Regra de L'hopital

Sexan f e g dúas funcións derivabeis nun entorno *I* dun punto *a*, salvo como muito en *a.* Supoñendo que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Entón verifícase:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Esta versión aplícase a indeterminacións do tipo 0/0, tamén pode aplicarse de xeito similar a indeterminacións ∞ / ∞

Exemplos (0/0):

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{2x - 3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\text{sen } x + x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x} = 0$$

Exercicios:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}}$$

Solucións:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1}$$

Indeterminación 0/0

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$$

Indeterminación ∞ / ∞

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Solucións:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$$

Indeterminación 0/0

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim_{x \to 0} \frac{4\sqrt[4]{x}}{3(1+x)} = 0$$

Aplicación a outras indeterminacións

Caso $0 \cdot \infty$

Transformar esta indeterminación nunha das anteriores,
por exemplo nunha 0/0:

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

Aplicación a outras indeterminacións

Caso $0 \cdot \infty$

Exemplos:

$$\lim_{x \to +0} x^2 \cdot \ln x = 0 \cdot \infty \quad = \quad \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\stackrel{(L'H)}{=} \quad \lim_{x \to +0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} \quad = \quad \lim_{x \to +0} -\frac{1}{2}x^2 = \mathbf{0}$$

Exercicio:

$$\acute{l\imath}m_{x \to +\infty} x \, ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

Solución exercicio:

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$

$$= \ln\left[\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e = 1$$

Aplicación a outras indeterminacións

Caso $\infty - \infty$

Neste caso facemos as operacións e pasamos a un dos casos anteriores.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \boxed{\infty - \infty} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

Agora podemos aplicar a regra (dúas veces).

$$\overset{(L'H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{(L'H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = \mathbf{0}$$

Aplicación a outras indeterminacións: exponenciais

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$$

Trátase dunha indeterminación do tipo ∞^0, para resolvela temos que “ tomar logaritmos nos dous membros”:

$$\lim_{x \to 0} \ln \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$$

Aplicando as propiedades dos logaritmos:

$$= \lim_{x \to 0} tg\,x \ln \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} [tg\,x\,(-\ln x)] =$$

(indeterminación $0 \cdot \infty$)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\ln x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = 0$$

E agora desfacemos o logaritmo para obter o límite:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x} = e^0 = 1$$