (x-a)^{-n} dx = \frac{A \cdot (x-a)^{-(n-1)}}{-n+1} = \frac{A}{(-n+1) \cdot (x-a)^{n-1}}$

Ejemplo: $\int \frac{3}{(x-4)^3} dx = \int 3 \cdot (x-4)^{-3} = \frac{3(x-4)^{-2}}{-2} = -\frac{3}{2(x-4)^2}$

3) $\int \frac{mx+n}{x^2+bx+c} dx =$ (con x^2+bx+c sin raíces reales)= arcotangente + logarimo, veamos con un ejemplo

Ejemplo:

$$I = \int \frac{2x+3}{x^2+4x+8} dx = (buscamos\, la\ derivada\ en\ el\, numerador) = \int \frac{2x+4-1}{x^2+4x+8} =$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} dx - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+4x+8} dx}_{I_2} = \ln(x^2+4x+8) + I_2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{\frac{1}{2} dx}{1+\left(\frac{x+2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

$$I = \ln(x^2+4x+8) + \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + c$$

<u>Caso 1</u>: grado(P(x))≥grado(Q(x)) → hacemos la división de forma que tendremos que integral el cociente (que es un polinomio) y obtenemos otra función racional pero donde ahora grado del numerador menor que el del denominador y por tanto estamos en el caso 2.

Ejemplo:

(23) I=$\int \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+3x^2+2x}dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3+\ 3x^2 \qquad -4 & x^3+3x^2+2x \\ \hline -x^3-3x^2-2x \qquad & 1 \\ \underbrace{-2x-4} & \end{array} \rightarrow$$

$$\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1\cdot(x^3+3x^2+2x)-2x-4}{x^3+3x^2+2x}=1-\frac{2x+4}{x^3+3x^2+2x}$$

I=$\int 1dx+\int \frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx$ =x+$\int \frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx$

(24) I=$\int \frac{x^4+3x^2-2x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

$$\begin{array}{r|l} x^4 \qquad +3x^2\ -2x\ +5 & x^3-x^2-x+1 \\ \hline -x^4+x^3+x^2\ -x \qquad & x+1 \\ x^3+\ 4x^2-3x+5 & \\ -x^3+\ x^2+\ x\ \ -1 & \\ \underbrace{5x^2-2x+4} & \end{array}$$

$$\frac{x^4+3x^2-2x+5}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{5x^2-2x+4}{x^3-x^2-x+1}$$

I=$\int (x+1)dx+\int \frac{5x^2-2x+4}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{x^2}{2}+x+\int \frac{5x^2-2x+4}{x^3-x^2-x+1}dx$

<u>Caso 2</u>: grado(P(x))<grado(Q(x)). Distinguimos entre 3 casos:

a) *El denominador se puede descomponer por producto de factores simples distintos: Q(x)=(x-a_1)·(x-a_2)·…·(x-a_n)*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)...(x-a_n)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_n}{x-a_n}\right)dx$$

***Ejemplo*:** continuamos las integral (23) del ejemplo anterior:

(25) I=$\int \frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx$

$\frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}=\frac{-2x-4}{x(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+1)}$. Calculo de A, B, C:

$\frac{-2x-4}{x(x+2)(x+1)}=\frac{A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x+1)}$ →

$A(x+2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+2)$=-2x-4

- si x=0: 2A=-4 → A=-2
- si x=-2: 2B=0 → B=0
- si x=-1: -C=-2 → C=2

I=$\int \frac{-2x-4}{x^3+3x^2+2x}dx=-2\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x+1}=-2\ln(x)+2\ln(x+1)+C=2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+C$

(26) I=$\int\frac{x+3}{x^2-4x+3}dx=3\cdot\ln(x-3)-2\ln(x-1)+C$ (hacer por el alumno)

b) *El denominador se puede descomponer por producto de factores, alguno de ellos no simple: $Q(x)=(x-a_1)^{n1}\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1}\cdot(x-a_2)\ldots(x-a_n)}dx=\int\left(\frac{A_1^1}{x-a_1}+\frac{A_1^2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_1^{n_1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}\right)dx$$

