

8

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Páxina 186

Descrición dunha gráfica

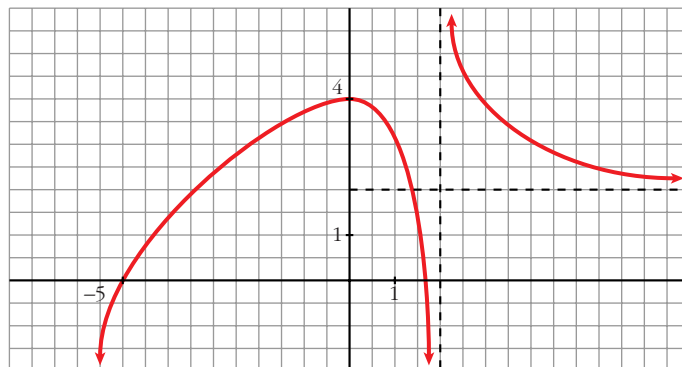
1. ■ Copia no teu caderno os datos encadrados en vermello. A partir deles, e sen mirar a gráfica que aparece ó principio, representa esta función sobre uns eixos coordenados debuxados en papel cuadrículado.

(La solución está en el propio ejercicio).

Páxina 187

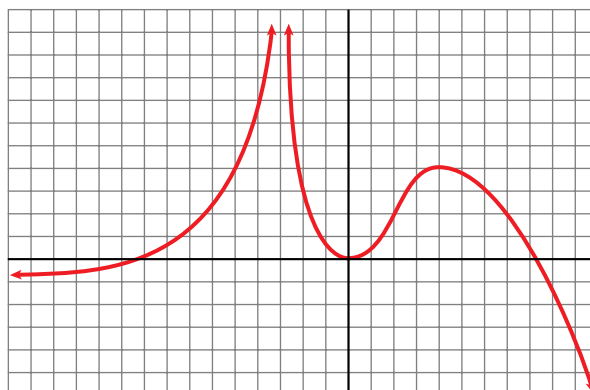
2. Traza uns eixos coordenados sobre papel cuadrículado e representa unha curva, o máis sinxela posible, que cumpra as seguintes condicións:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
- $f(-5) = 0$; $f(1,75) = 0$
- f é derivable en todo \mathbb{R} , salvo en $x = 2$.



3. Describe, coa menor cantidade de datos e de forma similar á dos apartados anteriores, a seguinte función:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0$; $f(0) = 0$; $f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4$; $f'(4) = 0$



4. Representa sobre uns eixos en papel cuadrículado unha gráfica inventada por ti. Descríbea en papel á parte. Dálle a descrición á túa compañeira ou compañeiro para que a represente.

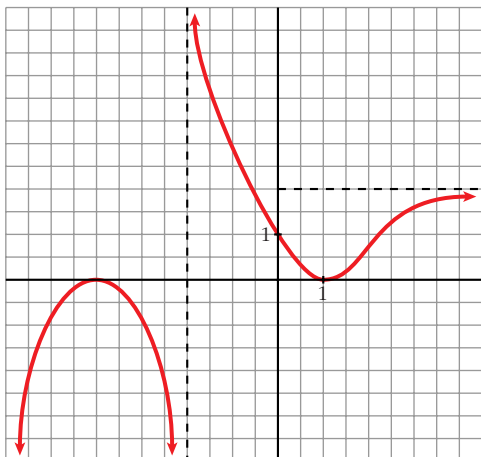
Representa ti a súa.

Compare cada representación coa curva orixinal. Discutide as diferencias que observedes.

¿Hai algún erro na representación?

¿Hai, acaso, erro na descrición?

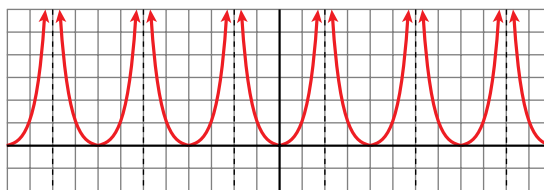
¿É todo correcto?



Por exemplo:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0$; $f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0$; $f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

5. Observa esta gráfica:



• Calcula a ordenada para as seguintes abscisas:

$$x = 0, x = 1, x = 3, x = -7, x = 12,$$

$$x = -400, x = 13, x = -199$$

- ¿En que puntos non está definida esta función?
- ¿Que tramos da función che abondaría coñecer para facerte unha idea exacta de cómo é a gráfica?
- ¿Suxíreche esta curva algún tipo de simetría ou periodicidade?

$$f(0) = 0; f(1) = 1; f(3) = 1; f(-7) = 1$$

$$f(12) = 0; f(-400) = 0; f(13) = 1; f(-199) = 1$$

(En general, $f(4k) = 0$; $f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

- La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de periodo 4.
- Simetría \rightarrow Es una función par (simétrica respecto al eje Y).
- Periodicidad \rightarrow Es periódica de periodo 4.

Páxina 188

1. Calcula o dominio destas funcións:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $D = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

2. Calcula o dominio de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $y = \ln(x^2 + 1)$

c) $y = \ln(x^2 - 1)$

d) $y = \frac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

- b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$
 c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

Página 189

3. Calcula as posibles simetrías e periodicidades, di ónde son continuas e ónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
 d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ e) $y = \text{sen } x + 1/2 (\text{sen } 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y .

No es periódica.

Es continua y derivable en \mathbb{R} .

b) $\text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al centro de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

$f(-x) = \text{sen } (-x) + \frac{1}{2} (\text{sen } (-2x)) = -\text{sen } x - \frac{1}{2} (\text{sen } (2x)) = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de periodo 2π .

Es continua y derivable en \mathbb{R} .

Página 190

4. Calcula as ramas infinitas de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

e) $y = \ln(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

- $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

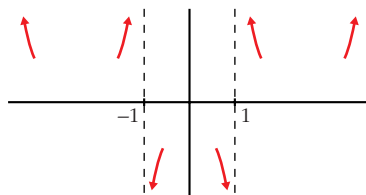
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Ramas parabólicas

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Asíntotas verticales: $x = -1; x = 1$



c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2} = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4} = x + 4 + \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4}$

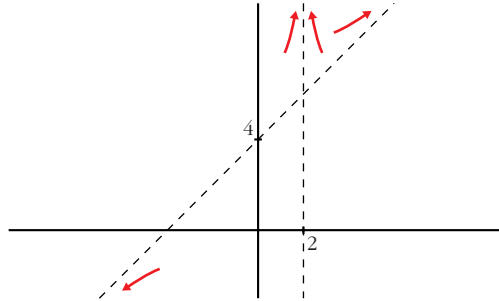
- $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{2\}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

$$f(x) - (x + 4) = \frac{12x - 16}{x^2 - 4x + 4} \rightarrow \begin{cases} f(x) - (x + 4) > 0 & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ f(x) - (x + 4) < 0 & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

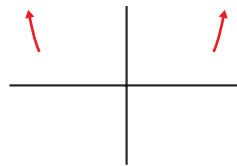
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$



d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Ramas parabólicas

e) $y = \ln(x^2 + 1)$

$$\bullet \text{Dominio} = \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

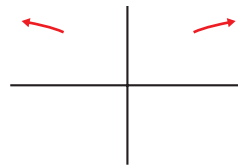
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

Ramas parabólicas

$$\bullet \text{No hay asíntotas verticales.}$$



f) $y = 2^{x-1} > 0$ para todo x .

$$\bullet \text{Dominio} = \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

- No hay asíntotas verticales.



Página 191

5. Calcula os puntos singulares e os puntos de inflexión de:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b) $y = \ln(x^2 + 1)$

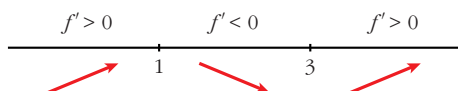
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. Dominio = \mathbb{R}

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

- $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:

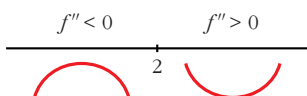


Hay un máximo en (1, 9) y un mínimo en (3, 5).

- $f''(x) = 6x - 12$

- $f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en (2, 7).

b) $y = \ln(x^2 + 1)$. Dominio = \mathbb{R}

- $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

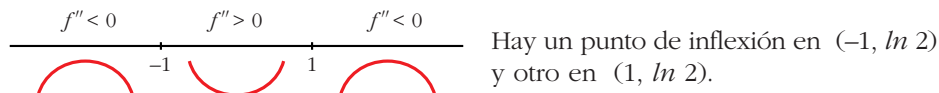
- $f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array} \right\} \text{ Hay un mínimo en } (0, 0)$$

- $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



6. Calcula os puntos singulares de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

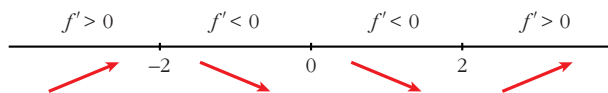
d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. Dominio = \mathbb{R}

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



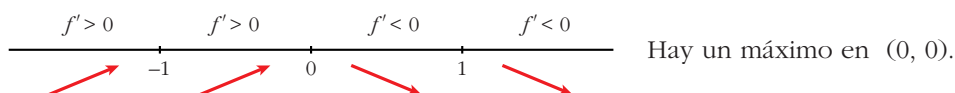
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



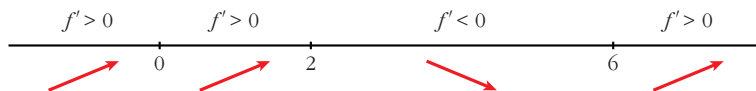
c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $(6, \frac{27}{2})$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Dominio = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \notin \text{Dominio.}$$

No hay puntos singulares.

