TEMA 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA.

1. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de una función
2. Extremos relativos
3. Optimización
4. Curvatura
5. Punto de Inflexión
6. Propiedades de las funciones derivables
   6.1. Teorema de L'Hopital
   6.2. Teorema de Rolle

Contexto con la P.A.U.

En los exámenes de selectividad suele haber un problema en cada opción en donde se pide calcular el crecimiento y/o la curvatura de una función. Por lo general las funciones que aparecen son, en una opción, una fracción polinómica, y en la otra, o un exponente o un logaritmo. Aunque de primeras puede parecer que las funciones exponenciales o logarítmicas son más complicadas, por lo general suelen ser más sencillas, ya que las derivadas, en especial la segunda, son más fáciles de igualar a cero, y así estudiar la curvatura o el crecimiento.

Otros problemas que aparecen son los de optimización. Por lo general estos problemas son relativos a la maximización o minimización de funciones (áreas máximas o mínimas, pendiente mínima o máxima…).

Una cuestión muy común en los exámenes de selectividad son los límites, que se calculan a partir de L'Hopital. También se utiliza L'Hopital en el estudio de asíntotas de las funciones, la continuidad y la derivabilidad de funciones (ver tema anterior).

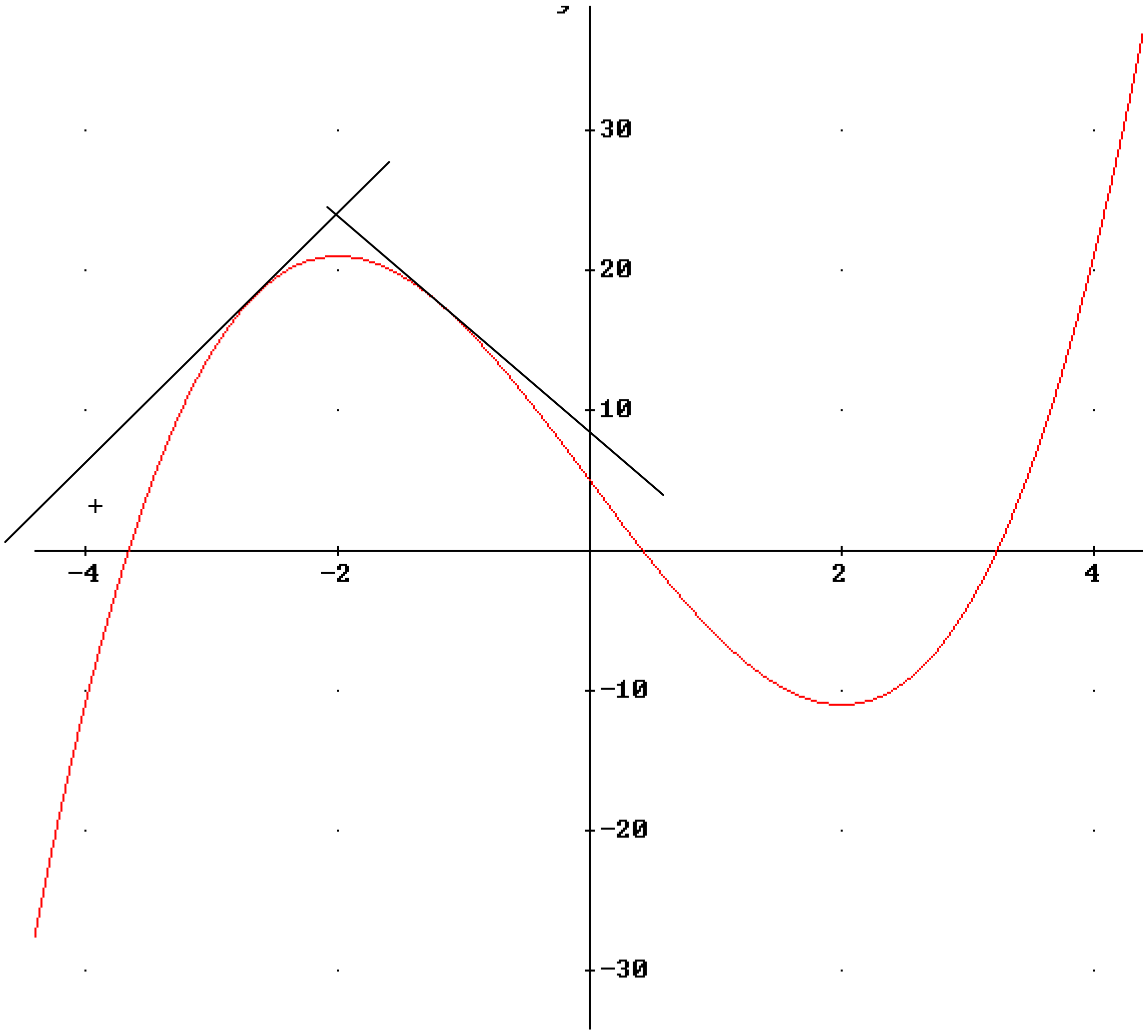
1. Monotonía. Crecimiento y decrecimiento de una función

En el tema anterior relacionamos las derivadas con la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica descrita por la función, es decir, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en $x=x_0$.

Vamos a relacionar el signo de $m=f'(x_0)$ con el crecimiento o decrecimiento de la función; para esto nos valemos del siguiente ejemplo:

$y=f(x)=x^3-12x+5$

$f'(x)=3x^2-12=3\cdot(x-2)\cdot(x+2)$



	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
Signo f'(x)	+	0	-	0	+
Crecimiento	↗		↘		↗

Claramente vemos que cuando $f'(x_0)>0$ la recta tangente es creciente, pues la pendiente es positiva, y por lo tanto f(x) es creciente en x_0. De igual forma si $f'(x_0)<0$ la recta tangente es decreciente, pues su pendiente es negativa, y por lo tanto f(x) es decreciente en x_0

Conclusión:

a) Si $f'(x_0)>0$ la función f(x) es estrictamente creciente en x_0

b) Si $f'(x_0)<0$ la función f(x) es estrictamente decreciente en x_0

2. Extremos relativos

Antes de relacionar los extremos relativos con la derivada definámoslos.

Definición: Extremo relativo de una función f(x) es todo punto x_0 tal que, para todo entorno del punto $E(x_0,r)$, se cumple que la función en este intervalo crece y decrece. Según crezca antes o después de x_0, distinguimos dos tipos de extremos relativos:

a) Máximo relativo en x_0: la función crece hasta x_0 y decrece a partir de x_0.

b) Mínimo relativo en x_0: la función decrece hasta x_0 y crece a partir de x_0.

Está claro que si x_0 es un extremo relativo de f(x), en este punto la gráfica ni crece ni decrece, luego una condición necesaria es que $f'(x_0)=0$, así la pendiente de la recta tangente es m=0, siendo por tanto paralelo al eje x. Pero está no es la única condición. Es necesario, que además, se cumpla una segunda condición que además nos permite discernir si es máximo o mínimo relativo:

- Sea x_0 un punto de una función en el que se cumple
  a) $f'(x_0)=0$
  b) $f''(x_0)<0$

  entonces $(x_0,f(x_0))$ es ***máximo relativo***
- Sea x_0 un punto de una función en el que se cumple
  a) $f'(x_0)=0$
  b) $f''(x_0)>0$

  entonces $(x_0,f(x_0))$ es ***mínimo relativo***

En la práctica, si se cumple que $f'(x_0)=0$ y viendo el crecimiento de la función antes y después del punto podemos ver si es punto relativo y si es máximo o mínimo.

