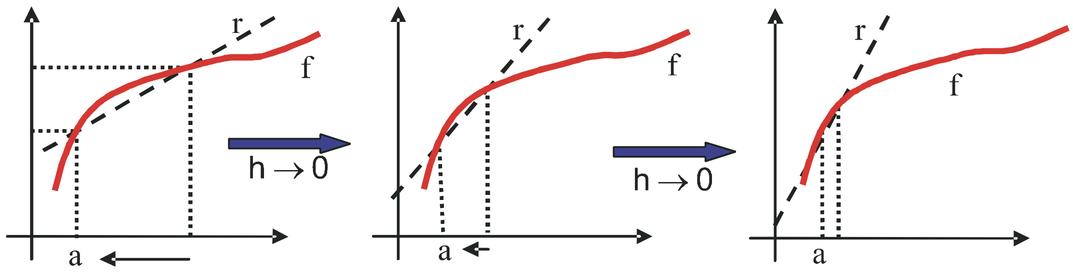
1. Derivada de una función

1.1. Derivada de una función en un punto

Vimos en Primero de Bachillerato que la derivada de una función en un punto no era más que la tasa de variación instantánea en dicho punto $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. La interpretación geométrica de la definición nos lleva a relacionarla con la pendiente de la recta tangente a la curva, siendo $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ la ecuación de dicha recta tangente a la función f en el punto (x_0, y_0).



La interpretación física de la derivada conduce al concepto de velocidad instantánea, definida como $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$, relacionada con la notación $\frac{dy}{dx}$, en la que se expresa la variación en la función y (diferencial de y ó dy) inducida por la variación en la variable x (diferencial de x ó dx).

Para calcular una derivada siguiendo la definición recurríamos a la *Regla de los 4 pasos*, consistente en desglosar la definición y efectuar los cálculos poco a poco:

1er paso: cálculo de las imágenes *f(a+h)* y *f(a)*.

2º paso: cálculo de la diferencia *f(a+h) – f(a)*. Si se puede, se saca factor común *h*.

3er paso: cálculo del cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Si se puede, se simplifica *h*.

4º paso: cálculo del límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, que ya es la derivada.

Recordemos el procedimiento con un ejemplo: Dada $f(x)=\frac{2x-1}{3x+4}$, calcula $f'(-1)$ usando la definición.

Primero escribimos la definición para este caso: $f'(-1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

1er paso: $f(-1+h)=\frac{2(-1+h)-1}{3(-1+h)+4}=\frac{2h-3}{3h+1}$, $f(-1)=\frac{2(-1)-1}{3(-1)+4}=-3$.

2º paso: $f(-1+h)-f(-1)=\frac{2h-3}{3h+1}-(-3)=\frac{2h-3+9h+3}{3h+1}=\frac{11h}{3h+1}$.

3er paso: $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{11h/(3h+1)}{h}=\frac{11}{3h+1}$.

4º paso: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{11}{3h+1}=11\Rightarrow f'(-1)=11.$

En la Unidad 8 de *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de 1º* encontrarás más ejemplos del uso de la Regla de los cuatro pasos.

1.2. Función derivada

Dado lo tedioso del cálculo de la derivada punto a punto, se recurre a definir una **función derivada** que nos permite calcular la derivada de cualquier función en cualquier punto. Para ello definíamos la derivada de una función en un punto genérico x como: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ó $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. A partir de esta definición se obtienen las derivadas de las funciones elementales y las reglas del álgebra de derivadas.

1.3. Derivada de funciones conocidas

Como ya dijimos al introducir la derivada en Primero, hay que intentar entender la definición, saber manejarla para funciones sencillas, y, para el cálculo, debemos aprender las derivadas de las funciones matemáticas más habituales, así como las reglas que nos permitan derivar funciones más complejas, obtenidas como una cierta combinación de las elementales.