Página 193

1. Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$ c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

$$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$ Punto $(0, 7)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm \sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{7}, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(\sqrt{7}, 0)$

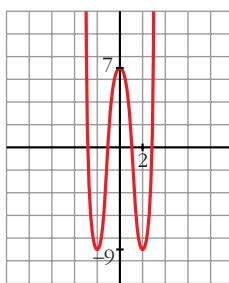
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

• **Gráfica:**



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

• **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2, -64)$; $(-3, -189)$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \end{cases} \begin{cases} x \approx 2,86 \\ x \approx -4,19 \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2,86; 0)$; $(-4,19; 0)$

• **Puntos de inflexión:**

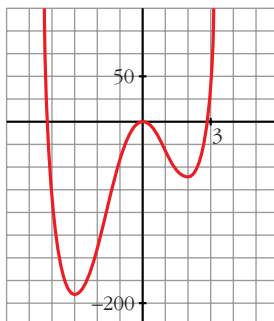
$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1,12 \\ x \approx -1,79 \end{cases}$$

Puntos: (1,12; -34,82) y (-1,79; -107,22)

• **Gráfica:**



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

• **Simetrías:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{matrix} \right\} \text{Puntos } (1, 7); (-1, -9); (3, -9)$$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

— Con el eje X $\rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \end{array} \right. \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x \approx 3,65 \\ x \approx -1,65 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (-1,65; 0)

- **Puntos de inflexión:**

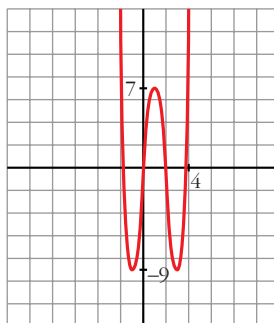
$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{cases} x \approx 2,15 \\ x \approx -0,15 \end{cases}$$

Puntos: (2,15; -1,83) y (-0,15; -1,74)

- **Gráfica:**



2. Representa as següentes funcións:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$ b) $y = x^3 - 3x$ c) $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos: (0, -16); (1, -17)

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -16 \rightarrow$ Punto (0, -16)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \rightarrow \text{tiene una sola raíz, que está entre } -2 \text{ y } -1; \\ \text{pues, si } g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8, \quad g(-2) = -16 < 0 \text{ y } g(-1) = 3 > 0. \end{array} \right.$$

Puntos $(2, 0)$ y $(k, 0)$, con k entre -2 y -1 .

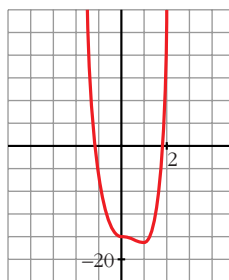
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x - 2) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{-448}{27}\right)$

• **Gráfica:**



b) $y = x^3 - 3x$

• **Simetrías:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0$

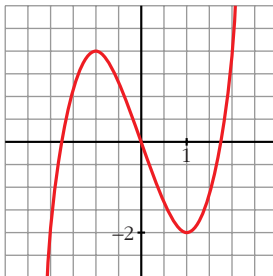
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{Puntos: } (0, 0); (-\sqrt{3}, 0); (\sqrt{3}, 0)$$

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$$

- **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(-2, -4)$; $(2, -4)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{2}, 0)$

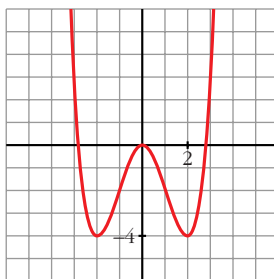
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right); \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

• **Gráfica:**



Página 195

1. **Representa:**

a) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$

b) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

• **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y = -x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por debajo)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

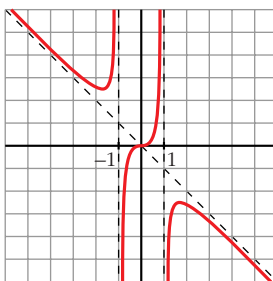
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$; $(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

• **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{-x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen.

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

• **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \rightarrow y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por debajo)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^2} > 0 \text{ para todo } x \text{ del dominio.}$$

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

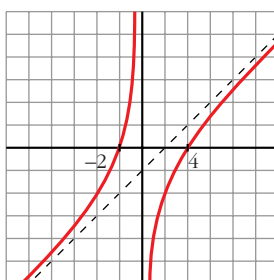
• **Cortes con los ejes:**

$$\text{— Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje Y , pues no está definida en $x = 0$.

• **Gráfica:**



2. Representa:

a) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

b) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 2.$$

• **Asíntota horizontal:**

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \frac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto} \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

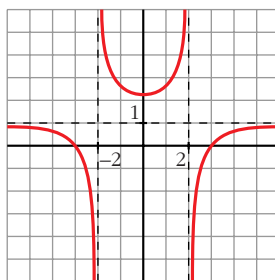
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow \text{Punto} \left(0, \frac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. Dominio = \mathbb{R}

- **Simetrías:**

$$f(-x) = \frac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - x < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - x > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por encima)}$$

- **Puntos singulares:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

No hay puntos singulares.

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0)$

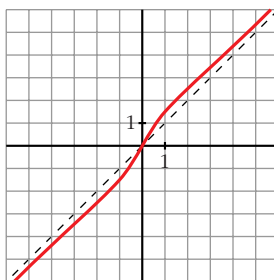
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2 + 1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right. \text{ Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right); \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

• **Gráfica:**



Página 197

1. Representa:

a) $y = e^{1-x^2}$

b) $y = \frac{e^x}{x^2}$

c) $y = \ln(x^2 + 4)$

a) $y = e^{1-x^2}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Simetría:**

$f(-x) = e^{1-x^2} = f(x)$. Es una función par: es simétrica respecto al eje Y .

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal. Además, como $e^{1-x^2} > 0$ para todo x , la curva se sitúa por encima de la asíntota.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, e)$$

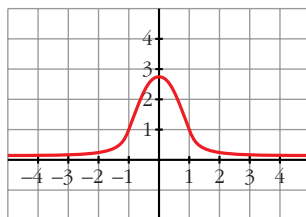
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -2e^{1-x^2} + (-2x) \cdot (-2x)e^{1-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{1-x^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,7 \rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{1/2} \approx 1,65$$

Puntos de inflexión: $(-0,7; 1,65)$, $(0,7; 1,65)$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{e^x}{x^2}$

• **Dominio:** $D = \mathbb{R} - \{0\}$

• **No es simétrica.**

• **Asíntotas verticales:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Además $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

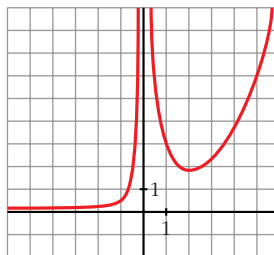
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto } \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

• **Gráfica:**



c) $y = \ln(x^2 + 4)$

• **Dominio:**

Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x , $D = \mathbb{R}$.

• **Simetrías:**

$f(-x) = \ln(x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

• **No tiene asíntotas verticales.**

• **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

Tiene ramas parabólicas.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

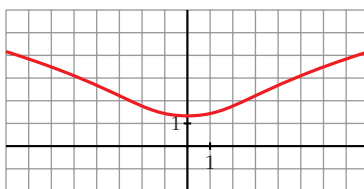
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, \ln 4)$$

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (-2, \ln 8) \text{ y } (2, \ln 8)$$

• **Gráfica:**



2. Representa:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

b) $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:**

$$x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

- **Simetrías:**

$$f(-x) = \ln(x^2 - 1) = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0. \text{ No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en } x = 0.$$

- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

No tiene puntos de inflexión.

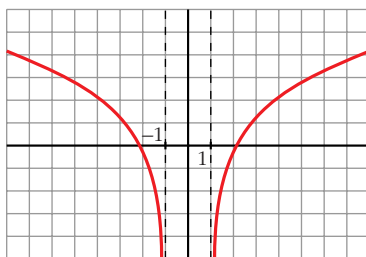
- **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$

$$x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \text{ Puntos: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ y } (\sqrt{2}, 0)$$

— No corta al eje Y , pues no existe $f(0)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$

- Está definida, y es *continua* y *derivable* en todo \mathbb{R} .
- Es *periódica* de periodo $2\pi \rightarrow$ solo la estudiamos en $[0, 2\pi]$.
- No existe $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow$ no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

• **Puntos de corte con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 0$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ o } x = \frac{11\pi}{6}$$

Puntos $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right); \left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \sqrt{3} - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{\pi}{3}, 2\right) \\ x = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{Punto } \left(\frac{4\pi}{3}, -2\right) \end{cases}$$

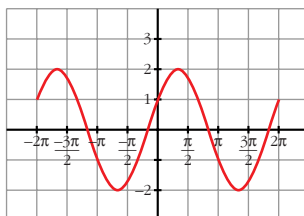
• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = -f(x)$$

$$f''(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$$

Los puntos de inflexión son los de corte con el eje X .

• **Gráfica:**



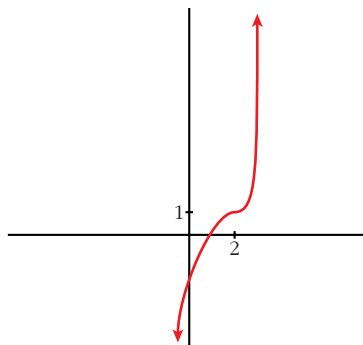
EXERCICIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

PARA PRACTICAR

- 1 Representa unha función continua e derivable en \mathbb{R} tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$$f(2) = 1, \quad f'(x) \geq 0 \text{ para calquera } x.$$

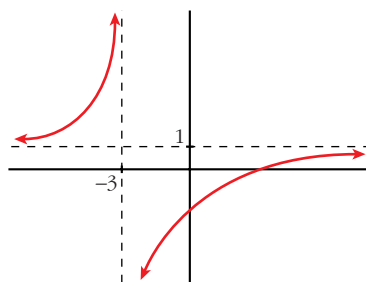


- 2 Representa unha función que non estea definida en $x = -3$ e tal que:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{se } x \rightarrow +\infty, f(x) < 1 \\ \text{se } x \rightarrow -\infty, f(x) > 1 \end{cases}$$

Non ten puntos singulares e é crecente.



- 3 Dunha función $y = f(x)$ temos esta información:

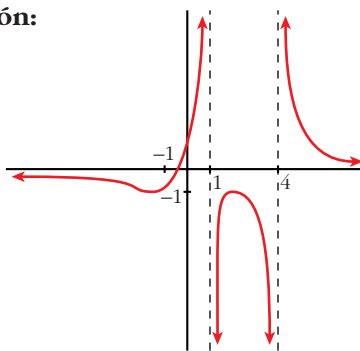
$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow +\infty, f(x) > 0$; si $x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$)

$$f'(2) = 0, \quad f(2) = -1; \quad f'(-1) = 0, \quad f(-1) = -1$$

Representaa.

