TEMA 2 FUNCIONES. CONTINUIDAD.

1. Definición de Continuidad
2. Tipos de discontinuidades
3. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas
4. Teoremas de continuidad
   4.1. Teorema de conservación del signo
   4.2. Teorema de Bolzano
   4.3. Teorema de Darboux

Contexto con la P.A.U.

Los problemas que aparecen en el examen de la PAU relativos a este tema son de dos tipos:

1. Aplicaciones del teorema de Bolzano
2. Estudiar la continuidad de funciones

1) En muchos de los exámenes de la PAU aparecen cuestiones donde tenemos que aplicar el teorema de Bolzano. La forma de plantearnos el problema en el examen varía:

- Nos dan una ecuación y nos piden demostrar que existe al menos una solución (pueden darnos o no un intervalo) para tal ecuación
- Nos dan una función y nos piden demostrar que esa función toma un valor determinado (pueden darnos o no un intervalo)
- Nos dan dos funciones f(x) y g(x), nos piden demostrar que estas funciones se cortan (pueden darnos o no un intervalo), es decir f(x)=g(x).

Todos estos problemas se resuelven operando con las igualdades de forma que obtengamos una expresión de la forma F(x)=0, a dicha función, F(x), tendremos que aplicar Bolzano, bien en el intervalo que nos dan o buscar nosotros el intervalo.

En alguna de estas cuestiones se nos pide demostrar que la solución es única, para lo cual debemos probar que en ese intervalo la función es sólo creciente o decreciente, para lo cual necesitamos la derivada de la función y aplicar su relación con el crecimiento que veremos en el tema 4.

2) Otro problema típico de selectividad es el estudio de la continuidad y derivabilidad de una función (generalmente definida a trozos o un valor absoluto), o bien determinar el valor de unos parámetros para que la función sea continua o derivable. En este tema veremos cómo estudiar la continuidad de tales funciones, la derivabilidad se verá en el tema siguiente.

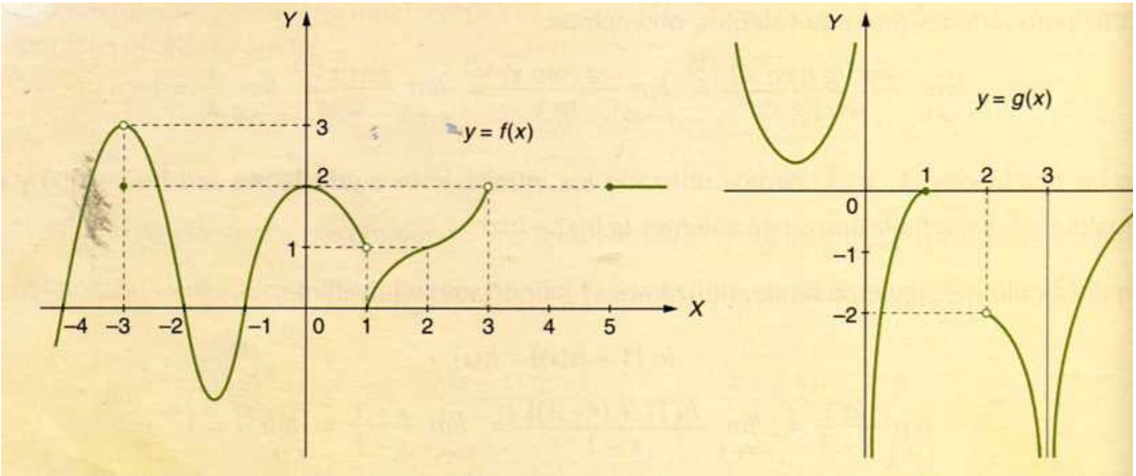
1. Definición de Continuidad

Veamos la definición de la continuidad:

Definición: Una función f(x) es continua en un punto x_0 si en dicho punto se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$
2. La función definida en x_0, es decir $x_0 \in$ Dom(f(x))
3. Los dos valores anteriores coinciden: $\lim_{x\to x_0} f(x)$=f(x_0).

Ejemplo:



1) Dom(f(x))=(-∞,3)∪[5,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=-3 → $\lim_{x\to -3} f(x)$ =3≠f(3)=2

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

c) x=5 → $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe pues no existe el límite por la izquierda

2) Dom(g(x))=(-∞,0)∪(0,1]∪(2,3)∪(3,∞)

Continua en todos los puntos del dominio menos en

a) x=0 → $\lim_{x\to 0} g(x)$ no existe pues los límites laterales son distintos

b) x=1 → $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe pues no existe el límite por la derecha

c) x=3 → $\lim_{x\to 3} g(x) = -\infty$ pero 3∉ Dom(g(x))

Definición: Una función f(x) es continua en un intervalo (a,b) si en todos los puntos del intervalo es continua. Esto ocurre cuando al dibujar la gráfica "no levantamos el boli de la hoja para dibujarla"

En el ejemplo anterior f(x) continua en $(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,3)\cup(5,\infty)$. La función g(x) en $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$.

2. Tipos de discontinuidades

Definición: Una función f(x) es discontinua en un punto x_0 si no es continua en dicho punto.