En el caso de que $f'(x_0)=0$ pero también $f''(x_0)=0$ (esto ocurre cuando x_0 es raíz doble o de mayor multiplicidad de f'(x)), no podemos asegurar que este punto sea extremo relativo y hay que estudiar las derivadas de orden superior. Tendremos que calcular las derivadas en x_0, hasta la primera derivada no nula. Para ver si la función tiene extremo relativo o no vemos el siguiente esquema:

$f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(n-1}(x_0)=0$

→ $f^{(n}(x_0)\neq 0$ con n impar → x_0 Punto de Inflexión

→ $f^{(n}(x_0)\neq 0$ n par

→ $f^{(n}(x_0)>0$ → x_0 mínimo

→ $f^{(n}(x_0)<0$ → x_0 máximo

Ejemplo: Estudiar si en las siguientes funciones hay máximo, mínimo o punto de inflexión en x=0

a) $y=f(x)=x^3$ → $f'(x)=3x^2$ en x=0 → $f'(0)=0$

→ $f''(x)=6x$ en x=0 → $f''(0)=0$

→ $f'''(x)=6$ en x=0 → $f'''(0)=6$

Como la primera derivada no nula es la tercera (impar), tenemos un Punto de Inflexión en P. I (0,f(0))=(0,0)

b) $y=f(x)=x^4$ → $f'(x)=4x^3$ en x=0 → $f'(0)=0$

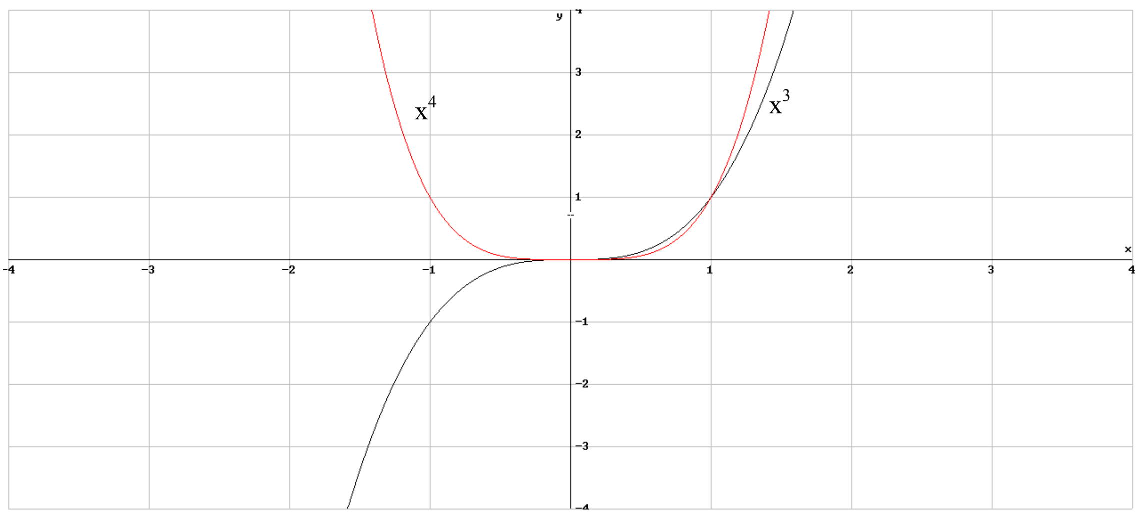
→ $f''(x)=12x^2$ en x=0 → $f''(0)=0$

→ $f'''(x)=24x$ en x=0 → $f''(0)=0$

→ $f^{IV}(x)=24$ en x=0 → $f^{IV}(0)=24$

Como la primera derivada no nula es la cuarta (par), tenemos un Punto relativo en x=0. Además como $f^{IV}(0)=24>0$ será mínimo m(0,f(0))=(0,0)

Veamos las gráficas de $y=x^3$ e $y=x^4$:



Ejercicio 1: Estudiar la monotonía, y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $y=f(x)=2x^3-15x^2+36x-12$

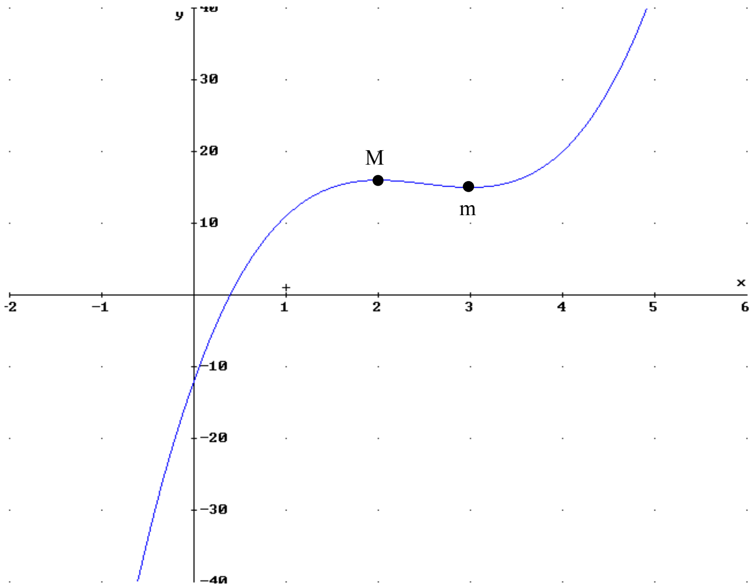
Veamos el signo de la derivada: $f'(x)=6x^2-30x+36$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)=0 \rightarrow x=2,\ x=3$

$f''(x)=12x-30$

	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,\infty)$
Signo f'(x)	+	0	-	0	+
Crecimiento	↗	$(2,f(2))=(2,16)$	↘	$(3,f(3))=(3,15)$	↗
		$f''(2)<0$ Máximo		$f''(3)>0$ Mínimo	

Máximo $M(2,f(2))=(2,16)$ Mínimo $m(3,f(3))=(3,15)$



b) $y=x/\ln(x)$

Primero estudiemos el dominio. Veamos los puntos que no pertenecen al dominio

a) $x>0$ (por el logaritmo neperiano)

b) Denominador es cero: $\ln(x)=0 \rightarrow x=e^0=1$, asíntota vertical

$Dom(f(x))=(0,\infty)-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-x\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}=0 \rightarrow \ln(x)-1=0 \rightarrow x=e^1$$

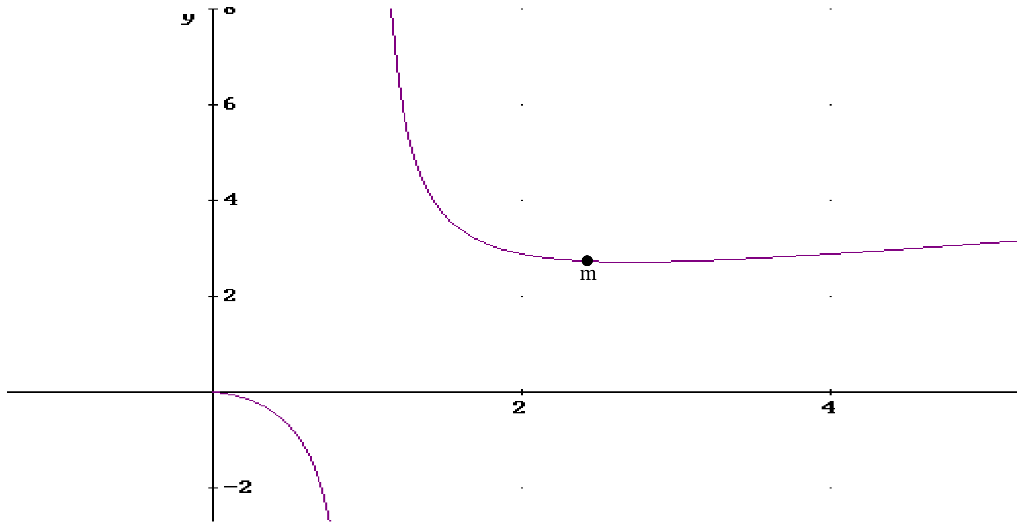
$$f''(x)=\frac{\frac{\ln^2(x)}{x}-2\ln(x)\frac{\ln(x)-1}{x}}{\ln^4(x)}=\frac{2\ln(x)-\ln^2(x)}{x\cdot\ln^4(x)}=\frac{2-\ln(x)}{x\ln^3(x)}$$

Además de los puntos donde se anula la primera derivada hay que añadir los puntos que no pertenecen al dominio, ya que en ellos puede cambiar el crecimiento. En este caso añadimos x=1.