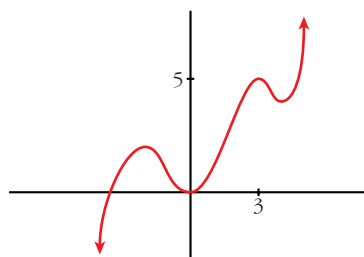


- 4 Debuxa a gráfica dunha función da que se coñecen as seguintes propiedades:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ se } x = -2, \quad x = 0, \quad x = 3, \quad x = 4$$

$$f(-2) = 2; \quad f(0) = 0; \quad f(3) = 5; \quad f(4) = 4$$



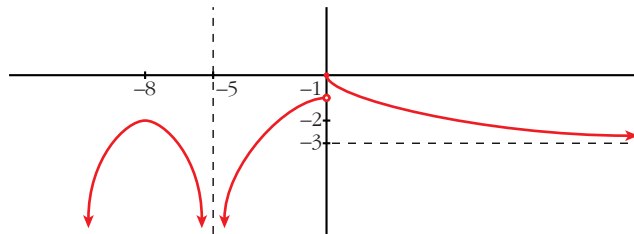
5 Debuxa a gráfica dunha función que cumpra as seguintes propiedades:

S $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -\infty$

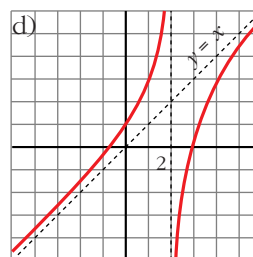
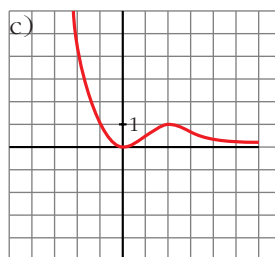
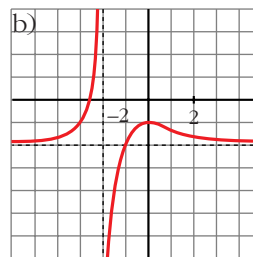
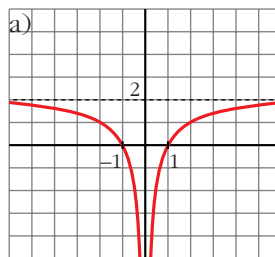
$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ é o único punto onde $f(x)$ se anula.

$f'(-8) = 0$ e a derivada non se anula en ningún outro punto. Ademais, $f'(x) < 0$ para todo x positivo.

A función é continua en toda a recta real, agás nos puntos $x = -5$ e $x = 0$.



6 Describe as seguintes funcións indicando as súas asíntotas e ramas infinitas, os seus puntos singulares e os intervalos de crecemento e de decrecemento.



a) • Asíntota vertical: $x = 0$. Asíntota horizontal: $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntota vertical: $x = -2$. Asíntota horizontal: $y = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > -2$)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$
- Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \rightarrow +\infty$: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

- Puntos singulares:
 $f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$
 $f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$
- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares: no tiene.
- Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

7 S **Considérase a función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Ten máximos e/ou mínimos? ¿Ten algún punto de inflexión? Fai unha gráfica aproximada desta función.**

$$f(x) = x^3 + 2x + 4$$

$$\bullet f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = -2 \rightarrow \text{no tiene solución.}$$

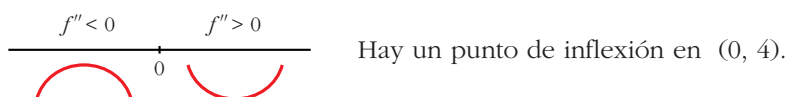
$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \rightarrow f(x) \text{ es creciente.}$$

No tiene máximos ni mínimos.

$$\bullet f''(x) = 6x$$

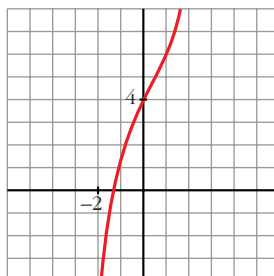
$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f''(x)$:



- Además, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• **Gráfica:**



8 Dada a función $y = x^3 - 3x + 1$, pídese:

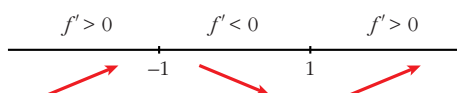
S

- Intervalos de crecimiento e de decrecimiento. Extremos relativos.
- Concavidade e convexidade. Puntos de inflexión.
- Debuxa a gráfica a partir dos resultados anteriores.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

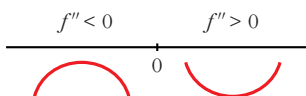
es decreciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, -1)$

b) $f''(x) = 6x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f''(x)$:

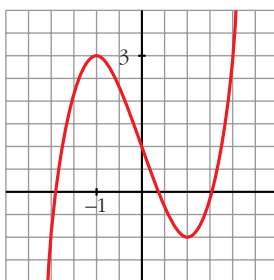


$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

c)



9 Nas seguintes funcións, estudia o seu dominio, asíntotas e posición da curva respecto destas, e represéntaas a partir dos resultados obtidos:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

f) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

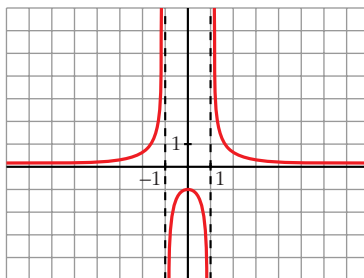
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{-1}{x^2 + 1}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

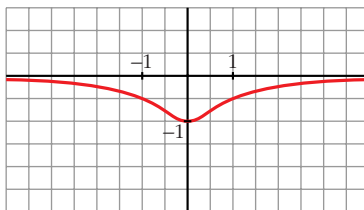
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 0$)

• **Gráfica:**



c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

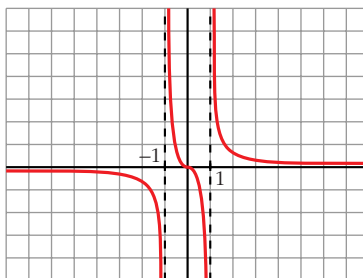
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Gráfica:**



d) $y = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

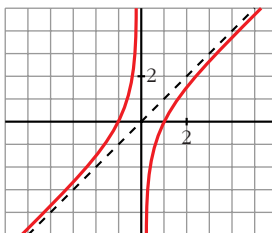
• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)

• **Gráfica:**



e) $y = \frac{x}{1+x^2}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

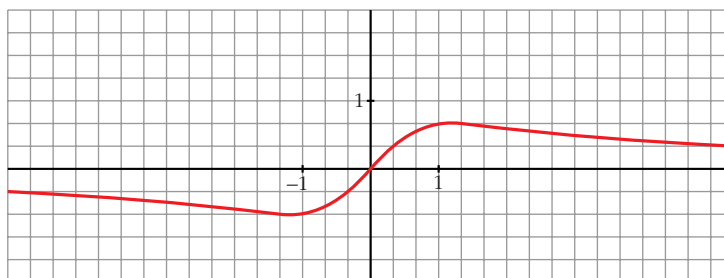
• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

• **Dominio:**

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$D = \mathbb{R}$$

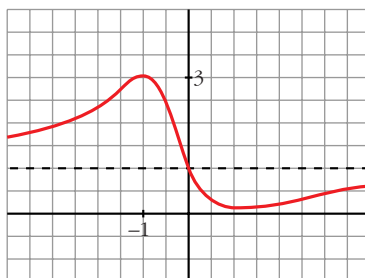
• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

• **Gráfica:**



Página 205

10 Debuxa a gráfica das seguintes funcións estudiando ramas infinitas, máximos e mínimos e puntos de inflexión:

a) $y = x^3 - 3x + 1$

b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

c) $y = x^3 - x^2$

d) $y = x^3 - 3x$

a) $y = x^3 - 3x + 1$

• **Ramas infinitas:**

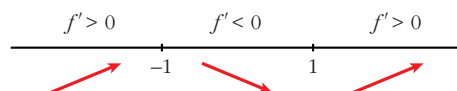
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Máximos y mínimos:**

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Máximo en $(-1, 3)$.

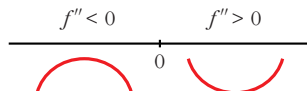
Mínimo en $(1, -1)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 6x$$

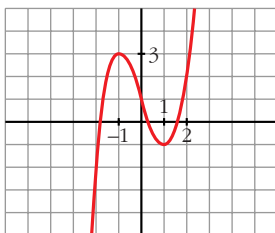
$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en $(0, 1)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

• **Ramas infinitas:**

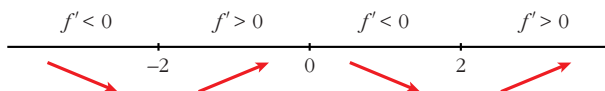
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Máximos y mínimos:**

$$f'(x) = x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



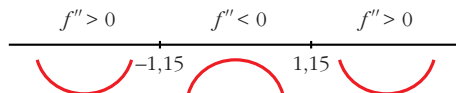
Máximo en $(0, 0)$. Mínimos en $(-2, -4)$ y en $(2, -4)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

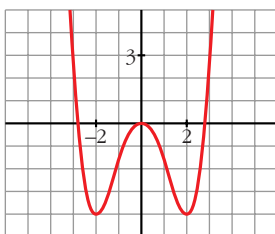
$$f''(x) = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,15$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión: $(-1,15; -\frac{20}{9})$; $(1,15; -\frac{20}{9})$

• **Gráfica:**



c) $y = x^3 - x^2$

• **Ramas infinitas:**

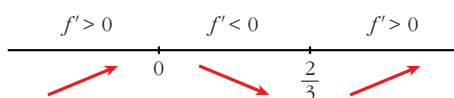
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Máximos y mínimos:**

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



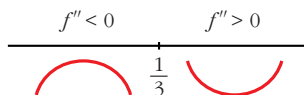
Máximo en $(0, 0)$ y mínimo en $(\frac{2}{3}, \frac{-4}{27})$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 6x - 2$$

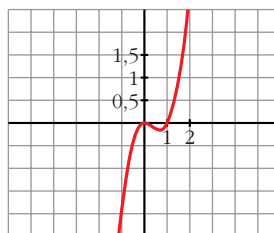
$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27})$

• **Gráfica:**



d) $y = x^3 - 3x$

• **Ramas infinitas:**

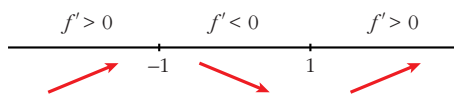
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

• **Máximos y mínimos:**

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



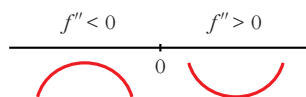
Máximo en $(-1, 2)$ y mínimo en $(1, -2)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 6x$$

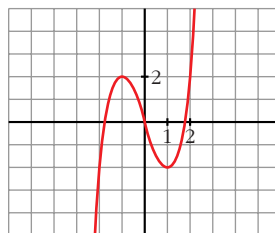
$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



11 S Representa as seguintes funções determinado previamente os seus intervalos de crescimento e de decrecemento e os seus máximos e mínimos:

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

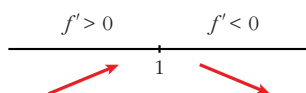
c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

$$f'(x) = -6x + 6$$

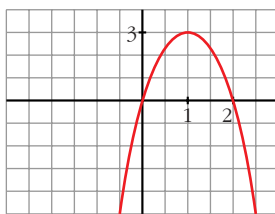
$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x + 6 = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$; es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 3)$.