Existen dos tipos de discontinuidades:

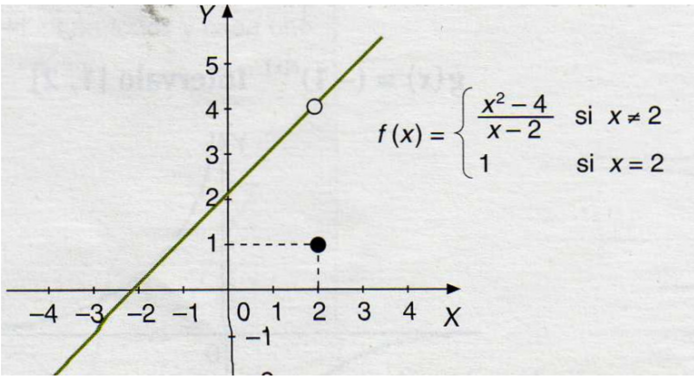
a) Discontinuidad evitable
b) Discontinuidad no evitable

***Discontinuidad evitable*:** Una función f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto x_0 si se cumple las siguientes condiciones:

1. El límite de la función en x_0 existe,
2. El límite no coincide con $f(x_0)$ o bien la función no está definida en x_0 (es decir $x_0 \notin Dom(f(x))$

Ejemplos:

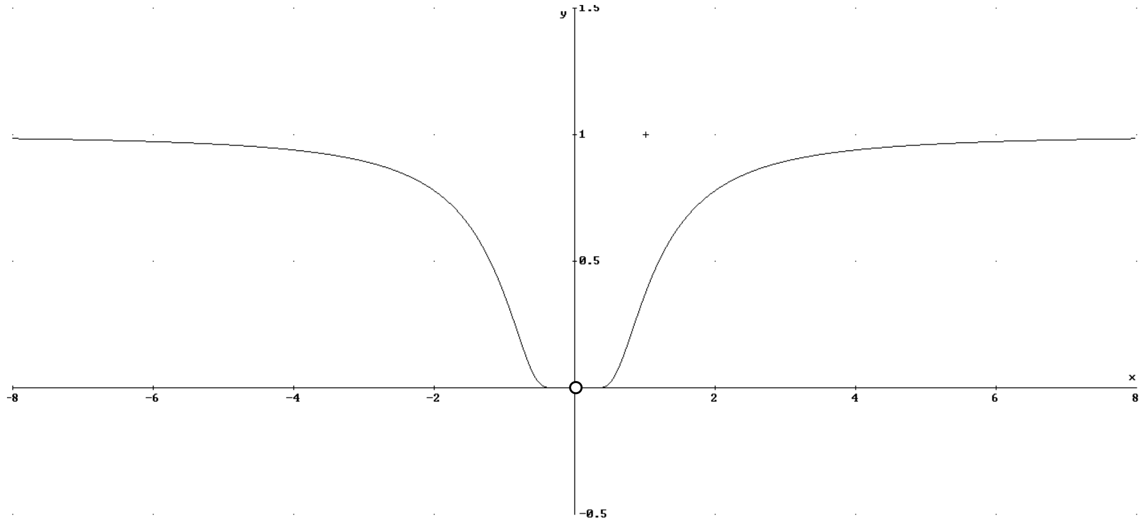
1)



$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2) = 1$. Esta discontinuidad se evita redefiniendo la función en x=2, haciendo que en este punto la función tome el mismo valor que el límite es decir f(2)=4

Así la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si\ \ x \neq 2 \\ 4 & si\ \ x = 2 \end{cases} =$ x+2 si es continua pues $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

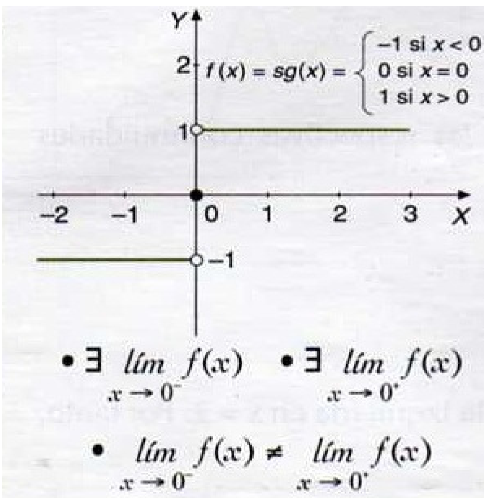
2) g(x)=$e^{-\frac{1}{x^2}}$



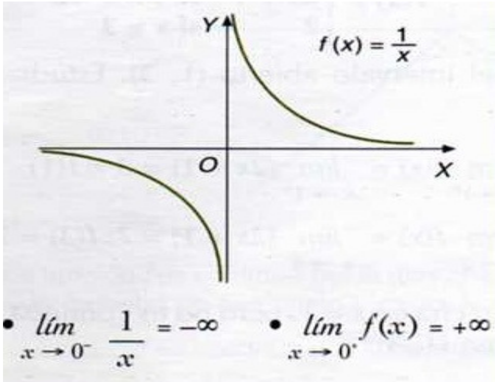
$\lim_{x\to 0} g(x)=0$ pero $0\notin$ Don(g(x)). Esta discontinuidad se evitaría si redefinimos la función tal que en x=0 esta valga lo mismo que el límite: g(x)=$\begin{cases} e^{-1/x^2} & si\ \ x\neq 0 \\ 0 & si\ \ x=0 \end{cases}$

Discontinuidad no evitable: Es aquella en la que el límite en el punto o no existe o es infinito. Pueden ser a su vez de 2 tipos:

1) *Salto finito en x_0*: los límites laterales no coinciden $\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$



2) *Salto infinito en x_0:* cuando los dos límites laterales en x_0 o al menos uno de ellos es $+\infty$ o $-\infty$.



3. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas.

Las funciones elementales, por lo general, son continuas en todos los puntos del dominio. Las discontinuidades más importantes aparecen en funciones definidas a trozos (discontinuidades evitables o de salto finito), y en funciones con denominador en el valor donde se anula éste (discontinuidad de salto infinito).

Operaciones de funciones continuas: Sean f(x) y g(x) funciones continuas en x_0

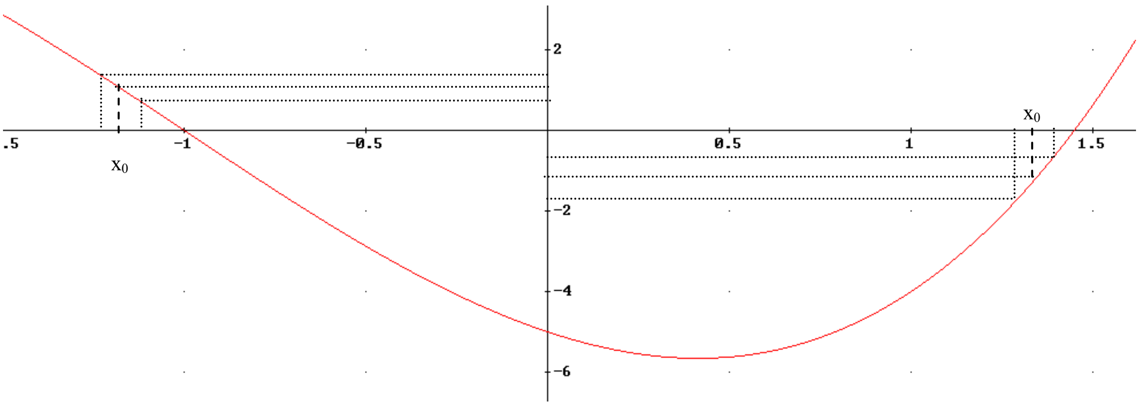
1) Las funciones suma y resta $(f \pm g)(x)$ son continua en x_0
2) La función producto $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_0
3) La función división $(f/g)(x)$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$
4) Si g(x) es continua en x_0 y f(x) es continua en $g(x_0)$ entonces la función compuesta $(f \circ g)(x)$ es continua en x_0.

4. Teoremas de Continuidad

4.1. Teorema de conservación del signo

Teorema de conservación del signo: si una función f(x) es continua en el punto x_0 de manera que $f(x_0) \neq 0$, se cumple que en un entorno del punto la función conserva el signo, Esto es si $f(x_0)>0$ se cumple que en un entorno de x_0 la función positiva, y si $f(x_0)<0$ entonces en un entorno de x_0 la función es negativa.

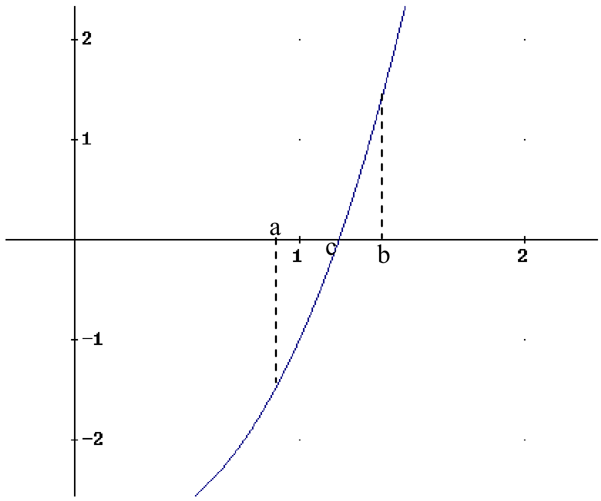
Veamos un ejemplo gráfico:

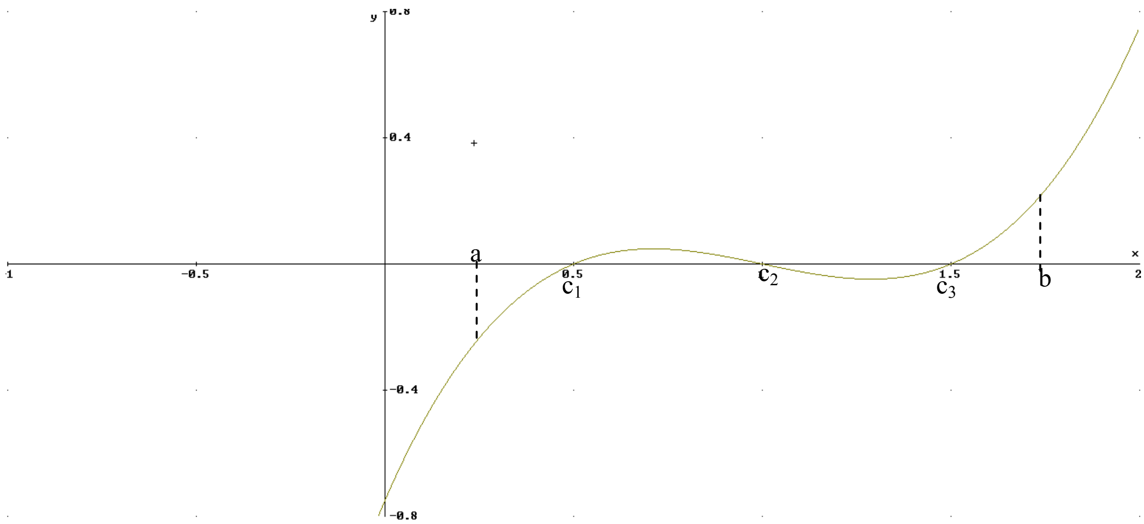


4.2 Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si una función f(x) es continua en un intervalo [a,b] tal que f(a) y f(b) tienen distinto signo (f(a)·f(b)<0), entonces existe al menos un punto c∈(a,b) tal que f(c)=0.

Veámoslo gráficamente:





Vemos que el teorema de Bolzano nos asegura al menos una valor c tal que f(c)=0, pero como vemos puede ocurrir que este valor de x no sea único. Para asegurar que sólo es único debemos además de aplicar Bolzano ver que la función en el intervalo (a,b) es siempre creciente o decreciente

Ejercicio1: encontrar un intervalo donde la función f(x)=$\frac{x^5+x^4-1}{x-3}$ corte al eje x, es decir f(x_0)=0

Tenemos que la función es continua en R-{3}. Busquemos un intervalo, que no contenga x=3, tal que el signo de sus extremos sea diferente.

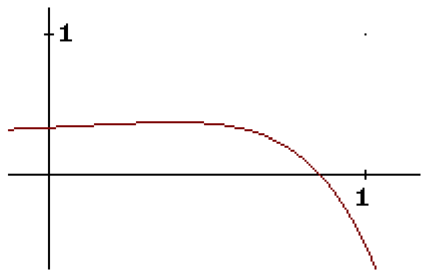
f(0)= 1/3>0 f(1)=-1/2<0

Así la función f(x) cumple Bolzano en [0,1]:

- es continua en este intervalo
- f(0)·f(1)<0

Luego $\exists$ c$\in$(0,1) : f(c)=0.

Veamos la gráfica de la función:

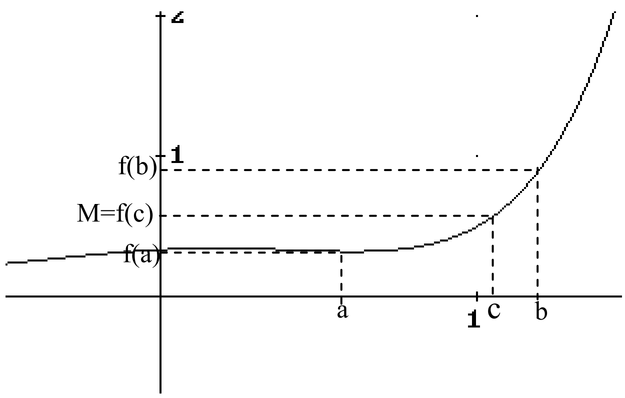


4.3 Teorema de Darboux

El teorema de Darboux es un corolario del teorema de Bolzano:

Teorema de Darboux: Si f(x) es una función continua en un intervalo [a,b], se cumple que para todo valor M$\in$[f(a), f(b)] existe c$\in$(a,b) tal que f(c)=M.

Demostración: sea g(x)=f(x)-M, esta función cumple Bolzano en [a,b]: 1) es continua en [a,b] al serlo f(x) y 2) g(a)·g(b)<0, y por lo tanto, existe al menos un valor c: g(c)=f(c)-M=0→ f(c)=M.



Ejercicio 2: Decir un intervalo de x donde la función $f(x)=x^2-x+3$ valga 5.

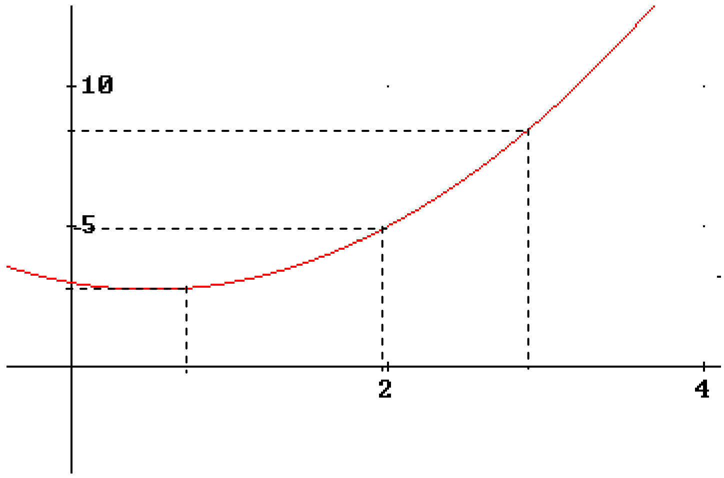
Esta función es continua en R, luego podemos aplicar el teorema de Darboux. Tenemos que buscar un intervalo [a,b] tal que 5 esté comprendido entre f(a) y f(b). Sea [1,3] se cumple f(1)=3 y f(3)=9 luego como $5\in(f(1),f(3)) \rightarrow$ existe $c\in(1,3)$ tal que f(c)=5.