Nota: las asíntotas verticales no suelen cambiar la monotonía aunque si la curvatura.

	(0,1)	1	(1,e)	e	(e,∞)
Signo f'(x)	-		-	0	+
Crecimiento	↘	$\notin Dom(f(x))$	↘	(e,f(e))=(e,e)	↗
				f''(e)=1/e>0 Mínimo	

Mínimo m(e,f(e))=(e,e)



c) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x - 4}$

Dominio=R-{4}

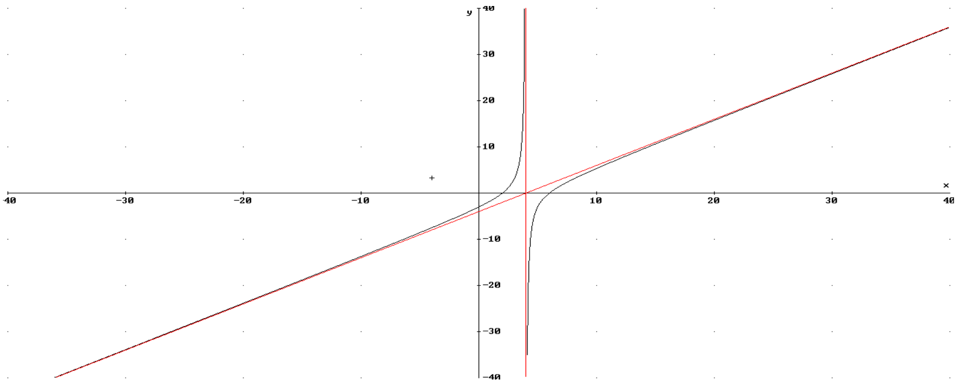
f ´(x)=$\dfrac{x^2 - 8x + 20}{(x-4)^2}$,

f ''(x)=$\dfrac{8x - 32}{(x-4)^4}$

Signo de f'(x): $x^2 - 8x + 20$ =0 No solución→ no extremos relativos (f'(x)>0)

Sólo tenemos que ver el crecimiento antes y después de x=4, que no pertenece al dominio:

	$(-\infty,4)$	4	$(4,\infty)$
Signo f'(x)	+	$\notin Dominio$	+
Crecimiento	↗		↗



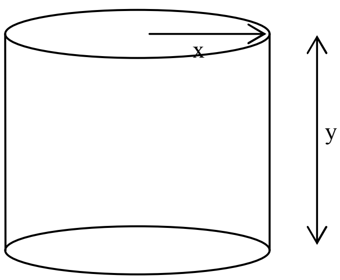
3. Optimización

En muchas situaciones se plantean problemas de optimización, es decir hacer que una función sea máxima o mínima para unas premisas impuestas.

Los casos de optimización que trabajaremos es cuando la función depende de una sola variable. Pasos a seguir para optimizar:

1. Expresar la función que deseamos optimizar en función todas variables.
2. Si la función tiene más de una variable relacionar las variables con los datos del problema y obtener una función de una sola variable (mediante la función ligadura).
3. Derivar la función, igualarla a cero y así obtener los puntos relativos
4. Comprobar, mediante la segunda derivada, si estos puntos son máximos o mínimos.

Ejemplo: Se quiere construir botes de enlatar de forma cilíndrica de 10 litros de capacidad. Calcular las dimensiones para que el gasto sea mínimo



$V=10=\pi x^2 \cdot y$ (función ligadura) $\rightarrow y=10/(\pi x^2)$

El gasto es proporcional a la superficie (función a optimizar):

Gasto(x,y)=K·Superficie=$K(2\cdot\pi x^2+2\pi x\cdot y)\rightarrow$

$G(x)=K\cdot[2\pi x^2+2\pi x\cdot(10/\pi x^2)]=K[2\pi x^2+20/x]$

$G'(x)=K[4\pi x-20/x^2]=0 \rightarrow 4\pi x-20/x^2=0 \rightarrow 4\pi x^3-20=0$

r=x=$\sqrt[3]{5/\pi}$ **dm** $\rightarrow$ **h=y=**$\dfrac{10}{\pi\sqrt[3]{25/\pi^2}}$ **dm** $G''(x)=4\pi+40/x^3 \rightarrow G''(\sqrt[3]{5/\pi})>0$ **Mínimo**

Ejercicio 2: Descomponer el número 48 en dos sumandos tal que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

$48=x+y$ (ligadura)→ $y=48-x$

$f(x,y)=5y^2+6x^2$ (función a optimizar)

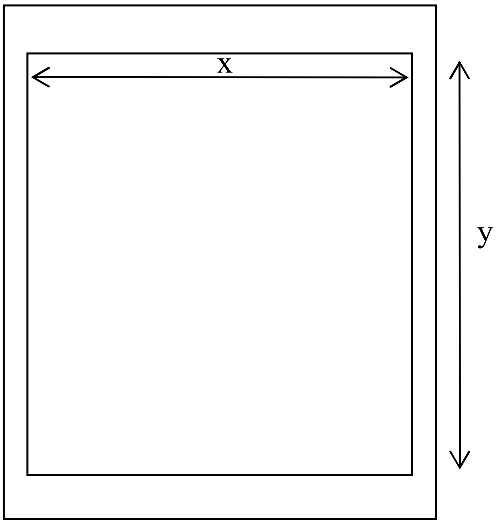
$f(x)=5\cdot(48-x)^2+6\cdot x^2=11520-480x+11x^2$

$f'(x)=-480+22x=0$

$x=240/11$, $y=288/11$

$f''(x)=22$ $f''(240/11)>0$ **Mínimo**

Ejercicio 3: Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Obtener las dimensiones que minimizan la superficie del papel



$x\cdot y=18$ (ligadura)→ $y=18/x$

$Area(x,y)=(x+2)\cdot(y+4)$ (función a optimizar)
$A(x)=(x+2)\cdot(18/x+4)=18+4x+36/x+8=26+4x+36/x$

$A'(x)=4-36/x^2=0$ → **$x=3$cm $y=6$cm**

$A''(x)=72/x^3$ $A''(3)>0$ **mínimo** → Dimensiones: 5cm x 10cm

4. Curvatura

Veamos las definiciones de los dos tipos de curvaturas posibles en una función:

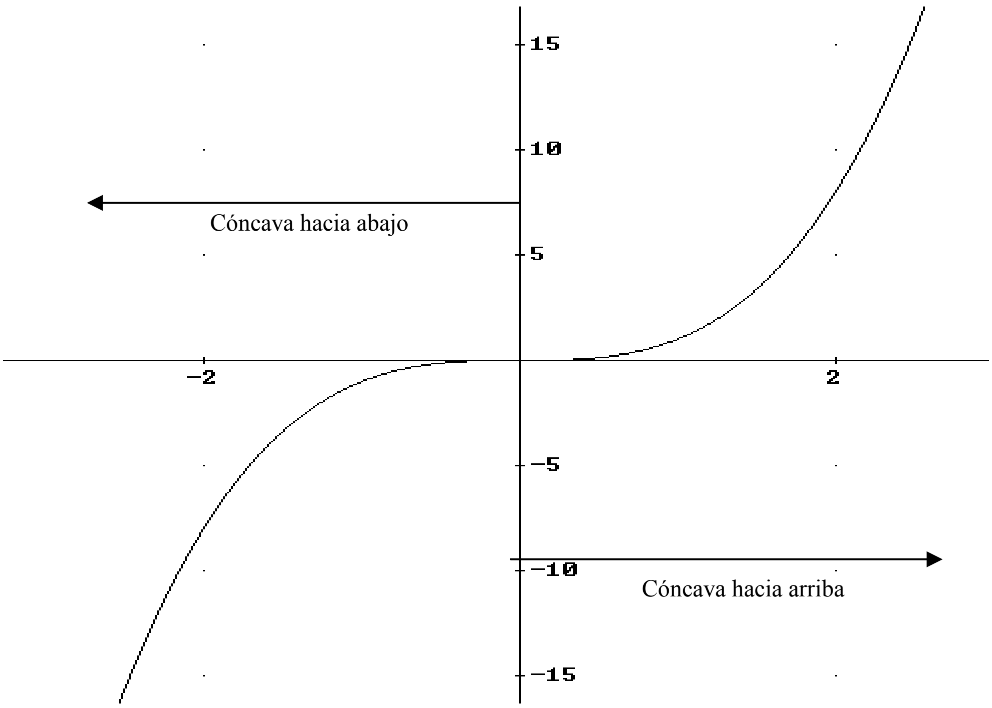
Definición 1: Una función es **cóncava hacia las y positivas o cóncava hacia arriba** en un punto $P(x_0,y_0)$, si la recta tangente en este punto está por debajo de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de $\cup$

Definición 2: Una función es **cóncava hacia las y negativas o cóncava hacia abajo** en un punto $P(x_0,y_0)$, si la recta tangente en este punto está por encima de los puntos próximos a P. Gráficamente tiene forma de $\cap$.

Podemos saber si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo a partir de la segunda derivada:

- Si **$f''(x_0)>0$**, entonces f(x) es **cóncava hacia arriba** en el punto $(x_0,f(x_0))$. (Recordar la curvatura de $y=f(x)=x^2$ y como $f''(x)=2>0$)
- Si **$f''(x_0)<0$**, entonces f(x) es **cóncava hacia abajo** en el punto $(x_0,f(x_0))$. (Recordar la curvatura de $y=f(x)=-x^2$ y como $f''(x)=-2<0$)

Ejemplo: $y=f(x)=x^3$ $f''(x)=6x$, si $x>0$ cóncava hacia arriba y si $x<0$ hacia abajo



5. Puntos de Inflexión

Uno de los puntos más importantes a la hora de representar una función son los puntos de inflexión; veamos que es un punto de inflexión:

Definición: Se dice que f(x) tiene **punto de inflexión** en **$(x_0,f(x_0))$** si en ese punto cambia la curvatura de la función, es decir pasa de ser cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o al revés. En este punto la recta tangente a la función corta a la función.

Vamos a ver la relación entre los puntos de inflexión y las derivadas de la función, en el siguiente teorema:

Si f(x) cumple en x_0 que la segunda derivada es nula (**$f''(x_0)=0$**) y además la tercera derivada es distinta de cero (**$f'''(x_0)\neq 0$**), entonces la función f(x) tiene un **punto de inflexión en $(x_0,f(x_0))$.**

En el caso de que tanto $f''(x_0)=0$ como $f'''(x_0)=0$, tendremos que recurrir a las derivadas de orden superior, y ver el orden de la primera no nula en x_0. Como vimos en el apartado 2.

$f^{(n}(x_0)\neq 0$ con n impar → x_0 Punto de Inflexión

$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(n-1}(x_0) = 0$ → $f^{(n}(x_0) \neq 0$ n par → $f^{(n}(x_0) > 0$ → x_0 mínimo

$f^{(n}(x_0) \neq 0$ n par → $f^{(n}(x_0) < 0$ → x_0 máximo

Ejemplo: Estudia el crecimiento, puntos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión de la función f(x)=$\frac{x-1}{x+1}$

Primero estudiemos el dominio Dom(f)=R-{-1}

f'(x)=$\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

Vemos que siempre es positiva para todo valor de x que pertenezca al dominio:

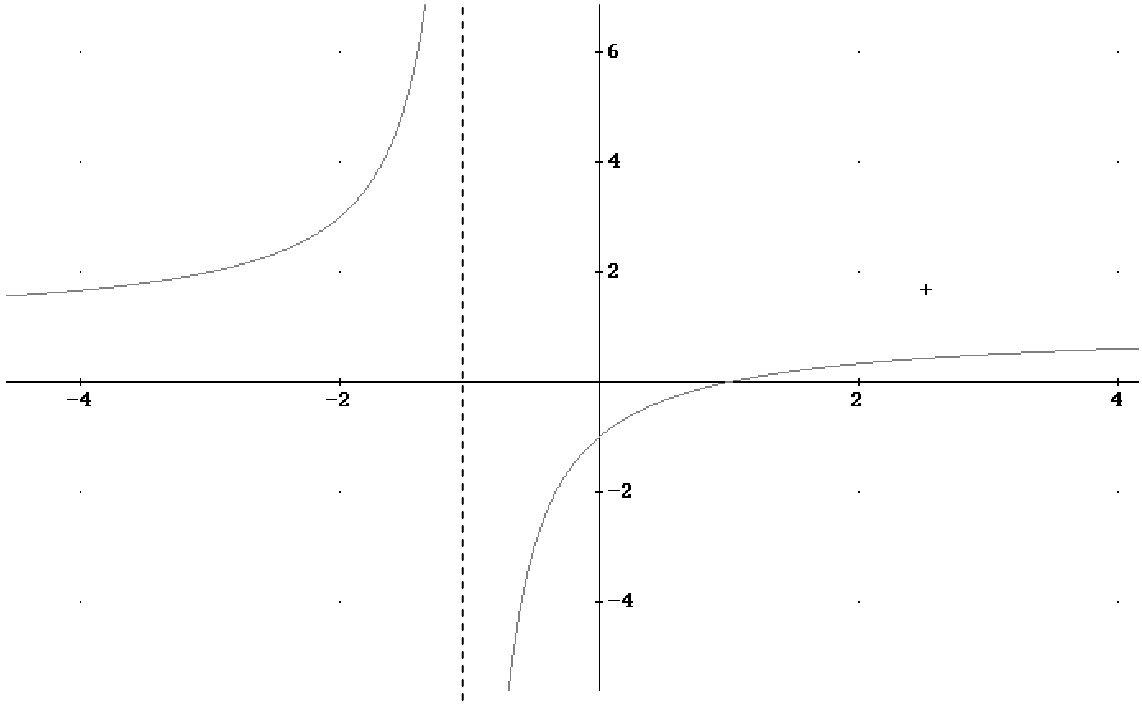
	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f'(x)	+	No existe -1$\notin$Dom(f)	+
Crecimiento	↗		↗
		No Punto relativo	

Calculemos ahora la curvatura y los puntos de inflexión

f ''(x)=$\frac{-4}{(x+1)^3}$

El signo de la segunda derivada es:

	(-∞,-1)	-1	(-1,∞)
Signo f''(x)	+	No existe -1$\notin$Dom(f)	-
Cocavidad	$\cup$		$\cap$
		No P.I.	