Gráfica:

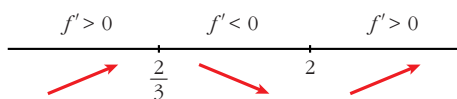


b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \begin{cases} x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$

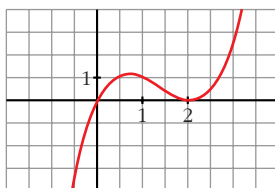
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $(\frac{2}{3}, 2)$.

Tiene un máximo en $(\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$ y un mínimo en $(2, 0)$.

Gráfica:

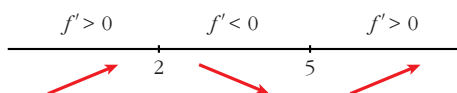


c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$

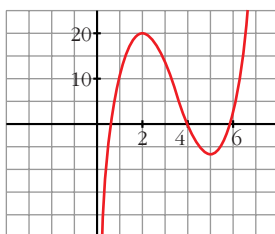
$f'(x) = 0 \rightarrow 6(x^2 - 7x + 10) = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$; es decreciente en $(2, 5)$. Tiene un máximo en $(2, 20)$ y un mínimo en $(5, -7)$.

Gráfica:



12 Estudia las ramas infinitas e os puntos singulares das seguintes funcións. Coa información obtida, represéntaa:

a) $y = \frac{1}{x+1}$

b) $y = \frac{1}{4+x^2}$

c) $y = \frac{1}{4-x^2}$

d) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

e) $y = \frac{x^2+1}{x}$

f) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

a) $y = \frac{1}{x+1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Ramas infinitas:**

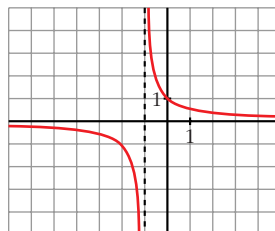
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty, f(x) < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Puntos singulares:**

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{1}{4+x^2}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \rightarrow \text{la curva está por encima de la asíntota}). \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

• **Puntos singulares:**

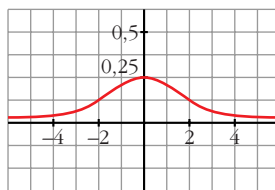
$$f'(x) = \frac{-2x}{(4+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



• **Gráfica:**



c) $y = \frac{1}{4-x^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ y si } x \rightarrow -\infty) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

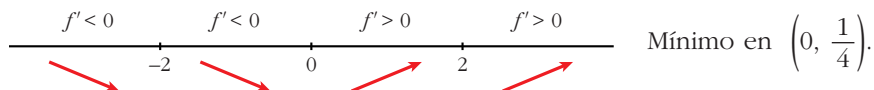
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Puntos singulares:**

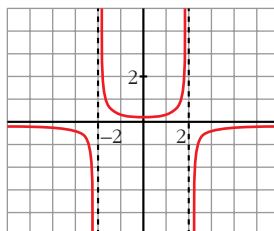
$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



• **Gráfica:**



d) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Ramas infinitas:**

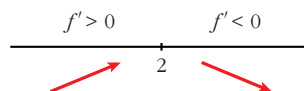
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \rightarrow \text{la curva está por encima de la asíntota}). \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Puntos singulares:**

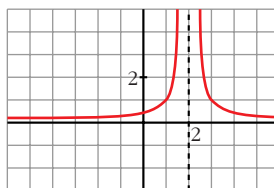
$$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) \neq 0$. Signo de $f'(x)$:



No tiene puntos singulares.

• **Gráfica:**



e) $y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

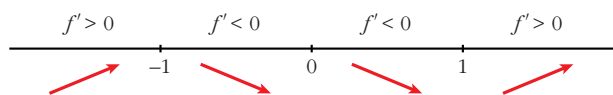
$(f(x) < x$ si $x \rightarrow -\infty$; $f(x) > x$ si $x \rightarrow +\infty$)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

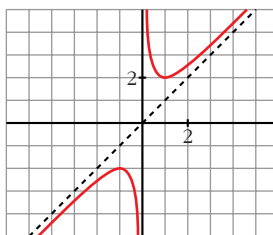
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Máximo en $(-1, -2)$
y mínimo en $(1, 2)$.

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ &(f(x) < 1 \text{ si } x \rightarrow -\infty; f(x) > 1 \text{ si } x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

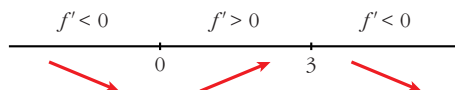
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3-x)}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

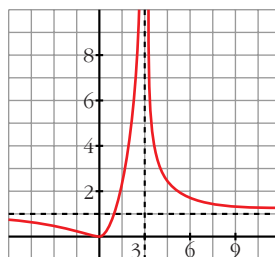
$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Mínimo en $(0, 0)$.

• Gráfica:



13 Nas seguintes funcións pídesse: dominio de definición, cortes cos eixes, intervalos de crecemento e de decrecemento, así como os posibles máximos ou mínimos.

5

Coa información obtida, representaaas:

a) $y = \frac{2x + 2}{3x - 3}$

b) $y = \frac{x}{x - 4}$

c) $y = \frac{x}{(x - 1)^2}$

d) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

e) $y = \frac{(x + 2)^2}{x^2 + 1}$

f) $y = \frac{x^2 + 1}{3x}$

a) $y = \frac{2x + 2}{3x - 3}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{-2}{3} \rightarrow$ Punto $\left(0, \frac{-2}{3}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ Punto $(-1, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2(3x - 3) - (2x + 2) \cdot 3}{(3x - 3)^2} = \frac{6x - 6 - 6x - 6}{(3x - 3)^2} = \frac{-12}{(3x - 3)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio.

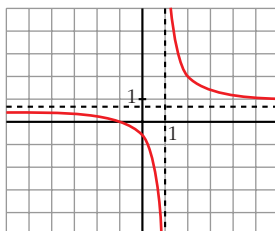
• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} y = \frac{2}{3} \text{ es asíntota horizontal.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &< \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &> \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \left(f(x) < \frac{2}{3} \text{ si } x \rightarrow -\infty; f(x) > \frac{2}{3} \text{ si } x \rightarrow +\infty \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{x}{x-4}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{4\}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{x-4-x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x .

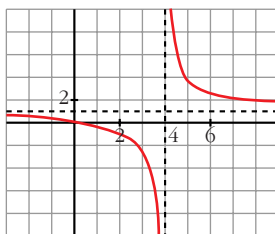
$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \rightarrow -\infty; f(x) > 1 \text{ si } x \rightarrow +\infty) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 4 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



c) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

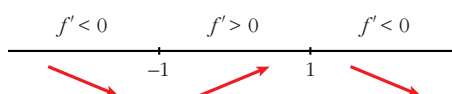
— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x-1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, crece en $(-1, 1)$.

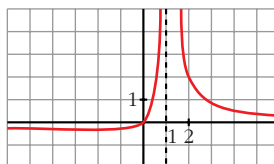
Tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{4}\right)$.

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty; f(x) > 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

• **Dominio:**

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}. \text{ No tiene solución. Por tanto:}$$

Dominio: \mathbb{R}

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

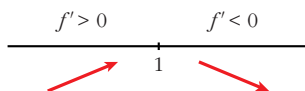
— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Como $y \neq 0$, no corta al eje X .

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x-2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$:



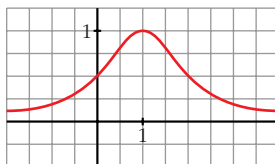
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$, es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 1)$.

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \rightarrow \text{la curva está por encima de la asíntota.}) \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

• **Gráfica:**



e) $y = \frac{(x+2)^2}{x^2+1}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Punto $(0, 4)$

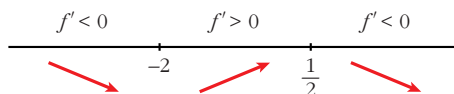
— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow$ Punto $(-2, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+2)(x^2+1) - (x+2)^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)[2x^2+2-2x(x+2)]}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{(x+2)(2x^2+2-2x^2-4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)(2-4x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x+2)(2-4x) = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; es creciente en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

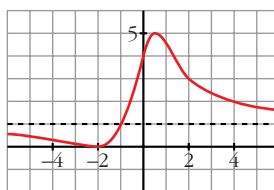
Tiene un mínimo en $(-2, 0)$ y un máximo en $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \rightarrow -\infty; f(x) > 1 \text{ si } x \rightarrow +\infty) \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x^2 + 1}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{1}{3x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Cortes con los ejes:**

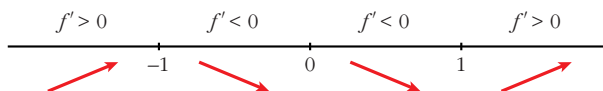
- No corta al eje Y , pues $x = 0$ no está en el dominio.
- No corta al eje X , pues $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x .

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 3x - (x^2 + 1) \cdot 3}{9x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{3x^2} = \frac{x^2 - 1}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

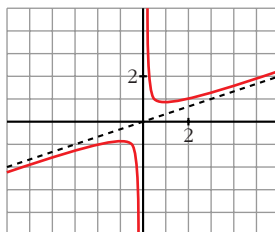
Tiene un máximo en $\left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ y tiene un mínimo en $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

• **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \text{ es asíntota vertical. } y = \frac{x}{3} \text{ es asíntota oblicua.} \end{array}$$

$$f(x) < \frac{x}{3} \text{ si } x \rightarrow -\infty; f(x) > \frac{x}{3} \text{ si } x \rightarrow +\infty$$

• **Gráfica:**



PARA RESOLVER

14 **S** Representa as seguintes funções estudando previamente:

- Dominio de definición, asíntotas e posición da curva respecto destas.
- Intervalos de crecemento e de decrecemento, e extremos relativos.