Ejemplo:

(27) $I=\int\frac{3x^2-5x}{x^3+x^2-5x+3}dx$

$\frac{3x^2-5x}{x^3+x^2-5x+3}=\frac{3x^2-5x}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}$

$\frac{3x^2-5x}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)}$

$3x^2-5x=A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2$

si x=1: 4B=-2 → B=-1/2

si x=-3: 16C=42 → C=21/8

si x=0: 0=-3A+3B+C → $A=\frac{C+3B}{3}=\frac{\frac{21}{8}-\frac{3}{2}}{3}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

I=$\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{21}{8}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{3}{8}\ln(x-1)+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{21}{8}\ln(x+3)+C$

(28) I=$\int\frac{3x-5}{x(x+2)^2}dx=\frac{5}{4}\ln(x+2)-\frac{5}{4}\ln(x)-\frac{11}{2(x+2)}+C$ (hacer por el alumno)

c) *El denominador se puede descomponer por producto de factores, alguno de ellos es un factor de segundo grado: Q(x)=(x-a_1)·(x-a_2)·…·(x^2+bx+c)*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{P(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)...(x^2+bx+c)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_2)}+...+\frac{Cx+D}{x^2+bx+c}\right)dx$$

Ejemplo:

(29) $\int\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)}\right)dx$

$\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}=\left(\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+5)}\right)$ → $\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}=\left(\frac{A(x^2+2x+5)+x(Cx+D)}{x(x^2+2x+5)}\right)$

3x-5=A(x^2+2x+5)+x(Cx+D)

- si x=0: 5A=-5 → A=-1
- si x=1: -2=8A+C+D → 6=C+D
- si x=-1: -8=4A+C-D →-4=C-D

Resolviendo el sistema C=1, D=5

I=$\int\frac{3x-5}{x(x^2+2x+5)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{x+5}{(x^2+2x+5)}\right)dx=-\ln(x)+\int\frac{x+5}{(x^2+2x+5)}dx$

$$\int\frac{x+5}{(x^2+2x+5)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+10}{(x^2+2x+5)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)}dx+\frac{1}{2}\int\frac{8}{(x^2+2x+5)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\int\frac{4}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+2\int\frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+2arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

I=$-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+2arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)$+C

(30) $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+x+3)}dx = \frac{4}{5}\ln(x-1) - \frac{2}{5}\ln(x^2+x+3) - \frac{2\sqrt{11}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)}{55} + C$

$\displaystyle\frac{x+3}{(x-1)(x^2+x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3}$ → x+3=A(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-1)

x=1 → 4=5A   A=4/5

x=0 → 3=3A-C   C=-3/5

x=2 → 5=9A+2B+C   B=-4/5

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+x+3)}dx = \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\underbrace{\int\frac{4x+3}{x^2+x+3}dx}_{I_1} = \frac{4}{5}\ln(x-1) - \frac{1}{5}I_1$$

$$I_1 = \int\frac{4x+3}{x^2+x+3}dx = 2\int\frac{2x+3/2}{x^2+x+3}dx = 2\int\frac{2x+1-1+3/2}{x^2+x+3}dx = 2\int\frac{2x+1}{x^2+x+3}dx + 2\int\frac{1/2}{x^2+x+3}dx$$

$$= 2\ln(x^2+x+3) + \underbrace{\int\frac{1}{x^2+x+3}dx}_{I_2}$$

$$I_2 = \int\frac{1}{x^2+x+3}dx = \int\frac{1}{(x+1/2)^2+11/4}dx = 4/11\int\frac{1}{4/11(x+1/2)^2+1}dx = 4/11\int\frac{1}{\left(2/\sqrt{11}(x+1/2)\right)^2+1}dx$$