A esta tarea se dedica este apartado donde se expone la información necesaria en forma de tablas. En la primera aparecen las derivadas de las funciones usuales y de las trigonométricas, no muy usadas en las ciencias sociales, aunque ya son conocidas de Primero. En la segunda están las reglas (**álgebra de derivadas**) que nos permiten derivar sumas, restas, productos, cocientes y composiciones de funciones. Dada la importancia y dificultad que presenta la regla de la cadena (derivada de la composición de funciones) se desarrolla para los casos más habituales. Estas tablas deben ser memorizadas.

Tabla de derivadas de las funciones usuales	
Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n,\quad n\in\Re$	$n\cdot x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$sen\ x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\ sen\ x$
$tg\ x$	$1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

Álgebra de derivadas

$$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x),\ k \text{ constante}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{k}{f}\right)'(x) = -\frac{k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}, \quad k \in \Re,$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La última fórmula, conocida como **regla de la cadena**, puede desglosarse un poco para algunas funciones, obteniendo la siguiente tabla:

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x), \quad n \in \Re$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$sen(f(x))$	$f'(x) \cdot cos f(x)$
$cos(f(x))$	$-f'(x) \cdot sen(f(x))$
$tg(f(x))$	$\frac{f'(x)}{cos^2(f(x))} = f'(x)(1 + tg^2(f(x)))$

Ejemplos

1. Averigua la derivada de **a)** $y = 7x^3 - 6x^2 + 5x - 3$; **b)** $y = x^3 e^x$; **c)** $y = \frac{\ln x}{x}$.

Solución:

a) $y' = 7 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 5 = 21x^2 - 12x + 5;$

b) $y' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x = (3+x)x^2e^x;$

c) $y' = \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$

2. Deriva: **a)** $y = (3x^5 - 5x^2 + 7)^8$; **b)** $y = \sqrt[7]{(2x - 5x^3)^4}$; **c)** $f(x) = \frac{1 + senx}{1 - senx}$ **.**

Solución:

a) $y' = 8\left(3x^5 - 5x^2 + 7\right)^7\left(15x^4 - 10x\right) = 8\left(15x^4 - 10x\right)\left(3x^5 - 5x^2 + 7\right)^7$;

b) $y = \left(2x - 5x^3\right)^{4/7} \Rightarrow y' = \frac{4}{7}\left(2x - 5x^3\right)^{-3/7}\left(2 - 15x^2\right) = \frac{4\left(2 - 15x^2\right)}{7\left(2x - 5x^3\right)^{3/7}} = \frac{4\left(2 - 15x^2\right)}{7\sqrt[7]{\left(2x - 5x^3\right)^3}}$;

c) $y' = \frac{(1 + senx)'(1 - senx) - (1 + senx)(1 - senx)'}{(1 - senx)^2} = \frac{\cos x(1 - senx) + \cos x(1 + senx)}{(1 - senx)^2} \Rightarrow y' = \frac{2\cos x}{(1 - senx)^2}$.

3. Deriva: **a)** $f(x) = \left(3x^2 - 7\right)^2$; **b)** $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 5}$; **c)** $y = \frac{e^{-x^2}}{x^2}$ **.**

Solución:

a) $f'(x) = 2\left(3x^2 - 7\right)\cdot 6x = 12x\left(3x^2 - 7\right)$;

b) $y' = \frac{(2x - 3)(x + 5) - \left(x^2 - 3x\right)\cdot 1}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 15}{(x + 5)^2}$ **.**

Antes de usar las reglas de la derivación y como el numerador es un polinomio de grado mayor que el denominador, podíamos haber usado la división de polinomios y, recordando que $\frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$, haber escrito la función

como $y = x - 8 + \frac{40}{x + 5} \Rightarrow y' = 1 - \frac{40}{(x + 5)^2} = \frac{(x + 5)^2 - 40}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 15}{(x + 5)^2}$.