Ejercicio 4: Estudiar monotonía y curvatura de $f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$

Primero vemos el dominio de f(x), como $x^2-2x+1=(x-1)^2$, entonces →Dom(f)=R-{1}

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-2x+1)-(2x-2)\cdot x^2}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{2x-2x^2}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-2x\cdot(x-1)}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-2x}{(x-1)^3}$$

f'(x)=0→ x=0

	(-∞,0)	0	(0,1)	1	(1,∞)
Signo f'(x)	-	0	+	No existe	-
Crecimiento	↘	m(0,f(0))=(0,0)	↗	1∉Dom(f)	↘
		f ''(0)>0 Mínimo			

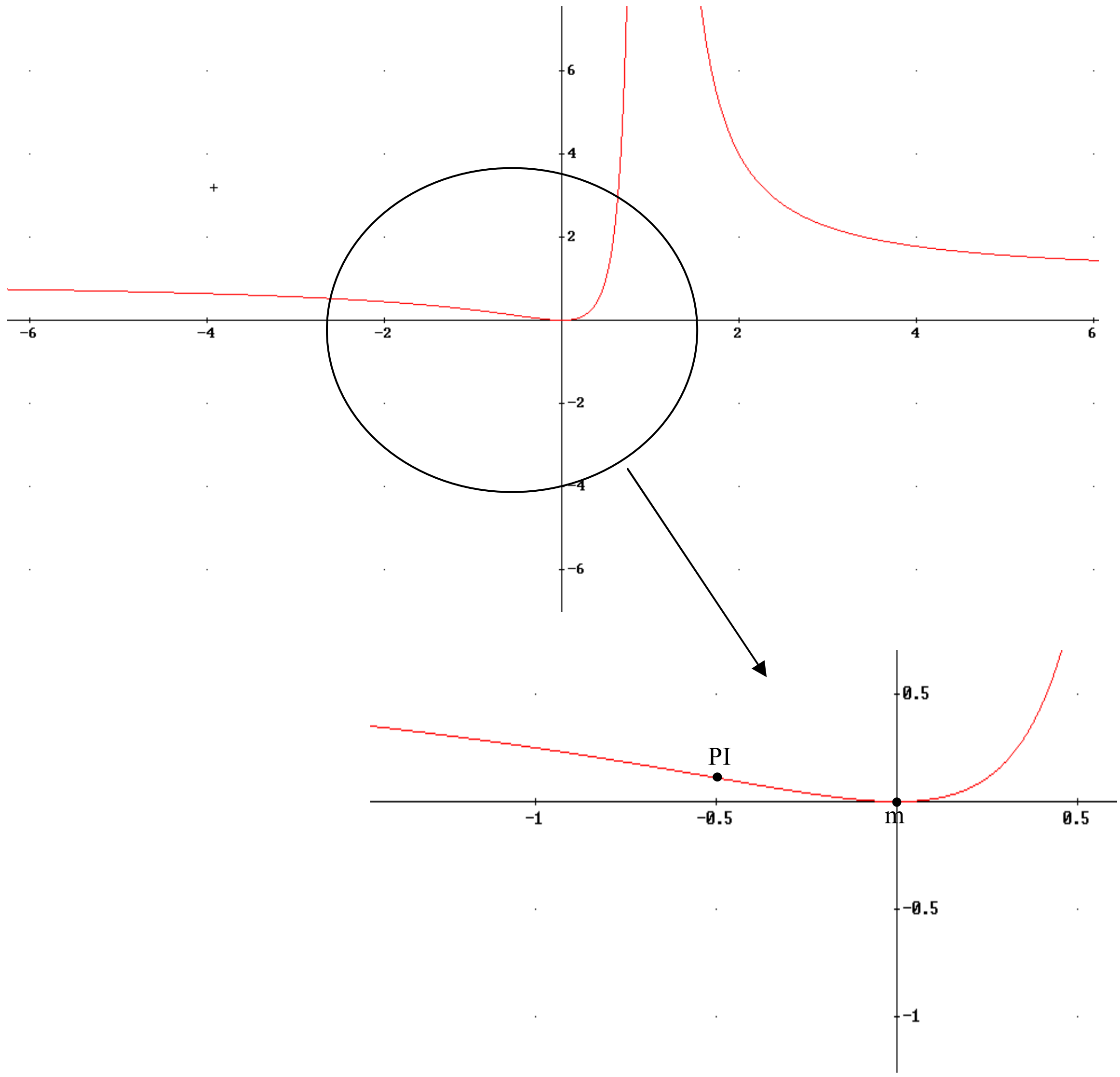
$$f''(x)=\frac{(2-4x)\cdot(x^2-2x+1)^2-2\cdot(x^2-2x+1)\cdot(2x-2)\cdot(2\cdot x-2x^2)}{(x^2-2x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-2x+1)\cdot\left[(2-4x)(x^2-2x+1)+8x^3-16x^2+8x\right]}{(x^2-2x+1)^4}=\frac{(x^2-2x+1)(-4x^3+6x^2-2)}{(x^2-2x+1)^4}=$$

$$=\frac{-2\cdot(x^2-2x+1)^2\cdot(2x+1)}{(x^2-2x+1)^4}=\frac{-4\cdot(x+1/2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

Se anula en x=-1/2

	(-∞,-1/2)	-1/2	(-1/2,1)	1	(1,∞)
Signo f''(x)	-	0	+	No existe	+
Concavidad	∩	PI(-01/2,f(-1/2))= =(-0.5,1/9)	∪	1∉Dom(f)	∪
		f '''(-1/2)≠0			



Nota: darse cuenta que en este ejemplo en la asíntota vertical x=1 si cambia la curvatura, pasando de creciente a decreciente, esto es porque x=1 es una raíz doble del denominador. Cuando esto ocurre cambia la monotonía pero no la curvatura.

Ejercicio 5: sean $f(x)=x^3$, $g(x)=x^4$ y $h(x)=x^5$; determinar si en $x=0$ hay un P.I. o un punto relativo.

a) $f'(x)=3x^2 \rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=6x \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=6 \rightarrow f'''(0)=6\neq 0$

n=3 P.I.(0,0)

b) $g'(x)=4x^3 \quad \rightarrow \quad g'(0)=0$

$g''(x)=12x^2 \quad \rightarrow \quad g''(0)=0$

$g'''(x)=24x \quad \rightarrow \quad g'''(0)=0$

$g^{(4}=24 \rightarrow \quad g^{(4}=24>0$

n=4 Punto relativo Mínimo $\rightarrow$ m(0,0)

c) $h'(x)=5x^4 \quad \rightarrow \quad h'(0)=0$

$h''(x)=20x^3 \quad \rightarrow \quad h''(0)=0$

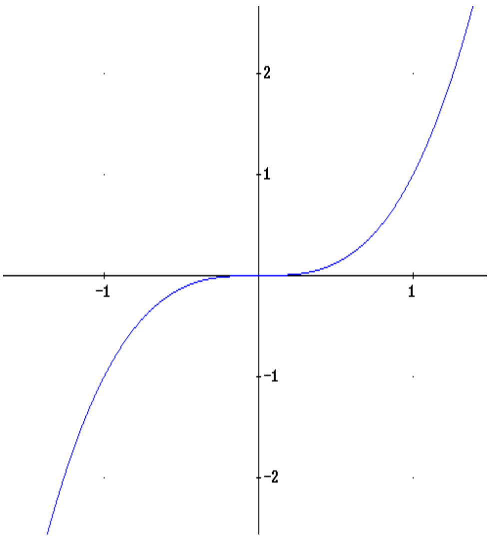
$h'''(x)=60x^2 \quad \rightarrow \quad h'''(0)=0$