$2/\sqrt{11}(x+1/2)$=t → $\displaystyle\frac{2dx}{\sqrt{11}} = dt$ → $\displaystyle dx = \frac{\sqrt{11}dt}{2}$

I$_2$=$\displaystyle 4/11\int\frac{\sqrt{11}/2}{t^2+1}dt = \frac{2\sqrt{11}}{11}ar\cot g(t) = \frac{2\sqrt{11}}{11}ar\cot g\left(\frac{2}{\sqrt{11}}(x+1/2)\right)$

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2+x+3)}dx = \frac{4}{5}\ln(x-1) - \frac{2}{5}\ln(x^2+x+3) - \frac{2\sqrt{11}}{55}ar\cot g\left(\frac{2}{\sqrt{11}}(x+1/2)\right) + C$$

4.4 Integrales trigonométricas.

Las integrales trigonométricas no están en la programación de la PAU de la mayoría de las comunidades, si bien se da en muchos institutos y en las carreras con asignaturas de matemáticas.

Podemos distinguir varios tipos:

Tipo 1: impar en el seno o coseno

Son integrales donde sólo aparecen senos y cosenos multiplicando o dividiendo, donde se cumple que la potencia del seno, del coseno o de los dos (ambos siempre con mismo argumento) sea impar. Se resuelve con el siguiente cambio de variable:

a) Si seno impar y coseno par → cos(x)=t
b) Si coseno impar y seno par → sen(x)=t
c) Si ambos impares → sen(x)=t ó cos(x)=t

Veamos algunos ejemplos:

(31) $\int sen^4(x)\cdot\cos^3(x)\cdot dx =$

$$\boxed{\text{sen(x)=t} \rightarrow \text{cos(x)·dx=dt} \rightarrow \text{dx=}\frac{dt}{\cos(x)}}$$

$$= \int t^4\cdot\cos^3(x)\cdot\frac{dt}{\cos(x)} = \int t^4\cdot\cos^2(x)dt = \int t^4(1-sen^2(x))dt = \int \left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= \frac{sen^5(x)}{5} - \frac{sen^7(x)}{7} + C$$

(32) $\int \frac{sen^5(x)}{\cos^2(x)}dx =$

$$\boxed{\text{cos(x)=t} \rightarrow \text{-sen(x)·dx=dt} \rightarrow \text{dx=}-\frac{dt}{sen(x)}}$$

$$= -\int \frac{sen^5(x)}{t^2}\cdot\frac{dt}{sen(x)} = -\int \frac{sen^4(x)}{t^2}dt = -\int \frac{(1-\cos^2(x))^2}{t^2}dt = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^2}dt = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^2} =$$

$$= -\int \left(t^2 - 2 + t^{-2}\right)dt = -\frac{t^3}{3} + 2t + \frac{1}{t} = -\frac{\cos^3(x)}{3} + 2\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)}$$

Tipo 2: par en el seno o coseno

Son integrales con productos y cocientes de senos y cosenos con exponentes pares, para resolver estas integrales se utiliza la relación del coseno del ángulo doble:

cos(2x)=cos^2(x)-sen^2(x) :

- cos(2x)=1-2·sen^2(x) → sen^2(x)=$\frac{1-\cos(2x)}{2}$
- cos(2x)=2·cos^2(x)-1 → cos^2(x)=$\frac{1+\cos(2x)}{2}$

Veamos algunos ejemplos:

(33) $\int sen^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{sen(2x)}{2}\right)$

(34) $\int sen^4(x)dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left((1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)\right)dx =$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x) = \frac{1}{4}(x) - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{8}x - \frac{sen(4x)}{32} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen(2x) - \frac{sen(4x)}{32}$$

Tipo 3: cambio general.

Este cambio se puede aplicar en cualquier integral trigonométrica, transformando esta en una integral racional, si bien sólo se recomienda utilizar cuando no se pueden utilizar las reglas anteriores (generalmente cuando hay sumas o restas).