Te recuerdo que esto lo hicimos en Primero al tratar la función de proporcionalidad inversa. Esta técnica más que ayudarnos al derivar, puede servirnos para orientarnos cuando tengamos que representar funciones.

c) $y' = \frac{-2xe^{-x^2}\cdot x^2 - e^{-x^2}\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2xe^{-x^2}\left(x^2 + 1\right)}{x^4} = \frac{-2e^{-x^2}\left(x^2 + 1\right)}{x^3}$.

4. Calcula la derivada de **a)** $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$; **b)** $y = \frac{e^{2x}\cdot \ln x}{x^3}$; **c)** $y = \frac{(4x - 1)^2}{(3x + 2)^2}$ **.**

Solución:

a) $f'(x) = \frac{(2x - 5)(x - 3) - \left(x^2 - 5x + 4\right)\cdot 1}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 11}{(x - 3)^2}$;

b) $y' = \frac{\left(2e^{2x}\ln x + e^{2x}\cdot \cancel{1/x}\right)\cdot x^3 - e^{2x}(\ln x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{\left(2xe^{2x}\ln x + e^{2x}\right)\cdot x^2 - 3x^2e^{2x}\ln x}{x^6} \Rightarrow y' = \frac{x^2e^{2x}(2x\ln x + 1 - 3\ln x)}{x^6} =$

$= \frac{e^{2x}(2x\ln x - 3\ln x + 1)}{x^4}$;

c) $y' = \frac{2(4x - 1)\cdot 4\cdot (3x + 2)^2 - (4x - 1)^2\cdot 2(3x + 2)\cdot 3}{(3x + 2)^4} = \frac{(3x + 2)(4x - 1)\left[8\cdot (3x + 2) - 6\cdot (4x - 1)\right]}{(3x + 2)^4} = \frac{22(4x - 1)}{(3x + 2)^3}$ **.**

5. Calcula la derivada de: **a)** $y = e^{4x}(x-1)$; **b)** $y = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

Solución:

a) $y' = (e^{4x})'(x-1) + e^{4x}(x-1)' = 4e^{4x}(x-1) + e^{4x} = e^{4x}(4x-4+1) = e^{4x}(4x-3)$.

b) $y' = \dfrac{2x\cdot(x^2+3)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$.

6. Calcula la derivada de: **a)** $y = tg^2(x-1)$; **b)** $y = \sqrt{1-sen\dfrac{x}{2}}$.

Solución:

a) $y' = 2tg(x-1)\cdot\left(1+tg^2(x-1)\right)$;

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-sen\dfrac{x}{2}}}\cdot\left(-\cos\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-\cos\dfrac{x}{2}}{4\sqrt{1-sen\dfrac{x}{2}}}$.

Te recomendamos que repases la unidad 8 del libro de Primero, donde encontrarás más ejemplos de las reglas elementales de la derivación. De todos modos, aquí va otra colección de funciones que te proponemos derivar.

Actividades

1. Halla la derivada de: **a)** $y = \dfrac{3x-1}{3x^2+1}$; **b)** $y = x^2\ln x$; **c)** $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$.

2. Averigua la derivada de: **a)** $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; **b)** $y = x^3-3x$; **c)** $y = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

3. Calcula la derivada de: **a)** $y = \dfrac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$; **b)** $y = xe^{-x^2}$; **c)** $y = \dfrac{3x^2-x}{x+2}$.

4. Halla la derivada de: **a)** $y = \ln\left(5x^3-6x^2+7\right)$; **b)** $y = \sqrt{x^2-5x+3}$.

5. Calcula la derivada de: **a)** $y = \dfrac{1}{1+x^2}$; **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$; **c)** $f(x) = \dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$.