También podemos hacer este problema aplicando Bolzano:

Si f(x)=5 entonces $x^2-x+3=5 \rightarrow x^2-x-2=0$. Llamando $g(x)=x^2-x-2$, veamos que cumple Bolzano en [1,3]:

- Es continua en este intervalo
- g(1)=-2, g(3)=4, luego $g(1)\cdot g(3)<0$

Existe $c\in(1,3)$ donde g(c)=0, y por tanto f(c)-5=0, y por tanto f(c)=5



Ejercicios

Ejercicio 3: Estudia la continuidad de las siguientes funciones

a) f(x)= $\begin{cases} 5-\dfrac{|x|}{x} & si\ \ x \neq 0 \\ 5 & si\ \ x=0 \end{cases}$

El valor absoluto puede dividirse en dos partes: cuando lo que está dentro del valor es negativo este cambia de signo, y si es positivo no se cambia.

f(x)= $= \begin{cases} 5-\dfrac{-x}{x} & si\ x<0 \\ 5 & si\ \ x=0 \\ 5-\dfrac{x}{x} & si\ \ x>0 \end{cases} = \begin{cases} 6 & si\ \ x<0 \\ 5 & si\ \ x=0 \\ 4 & si\ \ x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to o} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to o^+} f(x)=4 \\ \lim\limits_{x\to o^-} f(x)=6 \end{cases}$ $no\ existe$, discontinuidad de salto finito

f(x) es por tanto continua en R-{0}

b) g(x)= $\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x\leq 2 \\ x+1 & si\ \ x>2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, donde cada uno de ellos es un polinomio, que son continuos en R; El único punto que tenemos que estudiar la continuidad es en x=2, donde g(x) cambia de expresión analítica:

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} x+1=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} x^2-1=3 \end{cases} = 3$ =g(2).

Luego g(x) continua en R.

c) h(x)= $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si\ \ x\neq 3 \\ 6 & si\ \ x=3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, uno de ellos es una fracción algebraica, así que en los puntos donde se anule el denominador puede no ser continua. Como coincide el punto donde se anula el denominador con el cambio de expresión analítica (x=3) sólo hay que estudiar la continuidad en este punto.

$\lim\limits_{x\to 3} h(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6$=f(3)=6

La función h(x) es continua en R

d) l(x)= $\begin{cases} 2x-1 & si \ \ x>-1 \\ 3 & si \ \ x\leq -1 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ello la función es un polinomio, así que el único punto donde hay que estudiar la continuidad es en x=-1, allí donde cambia de expresión analítica:

$\lim\limits_{x\to -1} l(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} l(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} l(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 2x-1 = -3 \end{cases} \to No\,existe$, luego no es continua en x=-1, de salto finito.

De esta forma l(x) continua en R-{-1}.

Ejercicio 4: Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo R

a) f(x)= $\begin{cases} sen(3x) & si \ \ x\leq \pi/2 \\ 2k+\cos(2x) & si \ \ x>\pi/2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son expresiones trigonométricas, continuas en R. Luego el único punto donde puede existir discontinuidad es en x=π/2, allí donde la función cambia de expresión analítica. Veamos si f(x) es continua en π/2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} 2k+\cos(2x) = 2k-1 \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} sen(3x) = -1 \end{cases}$$

El límite existe si los límites laterales son iguales, esto ocurre si k=0. Además cuando k=0 se cumple f(π/2)=-1,y por tanto la función es continua en x=π/2

De esta forma la función es continua en R si k=0

b) g(x)= $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} & si \ \ x\neq 2 \\ k & si \ \ x=2 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en uno de ellos la función es una fracción algebraica que puede no ser continua en los puntos donde se anual el denominador (x=2). Como este punto coincide con el punto donde la función cambia de expresión analítica, es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad de g(x).

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0}\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = \infty \end{cases}$ el límite no existe, así que independientemente del valor de k la función g(x) no es continua en x=2

c) k(x)= $\begin{cases} 1+|x| & si\ x<0 \\ k & si\ \ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ \ x>0 \end{cases}$

Como |x| está definido para valores negativos (x<0), es equivalente a sustituir |x| por –x:

k(x)= $\begin{cases} 1-x & si\ x<0 \\ k & si\ \ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 & si\ \ x>0 \end{cases}$

Es una función definida a trozos; en cada uno de ellos las funciones son polinomios, y estos son continuos en R. El único punto donde puede presentar discontinuidad es en x=0, allí donde la función cambia de expresión analítica.

$$\lim_{x\to 0} k(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} 1+|x|=1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x+1=1 \end{cases}=1$$

Para que sea continua ha de cumplir que k(0)= $\lim_{x\to 0} k(x)$. Por tanto k(x) será continua si k(0)=k=1 → k=1

e) $m(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2}{x-2} & si\ x>3 \\ \frac{x+3}{x-4}+k\, si\, x\leq 3 \end{cases}$

Es una función definida a trozos, en cada uno de ellos las funciones son fracciones algebraicas, que no son continuas en los puntos donde se anulan el denominador. En la primera de ellas ocurre en x=2, pero como esa expresión analítica sólo existe para x>3, nuca tomará ese valor. La segunda se anula para x=4, pero como la expresión definida para x≤3 nunca tomará ese valor. Así que sólo hay que estudiar la continuidad en x=3, donde la función cambia de expresión analítica:

$$\lim_{x\to 3} m(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \frac{x+3}{x-4}+k=-6+k \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+2}{x-2}=\frac{11}{1}=11 \end{cases}$$

El límite existe si k=17. Además si k=17 m(3)=11 y por tanto continua en 3 y en todo R.