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

d) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

e) $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

f) $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$

g) $y = \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 2}$

h) $y = \frac{x^2}{9 - x^2}$

i) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$

j) $y = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$

k) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

l) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

m) $y = \frac{x^3}{x + 2}$

n) $y = \frac{(x - 2)^2}{x - 1}$

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

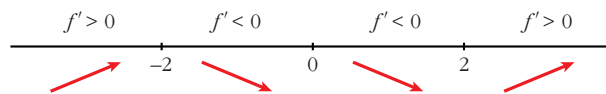
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



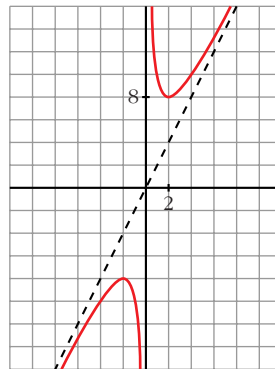
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

• **Gráfica:**



b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

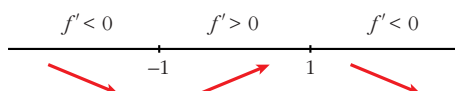
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$:

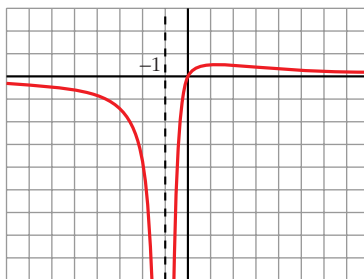


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

• **Gráfica:**



c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = x + \frac{4x}{x^2 - 4}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

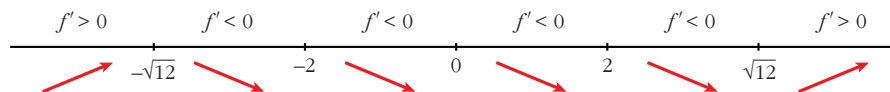
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

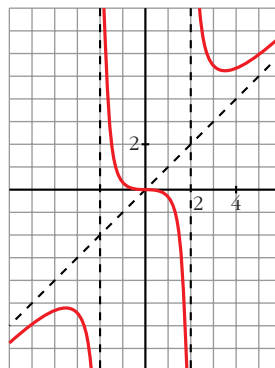
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 12) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$
 es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$
 tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$
 tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

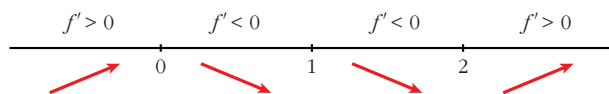
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 1$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



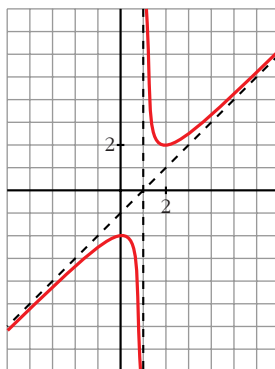
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -2)$

tiene un mínimo en $(2, 2)$

• **Gráfica:**



e) $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota oblicua.

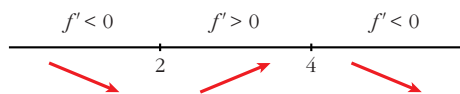
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} = \\ &= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0 \rightarrow x = 4$$

Signo de $f'(x)$:

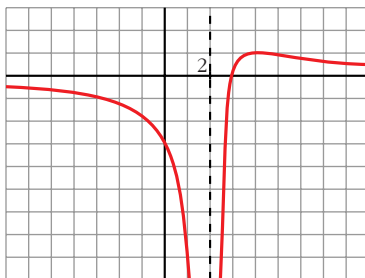


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$

tiene un máximo en $(4, 1)$

• **Gráfica:**



f) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

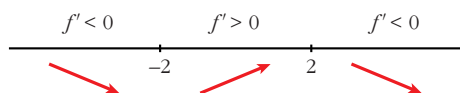
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x-2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Signo de $f'(x)$:

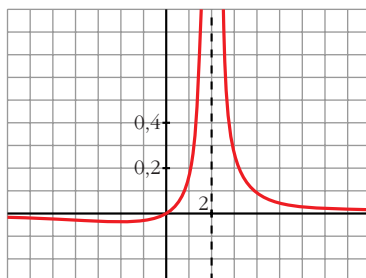


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(-2, 2)$

tiene un mínimo en $\left(-2, \frac{-1}{8}\right)$

• **Gráfica:**



$$g) y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-2} = x - 2 - \frac{1}{x-2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x - 2$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

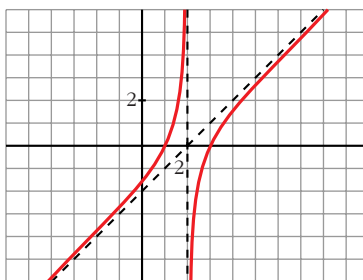
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{no tiene solución}$$

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

• **Gráfica:**



$$h) y = \frac{x^2}{9-x^2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

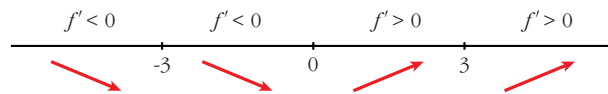
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 18x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

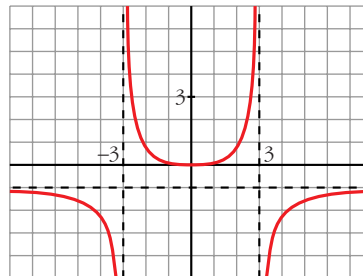


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



i) $y = \frac{x^2 + 4}{x} = x + \frac{4}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

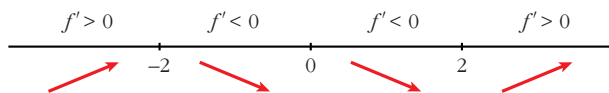
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



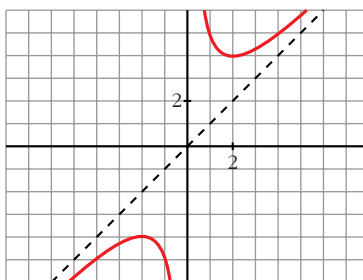
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 4)$

• **Gráfica:**



j) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

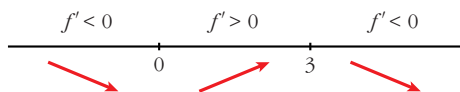
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} = \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

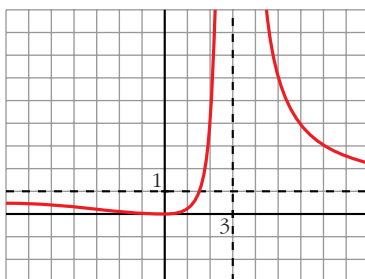


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

es creciente en $(0, 3)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



$$k) y = \frac{2x^3}{x^2 + 1} = 2x - \frac{2x}{x^2 + 1}$$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2x$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

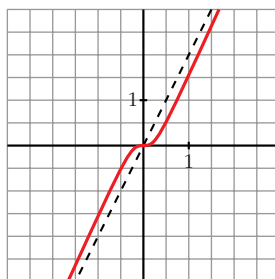
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

$f(x)$ es creciente en todo \mathbb{R} .

• **Gráfica:**



$$1) y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

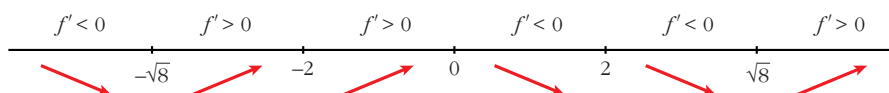
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3(x^2 - 4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2 - 4)^2} = \\ &= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3(x^2 - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



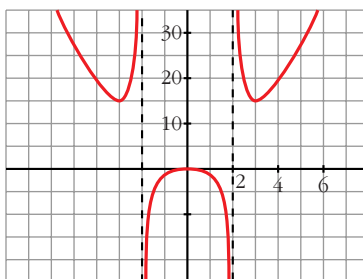
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



$$m) y = \frac{x^3}{x+2}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

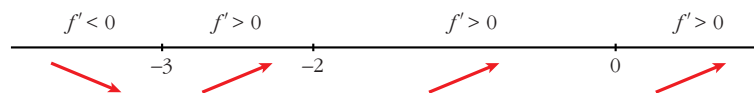
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



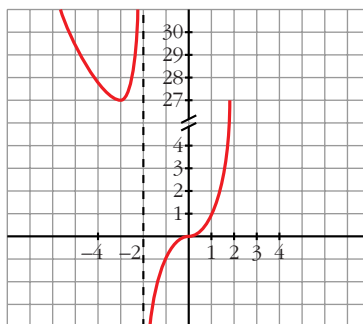
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



$$n) y = \frac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \frac{1}{x-1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

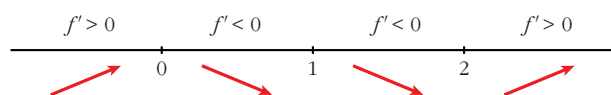
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x - 3$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



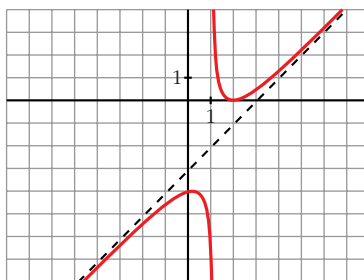
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 0)$

• **Gráfica:**



15 a) Calcula as asíntotas da gráfica da función definida para $x > 0$ por

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}.$$

b) Determina as rexións de crecemento e de decrecemento de f indicando os seus máximos e mínimos locais e globais, se os hai.

c) Esboza a gráfica de f .