$h^{(4}(x)=120x \quad \rightarrow \quad h^{(4}(0)=0$

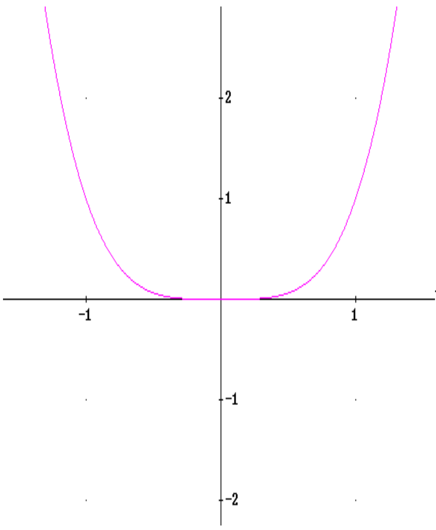
$h^{(5}(x)=120 \quad \rightarrow \quad h^{(5}(0)=120\neq 0$

n=5 P.I. (0,0)

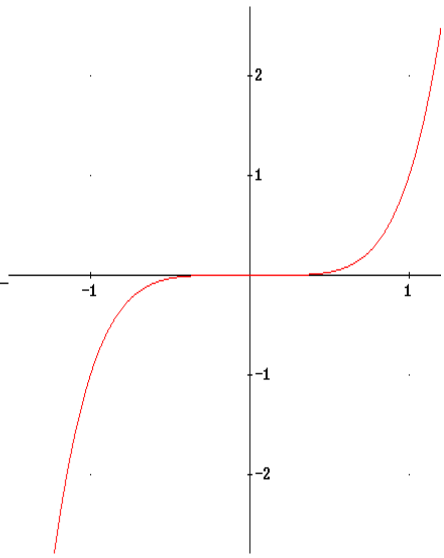
$y=x^3$



$y=x^4$



$y=x^5$



6. Propiedades de las funciones derivables

6.1. Teorema de L'Hopital

Ya hemos visto en el tema anterior que hay límites que, para calcularlos, es necesario utilizar el teorema de L'Hopital, veamos en que consiste:

Teorema: Sean f(x) y g(x) continuas y derivables en x_0 que verifican:

a) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$

b) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ entonces se cumple:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es válida para $x_0 \in R$, $+\infty$ o $-\infty$.

Esta regla se puede aplicar sucesivas veces si el límite sigue siendo ∞/∞ o 0/0

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-sen(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{12x}{sen(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{12}{\cos(x)}=12$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2+2}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

d) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$

e)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tg(x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg(x)}{\frac{1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-2sen(x)\cos(x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-sen^2(x)+\cos^2(x)}=-1$$

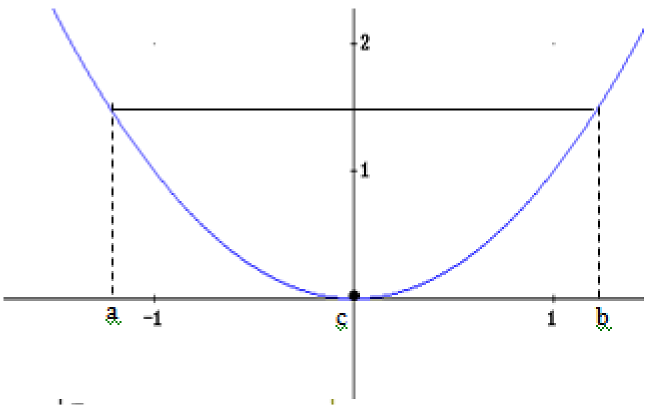
6.2. Teorema de Rolle

Un teorema muy importante es el denominado teorema de Roll que nos demuestra que cuando una función derivable pasa dos veces por la misma altura entonces tiene un punto relativo entre estos dos puntos:

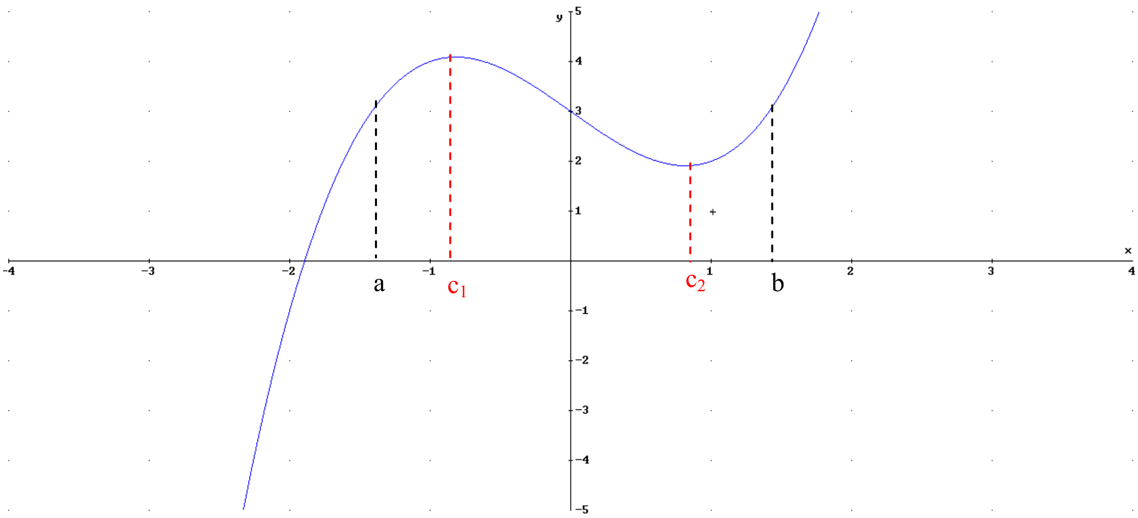
> ***Teorema de Rolle:*** Sea f(x), que cumple las siguientes condiciones:
>
> - continua en [a,b]
> - derivable en (a,b)
> - f(a)=f(b)
>
> entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$, tal que $f'(c)=0$ (es decir tiene al menos un máximo o mínimo relativo)

Veamos cómo es fácil de interpretar este teorema, si lo hacemos de forma gráfica, es semejante al de Bolzano

Interpretación gráfica:



Puede ocurrir que haya dos o más puntos que cumplan el teorema ($f'(c)=0$)



Ejercicios PAU:

Sólo veremos los que están relacionados con la optimización y con L'Hopital, los relativos al crecimiento y a la curvatura se verán en el tema siguiente

A) Optimización

Septiembre 2004. Prueba B.

PR2.- a) Dada la función f(x)=1/x+ln(x) definida en [1,e], calcular la recta tangente con mayor pendiente. Escribir ecuación de dicha recta

La pendiente de las rectas tangentes viene dada por la derivada de f(x)→

f '(x)=$-1/x^2+1/x$. Como tenemos que buscar el valor con mayor pendiente, la función a optimizar es f'(x), que llamaremos g(x), g(x)=f'(x). Optimicémosla

g'(x)=$\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{2-x}{x^3}$=0 → 2-x=0 →x=2$\in$[1,e]

Veamos si es máxima o mínima: g''(x)=$2/x^3-6/x^4$ g''(2)=1/4-3/8<0 **máximo**

La pendiente máxima es m_{max}=g(2)=f '(2)=-1/4+1/2=1/4; esta es la pendiente de la recta tangente en el punto P(2,f(2))=(2,1/2+ln(2))

La recta tangente es por tanto: y-(1/2+ln(2))=1/4(x-2) → **y=0.25·x+ln(2)**

Junio 2006. Prueba A.