Ejercicio 5: Hallar el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

a) f(x)=|x^2-6x+5|

El dominio de la función f(x)=|x^2-6x+5| y su continuidad es todo R, ya que el valor absoluto de f(x) es continuo en los mismos puntos en los que sea continua la función x^2-6x+5, que es un polinomio.

b) $g(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-2\sqrt{2}$.

El dominio de una raíz cuadrada son todos los puntos donde el radicando es positivo o cero. Como g(x) está definida a partir de suma la de tres funciones, el dominio será la intersección de los tres dominios. Veamos uno a uno por separado:

$\sqrt{4+x}$ Dom=[-4,∞)

$\sqrt{4-x}$ Dom=(-∞,4]

$2\sqrt{2}$ Dom=R

Dom(g(x))= [-4,∞)∩(-∞,4]∩R=[-4,4]

En los puntos del dominio la función es continua menos en -4 y 4 De esta manera g(x) continua en (-4,4)

En -4 no es continua pues $\lim_{x\to -4^-} g(x) = no\ existe$

En 4 no es continua pues $\lim_{x\to 4^+} g(x) = no\ existe$

Ejercicio 6: Determinar los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2} & si\ x\le 0 \\ ax+b & si\ 0<x\le 1 \\ 1+x\ln(x) & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

Es una función definida a trozos, y en cada trozo la función es continua en su dominio de definición, ya que el único que no es continua en todo R es $1+x\ln(x)$, pero como está definida para x≥1 en este intervalo es continua.

Tendremos que ver la continuidad en x=0 y x=1 para asegurar que la función f(x) continua en todo R.

· Continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} xe^{x^2}=0\cdot 1=0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} ax+b=b \end{cases}$$

El límite existe si b=0, además para este valor de b f(0)=0 y por tanto la función será continua

· Continuidad en x=1

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1+x\ln(x))=1+1\cdot 0=1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax=a \end{cases}$$

El límite existe si a=1, además para este valor f(a)=1 y por tanto la función será continua

Si a=1 y b=0 la función será continua en R

Ejercicio 7: Sean las funciones $f(x)=\begin{cases}1 & si\ x\in[0,1)\\ x & si\ x\in[1,\infty)\end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases}x+1 & si\ x\in[0,2)\\ x & si\ x\in[2,\infty)\end{cases}$ estudiar la continuidad de f+g, f·g, f/g

Estudiemos la continuidad de las funciones f(x) y g(x)

Fácilmente se puede comprobar que f(x) es continua en todo el dominio de definición $[0,\infty)$, y g(x) continua en todos los puntos de definición menos en x=2, donde los límites laterales no coinciden, es decir en $[0,2)\cup(2,\infty)$.

a) (f+g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$
$=[0,2)\cup(2,\infty)$

b) (f·g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$
$=[0,2)\cup(2,\infty)$

c) (f/g)(x) por las propiedades de continuidad será continua en $[0,\infty)\cap([0,2)\cup(2,\infty))=$
$=[0,2)\cup(2,\infty)$, ya que g(x) no se anula para ningún valor de x

Ejercicio 8: Hallar y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones

a) $\mathbf{f(x)}=\frac{x^2-4}{x^2-2x}$

Será continua en R menos en los puntos donde se anula el denominador es decir x=0 y x=2, por tanto $0,2\notin Dom(f(x))$. Veamos el límite en estos puntos para discernir el tipo de discontinuidad.

· En x=0

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{-4}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2-4}{x(x-2)}=\frac{-4}{-2\cdot 0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-4}{x(x-2)}=\frac{-4}{-2\cdot 0^-}=-\infty\end{cases}\to salto\ \inf inito\ en\ x=0$$

· En x=2

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}=\frac{4}{2}=2\to evitable$$

b) $g(x)=\begin{cases}2-x & si\ x\le 0\\ e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$

Tanto 2-x como e^{-x} son continuas para todo R, luego la única posible discontinuidad puede ocurrir en x=0.

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2-x=2\end{cases}$$ Discontinuidad de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} 2 & si\ x=0 \\ e^{-x} & si\ x\neq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} e^{-x}=1\neq f(0)=2$ → Salto finito

Ejercicio9: Estudiar la continuidad de f(x)

$$f(x)=\begin{cases} \ln(-x) & si \quad x<-2 \\ sen(\pi x) & si \quad -2\leq x\leq 2 \\ 0 & si \quad 2<x<4 \\ x^2-12 & si \quad x\geq 4 \end{cases}$$

Función definida a trozos y en cada uno de ellos la función es continua en su dominio de definición, (ln(-x) es continua si x<0). Veamos la continuidad en los puntos donde cambia la expresión analítica:

En x=-2 → $\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -2^+} f(x)=sen(-2\pi)=0 \\ \lim_{x\to -2^-} f(x)=\ln(2) \end{cases}$ Discontinua de salto finito