Se utiliza el siguiente cambio:

$$tg(x/2)=t \;\rightarrow\; \frac{1+tg^2(x/2)}{2}dx=dt \;\rightarrow\; dt=\frac{2}{1+t^2}$$

$$sen(x)=2sen(x/2)\cdot\cos(x/2)=\frac{2sen(x/2)\cdot\cos(x/2)}{sen^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{\dfrac{2sen(x/2)\cdot\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\dfrac{sen^2(x/2)+\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}=\frac{2tg(x/2)}{tg^2(x/2)+1}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x)=\cos^2(x/2)-sen^2(x/2)=\frac{\cos^2(x/2)-sen^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+sen^2(x/2)}=\frac{\dfrac{\cos^2(x/2)-sen^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\dfrac{\cos^2(x/2)+sen^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}=\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Conclusión:

$$\boxed{tg(x/2)=t \;\rightarrow\; dt=\frac{2}{1+t^2} \qquad sen(x)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Ejemplo:

(35) $$\int\frac{sen(x)+\cos(x)}{1-sen(x)}dx=\int\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2\cdot dt}{1+t^2}=2\cdot\int\frac{1+2t-t^2}{(1-2t+t^2)\cdot(1+t^2)}dt$$

Que es integral racional.

Problemas

Calcular las integrales

a) $\int (3x + \frac{1}{x^2})dx$

$$\int (3x + \frac{1}{x^2})dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$$

b) $\int (2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x})dx$

$$\int (2x^{3/4} - \frac{5}{x})dx = \frac{8}{7}x^{7/4} - 5\ln(x) + C$$

c) $\int \frac{(1+x)^2}{x}dx$

$$\int \frac{1+x^2+2x}{x}dx = \ln(x) + \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

d) $\int \frac{4x+8}{x^2+4x}dx$

$$\int \frac{4x+8}{x^2+4x}dx = 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x}dx = 2\ln(x^2+4x) + C$$

e) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x(3x^2+1)^{-1/2}}{1}dx = \frac{2}{3}(3x^2+1)^{1/2} = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1} + C$$

f) $\int sen^3 2x \cos(2x)dx$

$$\int sen^3 2x\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int sen^3(2x)\cdot 2\cos(2x)dx = \frac{1}{8}sen^4(2x) + C$$

g) $\int \frac{3^x}{1+9^x}dx$

$$\int \frac{3^x}{1+9^x}dx = \int \frac{3^x}{1+3^{2x}}dx = \int \frac{t}{1+t^2}\frac{dt}{t\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)}actg(t) = \frac{1}{\ln(3)}actg(3^x) + C$$

$$\boxed{3^x = t \rightarrow 3^x\ln(3)dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{3^x\ln(3)}}$$

h) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$$\boxed{t = e^{-x} \rightarrow dt = -e^{-x}dx \rightarrow dx = -\frac{dt}{t}}$$

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int \frac{t}{1+t}\left(-\frac{dt}{t}\right) = -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln(1+t) = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

i) $\int \frac{sen(3x)}{\sqrt[3]{1+3\cos(3x)}}dx$

$$\boxed{1+3\cos(3x)=t \rightarrow -9sen(3x)dx=dt \rightarrow dx = -\frac{dt}{9sen(3x)}}$$

$$\int \frac{sen(3x)}{\sqrt[3]{1+3\cos(3x)}}dx = \int \frac{sen(3x)}{\sqrt[3]{t}}\frac{-dt}{9sen(3x)} = -\frac{1}{9}\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}dt = -\frac{1}{9}\int t^{-1/3}dt = -\frac{1}{9}\frac{3}{2}t^{2/3} =$$

$$= -\frac{1}{6}t^{2/3} = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{(1+3\cos(3x))^2} + C$$

j) $\int arctg(x)dx = x\cdot arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\cdot arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\cdot arctg(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C$

$$\boxed{\begin{array}{l} u= arctg(x) \rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx \quad \rightarrow \quad v=x \end{array}}$$