PR-2 Considérense las funciones f(x)=e^x, g(x)=$-e^{-x}$. Para cada recta *r* perpendicular al eje *OX*, sean *A* y *B* los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de *f* y *g*, respectivamente. Determínese la recta *r* para la cual el segmento *AB* es de longitud mínima.

Las rectas perpendiculares al eje OX son del tipo x=x_0. Corte con las gráficas

a) f(x)=e^x → A(x_0,e^{x_0})
b) g(x)=$-e^{-x}$→ B(x_0,$-e^{-x_0}$)

Longitud segmento AB → d(A,B)=$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|(0,e^{x_0}+e^{-x_0})\right|=\sqrt{\left(e^{x_0}+e^{-x_0}\right)^2}=e^{x_0}+e^{-x_0}$

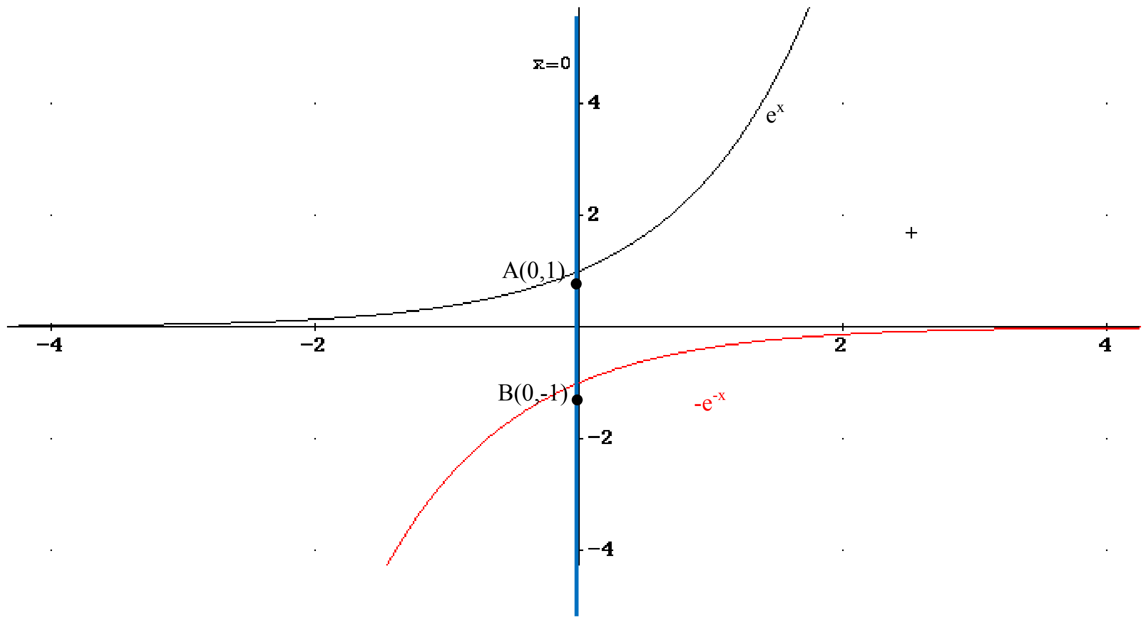
d(x_0)= $e^{x_0}+e^{-x_0}$. Como tiene que ser distancia mínima, calculemos la derivada de d(x_0) e igualemos a cero

d'(x_0)= $e^{x_0}-e^{-x_0}$=0 → $e^{x_0}=e^{-x_0}$ → $x_0=-x_0$ → $\mathbf{x_0=0}$.

Veamos si es mínima o máxima d''(x)= $e^{x_0}+e^{-x_0}$ d''(0)=2>0 **Mínimo**

Por tanto la recta es x=0. Corta con f(x) en (0,e^0)=(0,1) y con g(x) en (0,$-e^{-0}$)=(0,-1)

Así la recta que minimiza la distancia entre las dos funciones es **x=0**



Septiembre 2008. Prueba B

PR-2. Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación y=x^2-1, los que se encuentran a distancia mínima del punto A(-2,-1/2)

Los puntos de la parábola son P(x, x^2-1). La distancia entre P y A es:

$$d(A,P)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left(x+2,x^2-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{(x+2)^2+(x^2-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{x^2+4x+4+x^4-x^2+\frac{1}{4}}$$

$d(x)=\sqrt{x^4+4x+\frac{17}{4}}$ →Nota si buscamos el valor que minimice la distancia se cumplirá también que para ese valor d^2 también será mínima, (siendo la función mucho más sencilla al quitarnos la raíz): f(x)=$(d(x))^2$=$x^4+4x+\frac{17}{4}$

$f'(x)=4x^3+4$ → x=-1 → **P(-1,0)**

Veamos que es mínimo $f''(x)=12x^2$, $f''(-1)=12>0$, es **mínimo**

Otros ejercicios optimización:

Ejercicio 6: sean las funciones f(x)=x-2 y g(x)=e^x, de todas las rectas paralelas al eje OX que cortan en A a g(x) y a B a f(x), calcular aquella que minimiza las distancias entre los dos puntos.

Las rectas paralelas al eje OX son de la forma y=t, que será el parámetro libre. Los puntos A y B serán:

$$A=\begin{cases} y=t \\ y=e^x \end{cases} \qquad e^x=t \rightarrow A(\ln(t),t)$$

$$B=\begin{cases} y=x-2 \\ y=t \end{cases} \qquad x=t+2 \rightarrow B(t+2,t)$$

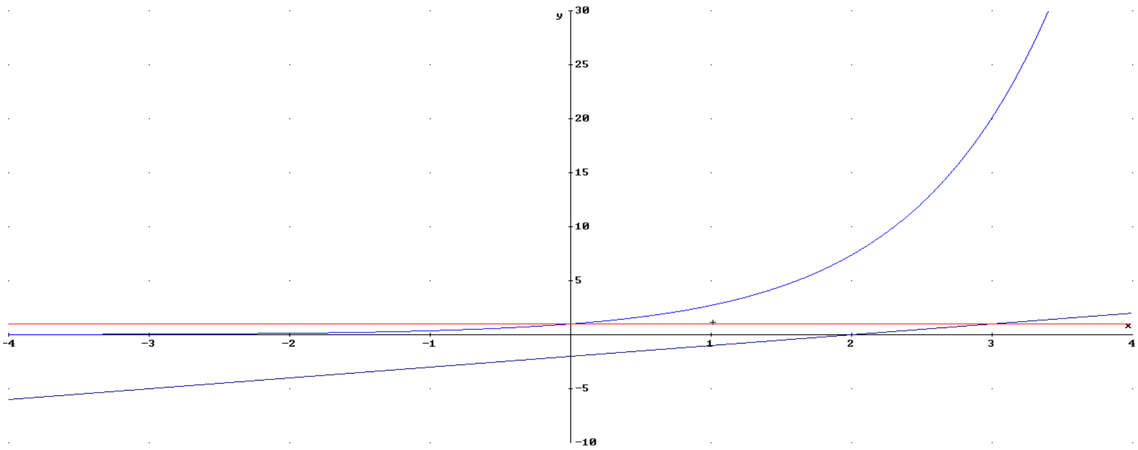
$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=|t+2-\ln(t),0|=\sqrt{(t+2-\ln(t))^2+0^2}=t+2-\ln(t)$$

La función que tenemos que maximizar será d(t)=t-2-ln(t):

$d'(t)=1-\frac{1}{t}=0 \rightarrow t=1.$

Comprobemos que es un **mínimo**: $d''(t)=-\frac{1}{t^2} \rightarrow d''(1)<0$

Luego la recta buscada es **y=1.**



Ejercicio 7: sea la función f(x)=e^{-x^2}, calcular el punto P de la gráfica tal que la ordenada en el origen de la recta tangente a dicha función en P sea máxima.