En x=2→ $\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^+} f(x)=0 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=sen(2\pi)=0 \end{cases}$ Continua en x=2

En x=4→ $\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 4^+} f(x)=16-12=4 \\ \lim_{x\to 4^-} f(x)=0 \end{cases}$ Discontinua de salto finito

Ejercicio 10: Demuestra:

a) x=xs·en(x)+cos(x) tiene solución en [-π,π]:

Definimos f(x)= x·sen(x)+cos(x)-x tal que

1. Es continua en R y por tanto en [-π,π].
2. f(-π)=-1+π>0, f(π)=0-1-π<0.

De esta forma cumple Bolzano → ∃c∈(-π,π): f(c)=0, es decir, la ecuación tiene solución en este entorno.

b) 3·sen(x)=e^{-x}cos(x) en algún valor de x.

Definimos f(x)=e^{-x}cos(x)-3sen(x) tal que

1. es continua en R.
2. Tomamos el intervalo [0,π/2] → f(0)=1>0 f(π/2)=0-3<0.

Cumple Bolzano→ ∃c∈(0,π/2): f(c)=0, es decir la ecuación solución en este entorno.

Ejercicio 11: La función cotg(x) tiene distintos signos en los extremos del intervalo [3π/4, 5π/4] y sin embargo no corta el eje x. ¿Entonces contradice esto Bolzano?

No contradice Bolzano pues cotag(x) no es continua en π∈[3π/4, 5π/4]

Ejercicio 12: Demostrar $f(x)=x^3-8x+2$ corta al eje OX en (0,2). ¿se puede decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$?

f(x) cumple:

1. Continua en (0,2)
2. f(0)=2>0, f(2)=-6<0

Luego cumple Bolzano → $\exists c\in(0,2)$: f(c)=0

No podemos decir lo mismo de $\frac{2x-3}{x-1}$, pues en $x=1\in(0,2)$ no es continua.

Ejercicio 13: Sea f(x) una función que cumple f(-2)<0 y f(0)>0 ¿Es siempre cierto que existe un valor c en (-2,0) tal que f(c)=0

Si f(x) es continua en el intervalo [-2,0] podemos asegurar que se cumple dicha afirmación (por el teorema de Bolzano). Sino no es así no podemos asegurar tal afirmación. Lo cual no contradice que alguna función discontinua en donde $f(a)\cdot f(b)<0$ esta corte al eje x en (a,b)

Ejercicio 14: Estudiar el dominio y discontinuidad de $f(x)=\ln((x+2)/x^2)$

Pasos:

1) Dominio de $(x+2)/x^2$ → R-{0}

2) Al ser un logaritmo→ $(x+2)/x^2>0$: Como x^2 siempre positivo tenemos que ver cuándo (x+2)>0, esto ocurre en el intervalo $(-2,\infty)$

De esta forma el dominio será $(-2,\infty)$ menos el punto x=0→$Dom(f(x))=(-2,0)\cup(0,\infty)$.

En todos los puntos del dominio la función es continua pues, el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto.

Ejercicio 15: Hallar a y b para que f(x) cumpla Bolzano en $[-\pi,\pi]$. Hallar c que cumple Bolzano

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x) & si\ \ -\pi\le x\le 0\\ a+x^2 & si\ \ 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & si\ 1\le x\le\pi\end{cases}$$

Para que cumpla Bolzano tenemos que obligar a la función a que sea continua en $[-\pi,\pi]$, y por tanto en x=0 y x=1

En x=0 : $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \cos(0) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = a + 0 = a \end{cases}$ → a=1

En x=1: $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{b}{1} = b \end{cases}$ → b=2

Si a=1 y b=2 la función es continua en [-π,π], veamos ahora que cumple la segunda condición:

f(-π)=-1<0

f(π)=2/π>0

Luego cumple Bolzano ∃c∈(-π,π): f(c)=0

Busquemos el valor c:

a) Veamos si c∈[-π,0]→ cos(c)=0 → c=-π/2

b) Veamos si c∈(0,1)→1+x^2=0 no solución

c) Veamos si c∈[1,π]→2/x=0 no solución

Ejercicio 16: Demuestra que la ecuación π^x =e tiene solución en (0,1), ¿lo cumple también ϕ^x=e?

a) π^x=e solución en (0,1)→ definimos f(x)=π^x-e, se cumple:

a) Continua en [0,1]

b) Además f(0)=1-e<0 y f(1)=π-e>0

Al cumplir Bolzano ∃c: (0,1): f(c)=0, y por tanto la ecuación tiene solución en (0,1)

b) ϕ^x=e solución en (0,1) → definimos f(x)= ϕ^x-e, se cumple:

a) continua en [0,1]

b) pero f(0)=1-e<0 y f(1)= ϕ-e<0

Luego no cumple Bolzano y no podemos asegurar que la ecuación tenga solución.

Ejercicios de la P.A.U.

Junio de 2004.Prueba A

C-2: Demuéstrese que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto si x>0

Si se cortan las dos funciones cumplen entonces que f(x)=g(x).

Definimos $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1/x$. Si h(x)=0 entonces f(x)=g(x) y las funciones se cortarán.