k) $\int e^{-2x}(2x+1)^2 dx$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=(2x+1)^2 \quad \rightarrow \quad du=4(2x+1)=8x+4 \\ dv=e^{-2x}dx \quad \rightarrow \quad v=-\frac{e^{-2x}}{2} \end{array}}$$

$$\int e^{-2x}(2x+1)^2 dx = -\frac{1}{2}(2x+1)^2 e^{-2x} + \int (4x+2)e^{-2x}dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=(4x+2) \quad \rightarrow \quad du=4 \\ dv=e^{-2x}dx \quad \rightarrow \quad v=-\frac{e^{-2x}}{2} \end{array}}$$

$$\int (4x+2)e^{-2x}dx = (-2x-1)e^{-2x} + 2\int e^{-2x}dx = (-2x-1)e^{-2x} - e^{-2x} + C$$

$$\int e^{-2x}(2x+1)^2 dx = -\frac{1}{2}(2x+1)^2 e^{-2x} + (-2x-1)e^{-2x} - e^{-2x} + C = e^{-2x}(-2x^2 - 4x - \frac{5}{2}) + C$$

l) $\int e^{-x}\cos(x)dx = e^{-x}\left(\frac{sen(x)}{2}-\frac{\cos(x)}{2}\right)+C$

Por la "pescadilla"

m) $\int \frac{x}{x-2}dx$

$$\begin{array}{l|l} x & x-2 \\ \hline -x+2 & 1 \\ \hline \quad\underbrace{2} & \end{array}$$

$$\int \frac{x}{x-2}dx = \int\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx = x+2\ln(x-2)+C$$

n) $\int \frac{-x^2+6x-1}{(x-1)^2(x+1)}dx$

$\frac{-x^2+6x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$ → A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2=-x^2+6x-1

- x=1 → 2B=4 → B=2
- x=-1 → 4C=-8 →C=-2
- x=0 → -A+B+C=-1 → A=1

$$\int \frac{-x^2+6x-1}{(x-1)^2(x+1)}dx = \int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{2}{(x-1)^2}dx-\int\frac{2}{x+1}dx = \ln(x-1)-\frac{2}{(x-1)}-2\ln(x+1)+C$$

o) $\int \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}dx$

$$\begin{array}{l|l} x^4 \qquad\qquad\quad +2x-6 & x^2+x-2 \\ \hline -x^4-x^3+2x^2 & x^2-x+3 \\ \hline \quad -x^3+2x^2+2x-6 & \\ \quad\; x^3+x^2-2x & \\ \hline \qquad 3x^2 \qquad -6 & \\ \quad -3x^2-3x+6 & \\ \hline \qquad \underbrace{-3x} & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}dx = \int(x^2-x+3)dx-3\int\frac{x}{x^2+x-2}dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-3\int\frac{x}{x^2+x-2}dx$$

$$\frac{x}{x^2+x-2}=\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}$$ → A(x+2)+B(x-1)=x

- x=1 → A=1/3
- x=-2 → B=2/3

$$\int\frac{x}{x^2+x-2}dx=\int\frac{1/3}{(x-1)}dx+\int\frac{2/3}{(x+2)}dx=\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{2}{3}\ln(x+2)$$

$$I=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-3\left(\frac{1}{3}\ln(x-1)+\frac{2}{3}\ln(x+2)\right)+C=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\ln(x-1)-2\ln(x+2)+C$$

p)