Los puntos de la gráfica serán P(t,f(t))=(t, e^{-t^2}) y las pendientes de las rectas tangentes para estos puntos vienen definidas por m=f´(t)=-2t·e^{-t^2}. De esta forma las rectas tangentes son:

r: $y-y_0=m(x-x_0)$ → r: $(y-e^{-t^2})=-2te^{-t^2}(x-t)$ → r: $y=(-2te^{-t^2})x+(e^{-t^2}+2t^2e^{-t^2})$. Por lo tanto la ordenada en el origen es $n(t)=e^{-t^2}+2t^2e^{-t^2}$.

Calculemos el valor de t que minimiza la función:

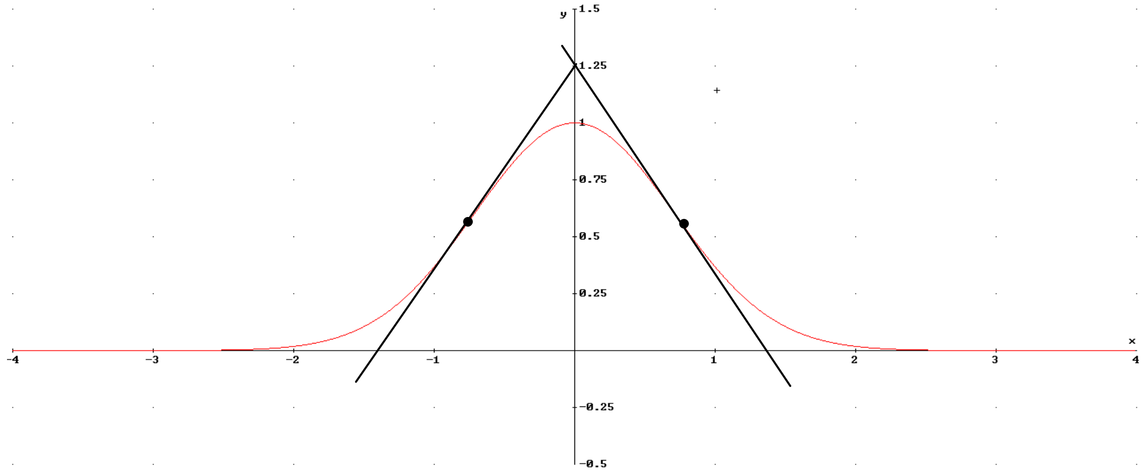
$n'(t)=-2te^{-t^2}+4t\cdot e^{-t^2}-4t^3\cdot e^{-t^2}=(2t-4t^3)\,e^{-t^2}=0 \rightarrow 2t(1-2t^2)=0 \rightarrow t=0,\ t=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Veamos cuál de estos valores máximiza la función:

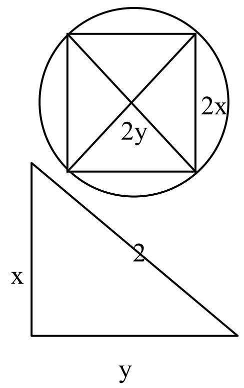
$n''(t)=2e^{-t^2}(4t^4-8t^2+1)$

$n''(0)>0$ Mínimo

$n''(\pm\sqrt{\frac{1}{2}})<0$ Máximo. Luego los punto son $\mathbf{P_1(\sqrt{\frac{1}{2}},\ e^{-1/2}),\ \ P_2(-\sqrt{\frac{1}{2}},\ e^{-1/2})}$



Ejercicio 8: calcular el rectángulo de área máxima inscrita en una circunferencia de radio 2cm:



Área(x,y)=4·x·y (función a optimizar)

$x^2+y^2=4$ (ligadura) $\rightarrow x=\sqrt{4-y^2}$

$A(y)=4y\cdot\sqrt{4-y^2}$

$A'(y)=4\cdot\sqrt{4-y^2}-\frac{4y^2}{\sqrt{4-y^2}}=0 \rightarrow \frac{16-4y^2-4y^2}{\sqrt{4-y^2}}=0$

$y=\sqrt{2}$ cm $\rightarrow$ $x=\sqrt{2}$ cm (cuadrado)

Veamos que es máxima: $A''(\sqrt{2})<0$. **Máximo**

B) L'Hopital

PAU Septiembre 2006. Prueba A C-3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))-1+\cos(x)}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{sen(x)}{\cos(x)}-sen(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg(x)-sen(x)}{2x}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-(1+tg^2(x))-\cos(x)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

PAU Junio 2006 (Prueba A) C-3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\cdot sen(2x)}{\cos(2x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg(2x)}{x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2(1+tg^2(2x))}{1}=-2$$

PAU Junio 2006 (Prueba B)C-4. Calcular a y b para que el límite sea 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{b}{0}(b=0\ para\ \lim ite\neq\infty)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+sen(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos(x)}{2\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}=\frac{2a+1}{2}=1\ \to a=1/2$$

PAU Septiembre 2004 (Prueba A) C-3

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg(2x)}{tg(6x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cdot(1+tg^2(2x))}{6\cdot(1+tg^2(6x))}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1+tg^2(2x))}{3\cdot(1+tg^2(6x))}=\frac{1}{3}$$

PAU Junio 2004 (Prueba B) C-1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)-x}{x\cdot sen(x)}\right)=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)+x\cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)}{\cos(x)+\cos(x)-xsen(x)}=\frac{0}{2}=0$$

PAU Septiembre 2005 (Prueba A) C-4. Calcular λ para que el límite valga -1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=-1\ \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)}{\cos^2(\lambda x)-1}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x\cdot\cos(x^2)}{-2\cdot\lambda\cdot sen(\lambda x)\cdot\cos(\lambda x)}=\frac{0}{0}$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\cos(x^2)-4x^2sen(x^2)}{2\cdot\lambda^2-4\cdot\lambda^2\cdot\cos^2(\lambda x)}=\frac{2}{-2\lambda^2}=-1$$

$\rightarrow\lambda^2=1\ \ \lambda=\pm 1.$

PAU Septiembre 2005 (Prueba B) C-3

$$\lim_{x\to 0}\ln(x)\cdot sen(x)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{sen(x)}}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{sen^2(x)}}=\lim_{x\to 0}-\frac{sen^2(x)}{x\cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}-\frac{2sen(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)-xsen(x)}=-\frac{0}{1}=0$$

PAU Junio 2005 (Prueba A) C-3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(x)}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{e^x}=\frac{0}{\infty}=0$$

PAU Junio 2007 (Prueba A). C-2

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

PAU Septiembre 2007 (Prueba B) C-4

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot(e^{2x}+e^{-2x})}{2}=4$$

PAU Junio 2008 (Prueba A). C-1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(2x)}{x^3+x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot sen(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2}{3x^2+2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\left(2\cdot\cos^2(2x)-2\cdot sen^2(2x)\right)}{6x+2}=\frac{8}{2}=4$$

PAU Septiembre 2008 (Prueba B). C-3: Calcular a para que el límite sea 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-ax}{x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot e^{ax}-a}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a(e^{ax}-1)}{2x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cdot e^{ax}}{2}=\frac{a^2}{2}=8$$

a=±4