Veamos que h(x) cumple Bolzano, y por tanto h(x)=0:

a) Es continua para x>0 (no se anula el denominador).
b) Busquemos un intervalo donde cumpla Bolzano, por ejemplo [0.1,1]: $h(0.1)=e^{0.1}-1<0$; $h(1)=e-1>0$

Luego cumple Bolzano $\exists c\in(0.1,1)$: h(c)=0, y por tanto f(c)=g(c), cortándose en c estas dos funciones

Junio de 2005. Prueba B

C-3.- Estúdiese, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función *f* definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0\\ \beta & \text{si } x=0\end{cases}.$$

La función $\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}$ es continua en R-{0}, pues $1+e^{1/x}$ nunca se anula. El único problema está en x=0, al anularse el denominador del exponente. Por otro lado en x=0 la función cambia de expresión analítica, luego es el único punto donde tenemos que estudiar la continuidad:

Continua en x=0 si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=\beta$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\frac{\alpha}{1+e^{1/0}}=(ind)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^+}}=\dfrac{\alpha}{\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}}=\dfrac{\alpha}{1+e^{1/0^-}}=\dfrac{\alpha}{1}\end{cases}$$

Para que exista el límite α=0. Si α=0 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

Por otro lado para ser continua $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ → β=0

Luego si β=0 y α=0 la función será continua en x=0, y por lo tanto en todo R.

Septiembre de 2006. Prueba A

PR2. b) Pruébese que la ecuación $3x = e^x$ tiene alguna solución en $(-\infty,1]$

Definamos la función $f(x)=3x-e^x$; si demostramos que $f(x)=0$ en $(-\infty,1]$, entonces se cumplirá la ecuación. Para esto apliquemos Bolzano:

a) $f(x)$ es continua en R y por tanto continua en todo el intervalo
b) busquemos el intervalo $[a,b]$ comprendido en $(-\infty,1]$ y tal que $f(a)\cdot f(b)<0$. Por ejemplo $[0.5, 1]$: $f(1)=3-e<0$, $f(0.5)=1.5-e^{0.5}>0$.

Así $f(x)$ cumplirá Bolzano en $[0.5, 1]$, y por lo tanto, existe al menos un valor $c\in(0.5,1)$, luego $c\in(-\infty,1]$ tal que $f(c)=0$, y por tanto se cumple la ecuación.

Junio de 2007.Prueba A

C-4. Demostrar que las curva $f(x)=sen(x)$ y $g(x)=1/x$ se cortan en algún punto del intervalo $(2\pi, 5\pi/2)$

Si $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en algún punto se cumple que $f(x)=g(x)$, es decir $sen(x)=1/x$. Para poder aplicar Bolzano pasamos $1/x$ al otro miembro → $\underbrace{sen(x)-\frac{1}{x}}_{h(x)}=0$. De esta forma resolver la ecuación es lo mismo que ver que $h(x)=0$.

Apliquemos Bolzano a $h(x)$ en el intervalo marcado $(2\pi,5\pi/2)$:

a) Continua en $[2\pi,5\pi/2]$, ya que $h(x)$ es continua en todos los reales menos en el 0, y $0\notin[2\pi,5\pi/2]$.

b) $h(2\pi)=sen(2\pi)-1/(2\pi)=-1/(2\pi)<0$, $h(5\pi/2)=sen(5\pi/2)-1/(5\pi/2)=1-2/(5\pi)>0$

Luego cumple Bolzano, y por lo tanto, existe un punto $c\in(2\pi,5\pi/2)$ tal que $h(c)=0$, y por ello en este punto se cumple la igualdad $f(c)=g(c)$, cortándose las dos curvas

Junio de 2007.Prueba B

PR-2 (b) Demostrar que existe algún número real c tal que $c+e^{-c} = 4$.

Si modificamos la igualdad → $\underbrace{x+e^{-x}-4}_{f(x)}=0$ tendremos que la ecuación solución si existe un punto c tal que $f(x)=0$,es decir si podemos aplica Bolzano:

a) Continua en R, luego podemos tomar cualquier intervalo para aplicar Bolzano

b) Busquemos el intervalo $f(0)=1-4<0$. Si tomamos $x=4$, como e^{-x} siempre es positivo entonces $f(4)=4+e^{-4}-4>0$.

Luego cumple Bolzano en $[0.4]$, y por lo tanto, existe $c\in(0,4)$ tal que $f(c)=0$, y entonces $c+e^{-c}=4$ solución en $(0,4)$.

C1. Hallar a y b para que f(x) continua en todo R

$$f(x)=\begin{cases} a+x\ln(x) & si\ \ x>0 \\ b & si\ \ x=0 \\ \dfrac{sen(\pi x)}{x} & si\ \ x<0 \end{cases}$$

La función x·ln(x) es continua si x>0 y $\frac{sen(\pi x)}{x}$ es continua en x<0, pues no toma el valor x=0. De esta forma, en cada trozo las funciones son continuas en los dominios de definición. Por esta razón sólo hay que estudiar la continuidad en x=0

Continuidad en x=0. Será continua si $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=(*)=\pi \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=(*)=a \end{cases}$ → el límite existe si a=π y valdrá $\lim_{x\to 0} f(x)$=π

(*) Calcularemos estos límites en el tema 4 (Teorema de L'Hopital)

f(0)=b, como $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ →b=π

De esta forma si a=π y b=π la función es continua en x=0, y por lo tanto en todo R.