6. Averigua la derivada de: **a)** $y = xe^{-3x}$; **b)** $y = \dfrac{10}{8-x}$; **c)** $y = \dfrac{38x-100}{0,4x}$.

7. Deriva: **a)** $y = 7e^{2x-1}-3x^4+5x$; **b)** $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$; **c)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

8. Halla la derivada de: **a)** $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$; **b)** $y = \dfrac{2x}{x^2-4}$; **c)** $y = \dfrac{5x^3}{5x^3-7}$.

9. Halla la derivada de: **a)** $y = sen\left(x^2+2x\right)$; **b)** $y = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}$.

10. Halla la derivada de: **a)** $y = e^{x^2-1}(3x+5)$; **b)** $y = \dfrac{4x^2+5}{4x^2-5}$.

1.4. Ecuación de la recta tangente

Geométricamente la derivada surge para dar respuesta al problema del cálculo de la **recta tangente** a una curva en cualquier punto. Como la pendiente de dicha recta es la derivada en el punto, la ecuación es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplos

7. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 5x + 6$ en el punto (1,4).

Solución:

Hay que averiguar $f'(1) \Rightarrow y' = 6x - 5 \Rightarrow y'(1) = 6x - 5|_{x=1} = 1 \Rightarrow$ Sustituyendo en la fórmula queda $y - 4 = x - 1 \Rightarrow r : y = x + 3$.

8. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = -3x^2 + 1$ en $x = 2$.

Solución:

Hay que averiguar $f(2)$ y $f'(2) \Rightarrow f(2) = -3 \cdot 2^2 + 1 = -11; f'(2) = -6x|_{x=2} = -12 \Rightarrow$
$\Rightarrow y - (-11) = -12(x - 2) \Rightarrow r : y = -12x + 13.$

9. ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 + 5x - 6$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Hállese el punto de tangencia.

Solución:

Para que dos rectas sean paralelas han de tener la misma pendiente. La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x \Rightarrow m = 1$ y la pendiente de la recta tangente es $f'(x_0) \Rightarrow 2x_0 + 5 = 1 \Rightarrow x_0 = -2$. Como $y_0 = y(-2) = -12$ y $f'(-2) = 1$, la tangente es $y - (-12) = x - (-2) \Rightarrow r : y = x - 10$ y el punto de tangencia $(-2, -12)$.

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = xe^{x^2}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

$f(1) = e; f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2} \Rightarrow f'(1) = 3e \Rightarrow$ La recta tangente tiene por ecuación $y - e = 3e(x - 1) \Rightarrow r : y = 3ex - 2e$.

Actividades

11. Averigua la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (x + 1)e^{-3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

12. ¿En qué punto la recta tangente a la curva $y = x^2 + 3x - 5$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escribe también la ecuación de dicha recta tangente.

13. Halla el valor del parámetro a para que la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{a - x}$ sea paralela a la recta $y = 4x - 5$ en el punto de abscisa 1. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

1.5. Derivabilidad

Sabemos que para que una función sea derivable ha de ser previamente continua. Sin embargo, ésta sólo es una condición necesaria, pero no suficiente, pues no todas las funciones continuas son derivables. El ejemplo habitual es la función valor absoluto, que nos permitirá introducir las derivadas laterales. Veámoslo:

¿Cuánto vale la derivada del valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x, \text{ si } x<0 \\ x, \quad \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$?

Dado que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ es continua en $x = 0$.

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$ ¿Cómo calculamos el límite? Fíjate que es distinto por la izquierda $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$ que por la derecha $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h} = 1$, por lo que debemos concluir que no existe $f'(0)$. Por lo tanto, es una función continua en un punto, pero no derivable en dicho punto.