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{5-(x-2)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{5}}}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1-t^2}}dt=arcsen(t)=$$

$$=arcsen\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$\frac{(x-2)^2}{5}=t^2$ → $t=\frac{(x-2)}{\sqrt{5}}$ → $dt=\frac{dx}{\sqrt{5}}$ → $dx=\sqrt{5}dt$

q) $\int\frac{\ln^5(x)}{x}dx=\frac{\ln^6(x)}{6}+C$

r) $\int\frac{\ln(\ln(x))}{x}dx$

ln(x)=t → $\frac{1}{x}dx=dt$ → dx=x·dt

$$\int\frac{\ln(\ln(x))}{x}dx=\int\frac{\ln(t)}{x}xdt=\int\ln(t)dt=t\cdot\ln(t)-\int dt=t\ln(t)-t=\ln(x)\cdot\ln(\ln(x))-\ln(x)+C$$

u=ln(t) → du=$\frac{1}{t}dt$

dv=dt → v=t

PAU

Junio 2004. Prueba A

C-1.- De todas las primitivas de la función *f(x)=2tg(x)·sec²(x)*, hállese la que pasa por el punto P(π/4,1)

$$F(x)=\int 2tg(x)\sec^2(x)dx=\int 2\frac{sen(x)}{\cos(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}dx=2\int\frac{sen(x)}{\cos^3(x)}dx=2\int-\frac{1}{t^3}dt=-2\int t^{-3}dt=\frac{-2}{-2}t^{-2}=$$

$$=\frac{1}{t^2}+C=\frac{1}{\cos^2(x)}+C$$

$$\boxed{\cos(x)=t\ \rightarrow -sen(x)dx=dt\ \rightarrow dx=\frac{dt}{-sen(x)}}$$

Veamos el valor de C para que pase por $P(\frac{\pi}{4},1)$.

F(π/4)=2+C=1 → C=-1→ $F(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}-1$

Otro método

$$F(x)=\int 2tg(x)\sec^2(x)dx=2\int t\cdot\sec^2(x)\cdot\cos^2(x)dt=2\int t=2\cdot\frac{t^2}{2}=t^2=tg^2(x)+C$$

$$\boxed{tg(x)=t\ \rightarrow\frac{1}{\cos^2(x)}dx=dt\ \rightarrow dx=\cos^2(x)dt}$$

Veamos el valor de C para que pase por $P(\frac{\pi}{4},1)$.

F(π/4)=1+C=1 → C=0 → F(x)= $tg^2(x)$

Nota: Las dos funciones son la misma, pues $1+\sec^2x=tg^2x$

Junio 2004. Prueba B

C-2.- Calcúlese $\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

$$\int\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{1/2}+C=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C$$

Junio 2008. Prueba-A

PR-2- b) Calcular $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \int \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\right)dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(x) = u \rightarrow \frac{1}{x}dx = du \\ \frac{1}{x^2}dx = dv \rightarrow v = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x} \end{array}}$$

Septiembre 2004. Prueba-B

PR-2.- b) Dada la función *f*:[1,e]→R definida por *f(x)=1/x+ln(x)*. Calcúlese una función primitiva de *f(x)* que pase por el punto P(e, 2) .

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)dx = \int \frac{dx}{x} + \int \ln(x)dx = \ln(x) + I_2 = \ln(x) + x\ln(x) - x + C$$

$$I_2 = \int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{dx}{x} = x\ln(x) - x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{array}}$$

Calculemos C : F(e)=1+e-e+C=2 → C=1. F(x)= $\ln(x) + x\ln(x) - x + 1$

Septiembre 2005. Prueba-B

C-1.- Calcúlese $\int \frac{1}{x^2+4x+13}dx$.

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}dx$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{9}\int \frac{3dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}arctg(t) + C = \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$$

$$\boxed{\frac{x+2}{3} = t \rightarrow \frac{dx}{3} = dt \rightarrow dx = 3dt}$$

Septiembre 2008 Prueba-A

C-4. Calcular $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln(x) - \ln(x+1) + C = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \\ 1 = A(x+1) + Bx \\ x = -1 \to 1 = -B \\ x = 0 \to A = 1 \end{array}}$$

Septiembre 2008 Prueba-B

C-4. Calcular $\int \frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}} dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsen\ (t) + C = arcsen\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

$$\boxed{\frac{x-1}{3} = t \to dx = 3dt}$$