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 0$ es asíntota vertical.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

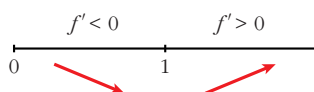
(Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

$$b) f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$)

Signo de $f'(x)$:



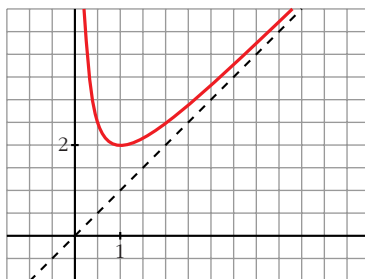
$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$

es creciente en $(1, +\infty)$

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$

no tiene un máximo

c)



16 Dada a función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, pídese:

a) Dominio de definición, asíntotas e posición da curva respecto a estas.

b) Máximos e mínimos relativos, e intervalos de crecemento e de decrecemento.

c) Debuxa a gráfica de f .

a) • **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

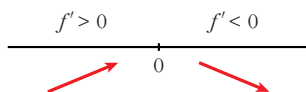
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} (f(x) > 0 \rightarrow \text{la curva está por encima de la asíntota}). \end{array} \right.$$

$$b) f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

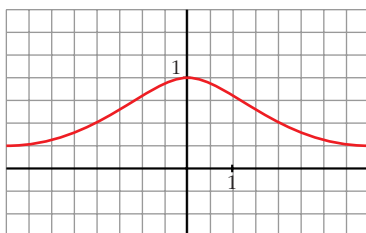
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

c)



Página 206

17 Representa gráficamente a función:

S

$$p(x) = x^4 + \left(\frac{4}{3}\right)x^3 + 2x^2 - 2$$

¿Cantas raíces reais ten este polinomio $p(x)$?

$$p(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$$

$$\bullet p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$$

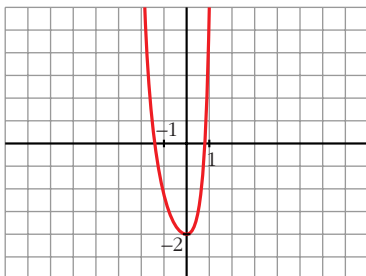
$$p'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Hay un punto singular en } (0, -2).$$

$$\bullet p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$$

$$p''(x) = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \rightarrow \text{no tiene solución.}$$

$p(x)$ no tiene puntos de inflexión.

• **Gráfica:**



• $f(x)$ tiene dos raíces reales.

- 18** Dadas as seguintes funcións, calcula as súas asíntotas, estudia o crecemento e a existencia de máximos e mínimos. Debuxa a súa gráfica:

$$\text{a) } y = \frac{e^x}{x^2 + 3}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^3}{4x^2 + 1}$$

$$\text{c) } y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$$

$$\text{a) } y = \frac{e^x}{x^2 + 3}$$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > 0$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow$ Rama parabólica

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

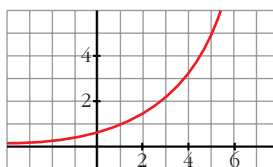
$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 3) - e^x 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$. No tiene solución.

$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente en todo \mathbb{R} . No tiene máximos ni mínimos.

• Corta al eje Y en $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

• **Gráfica:**



$$\text{b) } y = \frac{x^3}{4x^2 + 1} = \frac{1}{4}x - \frac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \frac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > \frac{1}{4}x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < \frac{1}{4}x$)

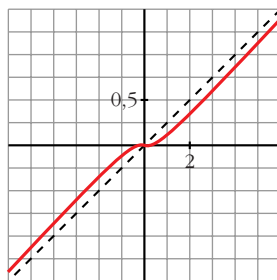
• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2 + 1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \rightarrow f(x)$ es creciente (tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$)

• **Gráfica:**



c) $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

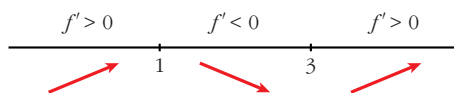
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow x-1 = 2 \rightarrow x = 3$$

Signo de $f'(x)$:

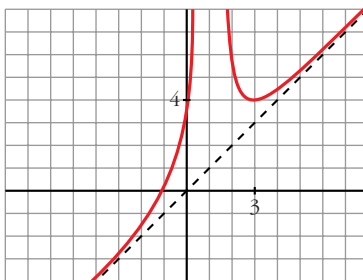


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(1, 3)$

tiene un mínimo en $(3, 4)$

• **Gráfica:**



$$d) y = \frac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{array} \right\} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.}$$

$(f(x) < 1 \text{ si } x \rightarrow -\infty; f(x) > 1 \text{ si } x \rightarrow +\infty)$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 - 1) - (x^3 + 8) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{3x^2(x^3 - 1 - x^3 - 8)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-27x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

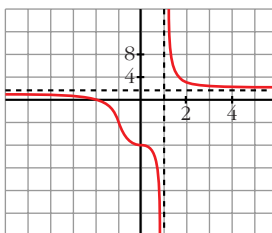
$$f'(x) = 0 \rightarrow -27x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en su dominio.

(Tiene un punto de inflexión en $(0, -8)$).

• **Gráfica:**



19 Estudia os máximos, mínimos e puntos de inflexión das seguintes funcións e represéntaaas graficamente:

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $y = \text{sen } x + \text{cos } x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

a) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x .

- $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \rightarrow$$

\rightarrow no hay máximos ni mínimos

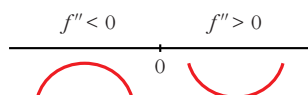
$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

- $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} - 1 = 0$$

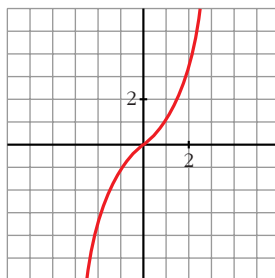
$$e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**

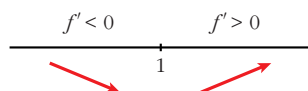


b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{cosh} x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x .

- $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$$

Signo de $f'(x)$:

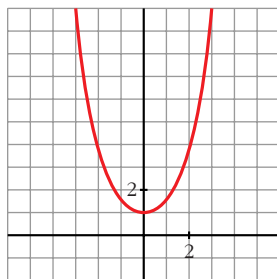


Hay un mínimo en $(0, 1)$.

- $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{no tiene solución} \rightarrow \text{no hay puntos de inflexión}$$

• **Gráfica:**

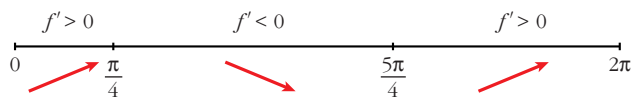


c) $y = \text{sen } x + \text{cos } x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

• $f'(x) = \text{cos } x - \text{sen } x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{cos } x = \text{sen } x \rightarrow \text{tg } x = 1 \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

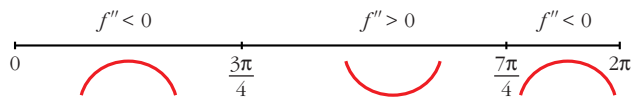


Hay un máximo en $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

• $f''(x) = -\text{sen } x - \text{cos } x$

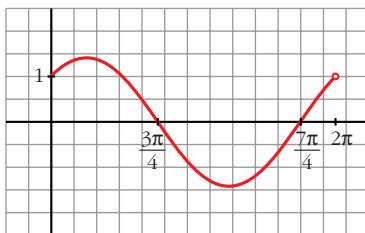
$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{sen } x = -\text{cos } x \rightarrow \text{tg } x = -1 \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ y otro en $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

• **Gráfica:**



20 Representa les funcions següents:

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x - 1)e^x$

e) $y = xe^{x+1}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \frac{x}{e^x}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

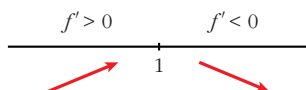
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$



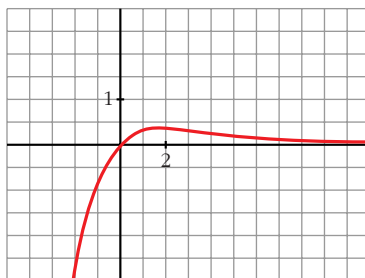
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

es decreciente en $(1, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$

• Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



$$b) y = \frac{\ln x}{x}$$

• **Dominio:** $(0, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

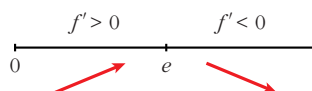
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Signo de $f'(x)$:



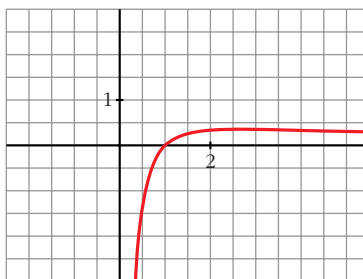
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$

es decreciente en $(e, +\infty)$

tiene un máximo en $(e, \frac{1}{e})$

• Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



$$c) y = x \ln x$$

• **Dominio:** $(0, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

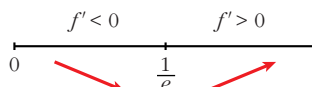
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



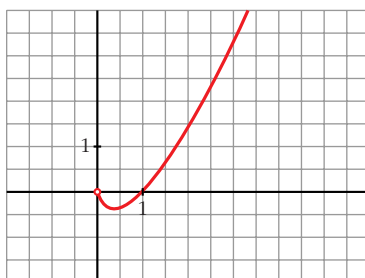
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

• Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

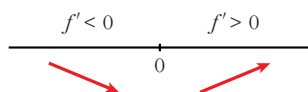
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, -1)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**



e) $y = xe^{x+1}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$(f(x) < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty)$$

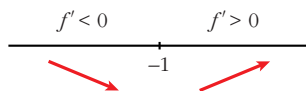
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (1+x)e^{x+1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-1, -1)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

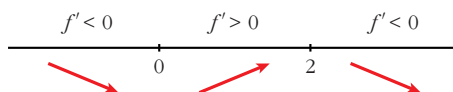
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

• **Puntos singulares:** $y = \frac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



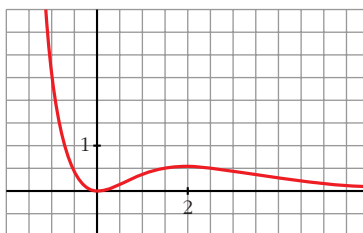
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(0, 2)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

tiene un máximo en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$

• **Gráfica:**



g) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

• **Dominio:**

$\ln x = 0 \rightarrow x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

Dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

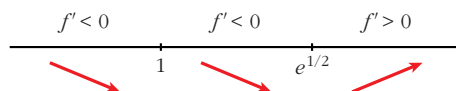
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x \ln x - x}{(\ln x)^2} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2 \ln x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{1/2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

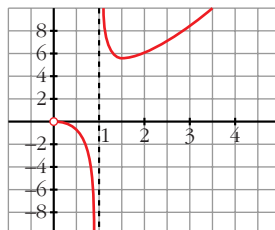


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/2})$

es creciente en $(e^{1/2}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(e^{1/2}, 2e)$.