La definición de las derivadas laterales es claramente:

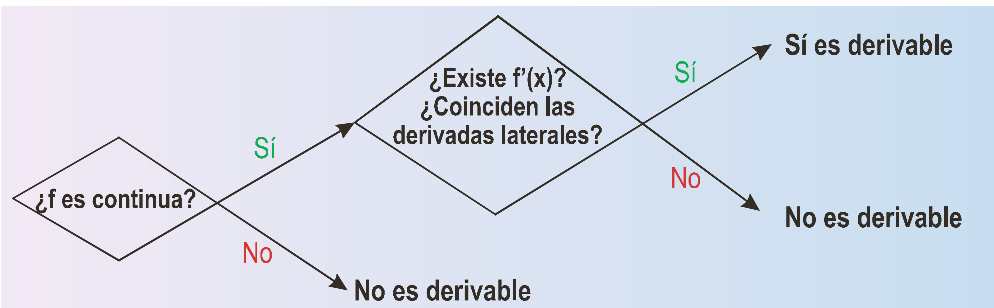
$$f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \equiv \text{ derivada por la izquierda.}$$
$$f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \equiv \text{ derivada por la derecha.}$$

No te preocupes, ya que para calcular las derivadas laterales en un punto, si se trata de funciones definidas a trozos (lo más habitual), se calcula la derivada de la función que esté en el trozo que interese y se sustituye el valor del punto. En el ejemplo anterior $f'(0^-) = -1\big|_{x=0} = -1$; $f'(0^+) = 1\big|_{x=0} = 1$.

El otro tipo de funciones que presentarán problemas en la derivada son aquellas que al derivar se convierten en funciones con denominadores, como las que tienen radicales. Observa lo que pasa con $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Esta función es continua en $x = 0$, pues $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$, pero no es derivable en dicho punto: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(0) = \dfrac{1}{0} \Rightarrow \nexists f'(0) \Rightarrow$ f es continua en $\Re$ y derivable en $\Re - \{0\}$.

En resumen, para estudiar la derivabilidad de una función primero se estudia la continuidad y después se calcula la derivada, en ocasiones a partir de las derivadas laterales. Si coinciden, la función es derivable y si no coinciden, no es derivable.



Ejemplos

11. ¿Es derivable $f(x)=\begin{cases}0, & si\ x<0\ ó\ si\ x\geq\frac{\pi}{2}\\ senx, & si\ 0\leq x<\frac{\pi}{4}\\ \cos x, & si\ \frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $en\ x=0,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{2}$?

Solución:

• Estudio en $x = 0 \Rightarrow$

Continuidad: $f(0)=sen0=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} senx=0 \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow$ es continua en $x=0$.

Derivabilidad: $f'(0^-)=0\big|_{x=0}=0$; $f'(0^+)=\cos x\big|_{x=0}=1 \Rightarrow \nexists f'(0)$.

• Estudio en $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$

Continuidad: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} senx=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)\Rightarrow$ es continua en x = $\frac{\pi}{4}$.

Derivabilidad: $f'\left(\frac{\pi}{4}^-\right)=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f'\left(\frac{\pi}{4}^+\right)=-senx\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\nexists f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

• Estudio en $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

Continuidad: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x=0$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 0=0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=\frac{\pi}{2}$.

Derivabilidad: $f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=-senx\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=-1$; $f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right)=0\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow\nexists f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

12. Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}x^2 & si\ x<1\\ 2x-1 & si\ x\geq 1\end{cases}$

Solución:

El único punto en el que puede presentar problemas es en x = 1, que es donde cambia de definición.

Continuidad: $f(1)=2x-1\big|_{x=1}=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1\Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=1$.

Derivabilidad: $f'(1^-)=2x\big|_{x=1}=2$; $f'(1^+)=2\big|_{x=1}=2\Rightarrow f'(1)=2\Rightarrow$ es derivable en x = 1.

Por lo tanto, *f* es continua y derivable en todo $\Re$.

13. ¿Es $f(x)=\begin{cases}1-4x, & si\ x\le -2\\ x^2+5, & si\ x>-2\end{cases}$ derivable en $x=-2$?

Solución:

Continuidad: $f(-2)=(1-4x)\big|_{x=-2}=9$; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(1-4x)=9$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+5\right)=9\Rightarrow$

$f(-2)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=-2$.

Derivabilidad: $f'(-2^-)=-4\big|_{x=-2}=-4$; $f'(-2^+)=2x\big|_{x=-2}=-4\Rightarrow f'(-2)=-4$. Sí es derivable en $x=-2$.

14. Estudia la continuidad y la derivabilidad de $f(x)=\begin{cases}x+4, si\ x<2\\ x^2-3x+8, si\ x\ge 2\end{cases}$

Solución:

Continuidad: $f(2)=x^2-3x+8\big|_{x=2}=6$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+4)=6$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3x+8\right)=6\Rightarrow$

$f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\Rightarrow$ es continua en $x=2$.

Derivabilidad: $f'(2^-)=1\big|_{x=2}=1; f'(2^+)=2x-3\big|_{x=2}=1\Rightarrow f'(2)=1\Rightarrow$ es derivable en todo $\Re$.

15. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\sqrt{x-7}$.

Solución:

Se observa que *Dom f* = [7, ∞) siendo continua en todo su dominio, aunque en x = 7 sólo podemos calcular un límite lateral, pues el otro haría que el radicando fuese negativo: $\lim\limits_{x\to 7^+}\sqrt{x-7}=0=f(7)$; no existe límite cuando x tiende a 7^-.

Es fácil ver que $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-7}}\Rightarrow DEN=0\Rightarrow\sqrt{x-7}=0\Rightarrow x=7\Rightarrow f'(7)=\dfrac{1}{0}\Rightarrow\nexists f'(7)\Rightarrow f$ es derivable en $(7,\infty)$

16. ¿Es derivable la función $f(x)=5\sqrt[3]{x^2-8}$ en el intervalo [1, 3]?

Solución:

Como es una raíz cúbica no presenta problemas para ningún número (la raíz cúbica de un número negativo es un número negativo), por lo que *Dom f* = $\Re$ y, por ello, será continua en $\Re$ y también, lógicamente, en cualquier intervalo de dicha recta.

$$f(x)=5\left(x^2-8\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}\left(x^2-8\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{10x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-8\right)^2}}\Rightarrow DEN=0\Rightarrow\left(x^2-8\right)^2=0\Rightarrow x^2=8\Rightarrow x=\pm\sqrt{8}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\nexists f'\left(\pm\sqrt{8}\right)$. Se ve fácilmente que $1\le\sqrt{8}\le 3\Rightarrow$ f es derivable en $[1,3]-\left\{\sqrt{8}\right\}$.

Actividades

14. Estudia la derivabilidad de: **a)** $y = 3 - \sqrt[3]{x+5}$; **b)** $f(x) = \dfrac{3|x|}{4+2|x|}$.

15. Averigua los valores de los parámetros *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} ae^x + 1, \text{ si } x \le 0 \\ -\dfrac{b}{x+2}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable en todo R.

16. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones: **a)** $y = \sqrt{2x^2+5}$ **;** **b)** $f(x) = \ln\left(4x^2 - 1\right)$ **;** **c)** $y = 2x \cdot |x|$ **.**

17. Averigua el valor de *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, \text{ si } x < -1 \\ 3 + ax, \text{ si } -1 \le x \le 1 \\ bx + 2a, \text{ si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y estudia la derivabilidad de *f* para dichos valores.

18. Estudia la derivabilidad de $y = \dfrac{1-|x|}{1+|x|}$.

19. Halla *a* y *b* para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, \text{ si } x \le 2 \\ 5x + b, \text{ si } x > 2 \end{cases}$ sea continua y derivable.