• **Gráfica:**



h) $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

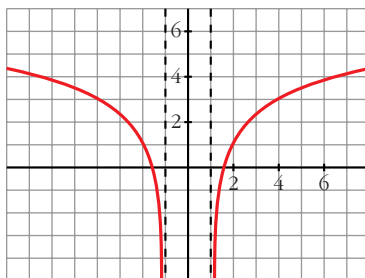
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

• **Puntos de corte con el eje X:**

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

• **Gráfica:**



21 Estudia e representa as seguintes funções:

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt[3]{x^2}$

d) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

• **Dominio:** $[-2, 2]$

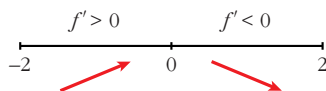
• **Asíntotas:** No tiene.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

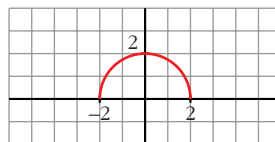
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2)$.
 Tiene un máximo en $(0, 2)$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

• **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

• **Simetría:**

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Es par \rightarrow Simétrica respecto al eje Y .

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. ($f(x) < x$)

Por simetría (pues $f(x)$ es par), deducimos que:

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

($f(x) < -x$)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

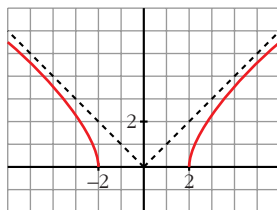
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (que no está en el dominio)}$$

No tiene puntos singulares.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

- Pasa por $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Simetría:**

$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2} = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

- No tiene asíntotas.

- **Ramas infinitas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

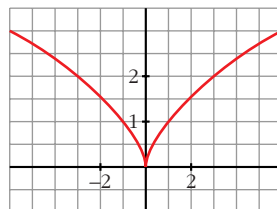
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

No existe $f'(0) \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt[3]{1-x^2}$

- **Dominio:** \mathbb{R}

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

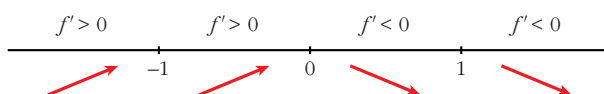
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt{(1-x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = -1 \text{ ni en } x = 1.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

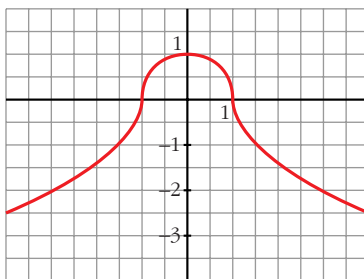
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, +\infty)$; tiene un máximo en $(0, 1)$.

• Corta al eje X en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.

• **Gráfica:**

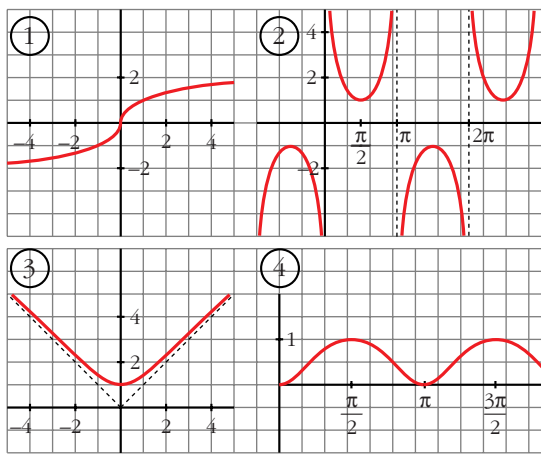


22 Estudia o dominio de definición, as asíntotas e os extremos de cada unha das seguintes funcións e, con esa información, trata de encontrar a súa gráfica entre as que están representadas na columna seguinte:

a) $y = \frac{1}{\text{sen } x}$

b) $y = x e^x$

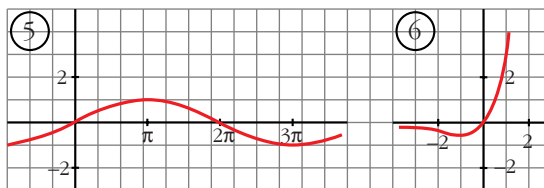
c) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$



d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = \text{sen}^2 x$



a) $y = \frac{1}{\text{sen} x}$

• **Dominio:**

$\text{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

$D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$

• **Asíntotas:**

$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

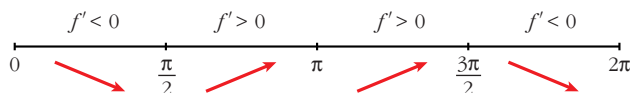
No hay más asíntotas.

• **Extremos:**

$f'(x) = \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



$f(x)$ es periódica de periodo 2π .

$f(x)$ es decreciente en $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

es creciente en $(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$

tiene un mínimo en $(\frac{\pi}{2}, 1)$

tiene un máximo en $(\frac{3\pi}{2}, -1)$

• **Gráfica** \rightarrow (2)

b) $y = xe^x$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

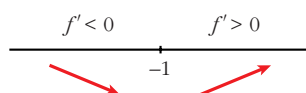
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica}$$

• **Extremos:**

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 + x = 0 \rightarrow x = -1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$

• **Gráfica** \rightarrow (6)

c) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:** No tiene.

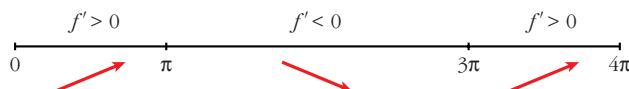
• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ es periódica de periodo 4π .

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

es decreciente en $(\pi, 3\pi)$

tiene un máximo en $(\pi, 1)$

tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$

• **Gráfica** → (5)

d) $y = \sqrt[3]{x}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:** No tiene.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas}$$

• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \neq 0.$$

$$f(x) \text{ es creciente.}$$

• **Gráfica** → (1)

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Simetría:**

$$f(-x) = f(x) \rightarrow f(x) \text{ es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x$).

Por simetría:

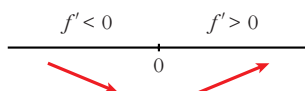
$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x$).

• **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 1)$

• **Gráfica** \rightarrow (3)

f) $y = \text{sen}^2 x$

• **Dominio:** \mathbb{R}

• **Asíntotas:** No tiene.

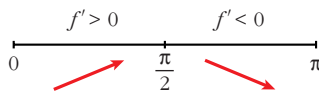
• **Extremos:**

$$f'(x) = 2\text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$f(x)$ es periódica de periodo π .

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$

• **Gráfica** \rightarrow (4)

- 23 S** A recta $y = 2x + 6$ é unha asíntota oblicua da función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$. Calcula o valor de k e representa a función.

• **Hallamos k :**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

Luego: $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

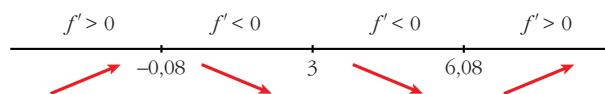
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x - 3) - (2x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6,08 \\ x = -0,08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



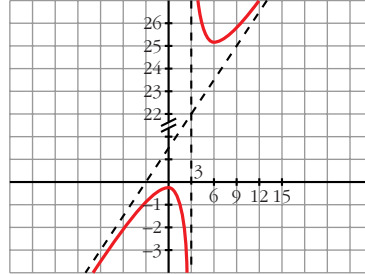
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0,08) \cup (6,08; +\infty)$

es decreciente en $(-0,08; 3) \cup (3; 6,08)$

tiene un máximo en $(-0,08; -0,33)$

tiene un mínimo en $(6,08; 24,32)$

• **Gráfica:**



24 **S** Unha partícula móvese ó longo da gráfica da curva $y = \frac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$.

No punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ déixaa e desprázase ó longo da recta tanxente a dita curva.

a) Determina a ecuación da tanxente.

b) Se se despraza de dereita a esquerda, calcula o punto no que a partícula encontra a asíntota vertical máis próxima ó punto P .

c) Se o desprazamento é de esquerda a dereita, determina o punto no que a partícula encontra o eixe OX .

$$a) f'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(2) = \frac{10}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x-2) \rightarrow y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

b) La asíntota vertical máis próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = \frac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} \text{El punto es } \left(1, \frac{-22}{9}\right)$$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eixe OX :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{10}{9}x = \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \left\} \text{El punto es } \left(\frac{16}{5}, 0\right)$$

25 Dada a función $f(x) = x^2 |x - 3|$ calcula:

- S**
- Os puntos nos que f non é derivable.
 - Calcula os seus máximos e mínimos.
 - Representa graficamente.

$$a) f(x) = \begin{cases} -x^2(-x + 3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

– Si $x \neq 3$, tenemos que: $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \text{ (Punto } (3, 0)). \end{array}$$

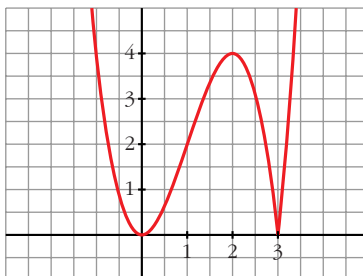
$$b) f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 & \text{si } x < 3 \\ 3x(-x + 2) = 0 & \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{cases} \\ 3x^2 - 6x = 0 & \text{si } x > 3 \rightarrow \text{ninguno} \end{cases}$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x , tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



Página 207

26 Determina os puntos de corte, os máximos e mínimos, os intervalos de crecemento e de decrecemento e os puntos de inflexión das seguintes funcións definidas no intervalo $[0, 2\pi]$.

Utilizando a información obtida, representaas graficamente:

a) $y = 1 - 2 \cos x$

b) $y = 1 + 2 \operatorname{sen} x$

c) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$

d) $y = (\operatorname{sen} x)^2$

a) $y = 1 - 2\cos x$

• **Domínio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow$

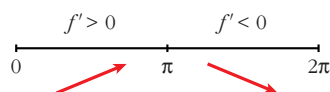
$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right\} \text{Puntos } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

• **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = 2\operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \pi)$ y es decreciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.

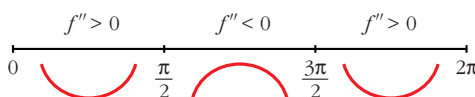
Tiene un máximo en $(\pi, 3)$, un mínimo en $(0, -1)$ y otro mínimo en $(2\pi, -1)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = 2\cos x$$

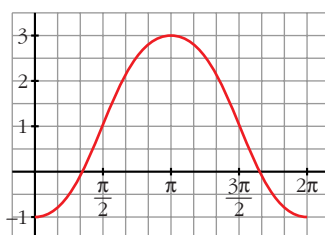
$$f''(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

• **Gráfica:**



b) $y = 1 + 2\text{sen } x$

• **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (está solo definida en este intervalo).

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 + 2\text{sen } x = 0 \rightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{2} \rightarrow$

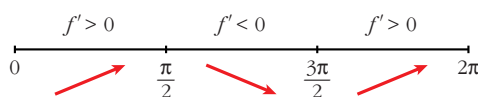
$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{6} \\ x = \frac{11\pi}{6} \end{array} \right\} \text{Puntos } \left(\frac{7\pi}{6}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$$

• **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = 2\cos x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

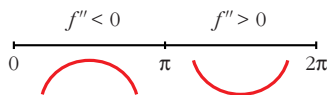
Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -2\text{sen } x$$

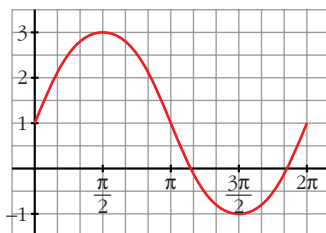
$$f''(x) = 0 \rightarrow \text{sen } x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ y en $(2\pi, 1)$.

• **Gráfica:**



c) $y = \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x$

• **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x = 0$

$$\operatorname{tg} x = 1 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \text{ Puntos } \left(\frac{\pi}{4}, 0 \right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{4}, 0 \right)$$

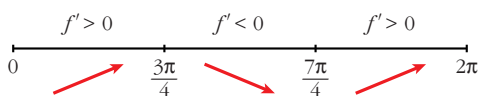
• **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 1 + \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

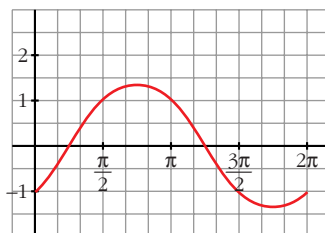
Tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{7\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

• **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = -(\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = -f(x)$$

Los puntos de inflexión son los puntos de corte con el eje X .

• **Gráfica:**



d) $y = (\operatorname{sen} x)^2$

• **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{sen } x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$

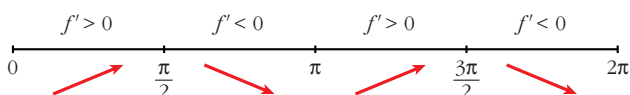
Puntos $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$.

• **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = 2\text{sen } x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } x \cos x = 0 \begin{cases} \text{sen } x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases} \\ \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{cases} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$; es decreciente en $(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Tiene un máximo en $(\frac{\pi}{2}, 1)$, otro en $(\frac{3\pi}{2}, 1)$, y tiene un mínimo en $(0, 0)$,

otro en $(\pi, 0)$ y otro en $(2\pi, 0)$.

• **Puntos de inflexión:**

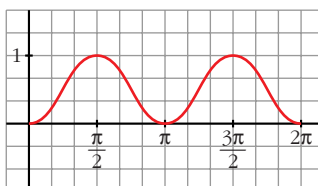
$$f''(x) = 2[\cos^2 x - \text{sen}^2 x]$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow 1 - \text{tg}^2 x = 0 \rightarrow$$

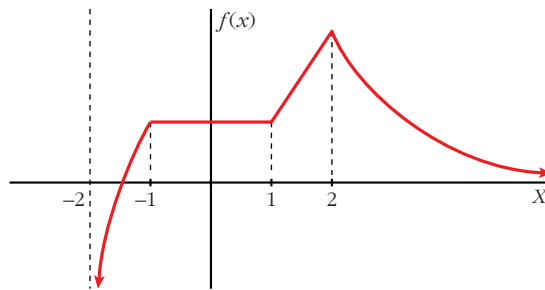
$$\rightarrow \text{tg}^2 x = 1 \begin{cases} \text{tg } x = -1 \begin{cases} x = 3\pi/4 \\ x = 7\pi/4 \end{cases} \\ \text{tg } x = 1 \begin{cases} x = \pi/4 \\ x = 5\pi/4 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos de inflexión: $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{7\pi}{4}, \frac{1}{2})$.

• **Gráfica:**



27 Dada a gráfica da función $f(x)$, determina:
S



- Dominio da función.**
- Intervalos de crecemento e de decrecemento.**
- Intervalos onde a derivada é positiva**
- Puntos onde non é derivable.**
- Ecuacións das asíntotas.**

- $(-2, +\infty)$
- Es creciente en $(-2, -1) \cup (1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$.
- $f'(x) > 0$ en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.
- No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$, ni en $x = 2$.
- Asíntota vertical: $x = -2$
 Asíntota horizontal: $y = 0$

28 Dada a función: $f(x) = \frac{bx}{x^2 + 1}$ con $b \neq 0$ Pídesse:
S

- Determina as asíntotas da función para calquera valor do parámetro b .**
- ¿Cal debe ser o valor do parámetro b para que a función $f(x)$ teña un máximo no punto $(1, 3)$?**

- Dominio: \mathbb{R}
 • No tiene asíntotas verticales.
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

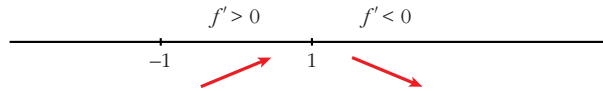
$$b) f(1) = 3 \rightarrow \frac{b}{2} = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

Comprobemos que, en efecto, hay un máximo para $x = 1$:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6 - 6x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Como $f' > 0$ a la izquierda de $x = 1$, y $f' < 0$ a su derecha, en $x = 1$ hay un máximo.

- 29** Comproba que a función $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ tén dúas asíntotas horizontais distintas.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty$$

- 30** Dada a función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, calcula a e b para que a gráfica de f pase polo punto $(-2, -6)$ e teña, nese punto, tanxente horizontal. Para eses valores de a e b , representa a función.

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Pasa por } (-2, -6) \rightarrow -2a + b - 4 = -6 \\ \bullet \text{ Tangente horizontal } \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}} \right\} a = 2; b = 2$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

• **Asíntotas:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \rightarrow y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua}$$

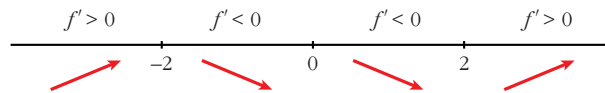
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



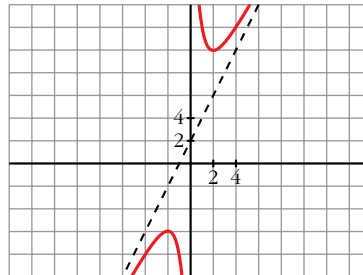
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -6)$

tiene un mínimo en $(2, 10)$

• **Gráfica:**



31 Estudia e representa $y = 1 - \operatorname{tg} x$ indicando o seu dominio, asíntotas, intervalos de crecemento e extremos, se os houbera.

$$y = 1 - \operatorname{tg} x$$

• Como es una función periódica de periodo π , basta con estudiarla en el intervalo $[0, \pi]$.

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

• **Asíntotas:**

En el intervalo $[0, \pi]$ tiene una asíntota vertical en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x) = +\infty$$

(De la misma forma, hay asíntotas verticales en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$).

• **Intervalos de crecimiento y extremos:**

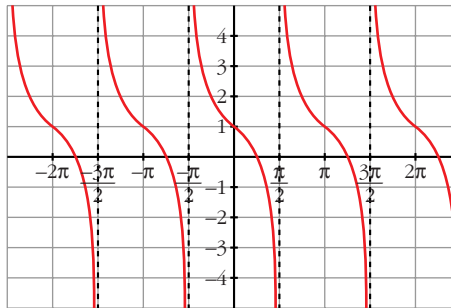
$$f'(x) = -(1 + \operatorname{tg}^2 x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente.}$$

No tiene máximos ni mínimos.

• Corta al eje X , en el intervalo $[0, \pi]$, en los puntos:

$$1 - \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

• **Gráfica:**



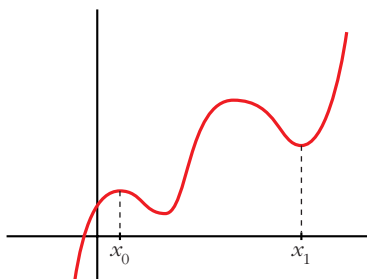
CUESTIONES TEÓRICAS

32 ¿Que podemos decir do grao dunha función polinómica que ten dous máximos e dous mínimos relativos? Nesa función, ¿pode estar un dos mínimos máis alto có máximo?

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:



El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0 .

33 ¿Cantos puntos de inflexión pode ter como máximo unha función polinómica de cuarto grao?

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f'(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

34 A función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ non está definida en $x=1$ nin en $x=-1$; sen embargo, ten só unha asíntota vertical. Xustifica esta información.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x=1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x=-1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

35 ¿Cantas asíntotas verticais pode ter unha función? ¿E horizontais?

- Asíntotas verticais puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio 22, es la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \rightarrow -\infty$ y otra cuando $x \rightarrow +\infty$.

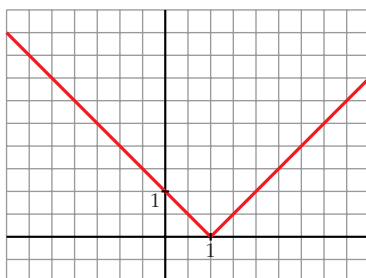
36 Dá un exemplo dunha función que teña un mínimo en $x=1$ e que non sexa derivable nese punto. Representaa.

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Hay un mínimo en } x=1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x=1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



- 37** **S** **Dá un exemplo dunha función que sexa derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ e que non teña máximo nin mínimo nese punto.**

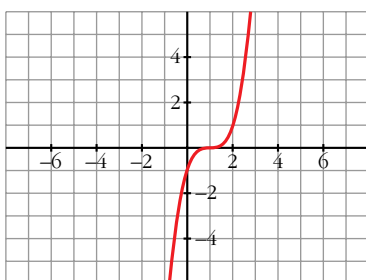
Por exemplo, $y = (x - 1)^3$.

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow f'(1) = 0$$

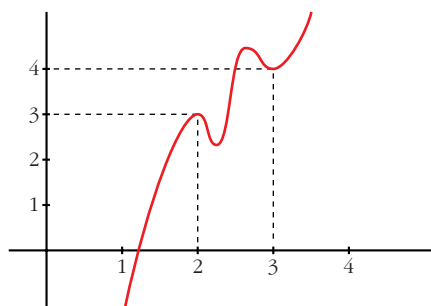
$$f'(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \rightarrow f(x) \text{ es creciente}$$

En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



- 38** **S** **Se é posible, debuxa unha función continua no intervalo $[0, 4]$ que teña, ó menos, un máximo relativo no punto $(2, 3)$ e un mínimo relativo no punto $(3, 4)$. Se a función fora polinómica, ¿cal debería ser, como mínimo, o seu grao?**



$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).