1.6. Derivadas sucesivas

¿Nos puede servir para algo hallar la tasa de variación instantánea de la derivada? Fíjate en que la derivada es una función, por lo que podemos calcular su TVI, que será la derivada de la derivada. La derivada de la derivada de una función recibe el nombre de **derivada segunda** y en la unidad siguiente la usarás para estudiar la curvatura (concavidad y convexidad) de una función. Se define como:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Este proceso lo podemos prolongar indefinidamente y así tendremos la derivada tercera f''' (que es derivar la función derivada segunda), la derivada cuarta f^{iv} (que es derivar la función derivada tercera), la derivada quinta f^{v} (derivar la función derivada cuarta),…, la derivada n-sima o enésima $f^{(n}$. Observa la notación: se usan números romanos para las primeras y un paréntesis con el grado para las de orden superior con el fin de no confundirlas con las potencias. Estas derivadas de órdenes superiores (que es un nombre que a menudo reciben) se calculan con las mismas reglas que vimos para la derivada, que ahora se llama derivada primera (y simplemente derivada cuando no hay confusión posible).

Las derivadas de órdenes sucesivos se utilizan para calcular el desarrollo en serie de Taylor para una función, utilísima herramienta que permite averiguar el valor de la raíz cuadrada, seno, coseno, exponencial, logaritmo, etc., de cualquier número. En concreto, este tipo de desarrollo es el que está presente en las calculadoras científicas, permitiéndonos efectuar todos los cálculos que necesitemos. El desarrollo consiste en encontrar un polinomio que se aproxima a la función y que es el que usamos para los cálculos.

Ejemplos

17. Calcula la derivada segunda de las siguientes funciones: **a)** $y=\frac{3x-1}{3x^2+1}$; **b)** $y=x^2\ln x$; **c)** $y=\frac{x+1}{x^2+x-2}$.

Solución:

a) $y'=\frac{3\left(1+2x-3x^2\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}\Rightarrow y''=3\frac{\left(2-6x\right)\cdot\left(3x^2+1\right)^2-\left(1+2x-3x^2\right)\cdot 2\cdot\left(3x^2+1\right)\cdot 6x}{\left(3x^2+1\right)^4}$.

Antes de efectuar las multiplicaciones, sacaremos factor común en el numerador. El factor común no es más que el denominador, algo que siempre sucede en las fracciones algebraicas :

$$y''=3\frac{\left(3x^2+1\right)\left[\left(2-6x\right)\cdot\left(3x^2+1\right)-\left(1+2x-3x^2\right)\cdot 2\cdot 6x\right]}{\left(3x^2+1\right)^4}=3\frac{2-6x+6x^2-18x^3-12x-24x^2+36x^3}{\left(3x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{6\left(9x^3-9x^2-9x+1\right)}{\left(3x^2+1\right)^3}.$$

b) $y'=2x\ln x+x\Rightarrow y''=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=2\ln x+3;$

c) $y'=-\frac{x^2+2x+3}{\left(x^2+x-2\right)^2}\Rightarrow y''=-\frac{\left(2x+2\right)\cdot\left(x^2+x-2\right)-\left(x^2+2x+3\right)\cdot 2\cdot\left(2x+1\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3}.$

Observa que ya hicimos la simplificación de la que hablábamos en el apartado **a)**:

$$y''=-\frac{2x^3+4x^2-2x-4-\left(4x^3+10x^2+16x+6\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3}=\frac{2\left(x^3+3x^2+9x+5\right)}{\left(x^2+x-2\right)^3}.$$

18. Averigua la derivada segunda de: **a)** $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; **b)** $y=x^3-3x$; **c)** $y=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

Solución:

a) $y'=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow y''=\frac{\left(4x^3+6x\right)\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^4+3x^2\right)\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^3}\Rightarrow y''=\frac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

b) $y'=3x^2-3\Rightarrow y''=6x$.

c) Transformamos la función desarrollando el binomio y efectuando la división de polinomios:

$$y=\frac{4x^2+1-4x}{4x^2+1}=1-\frac{4x}{4x^2+1}\Rightarrow y'=\frac{16x^2-4}{\left(4x^2+1\right)^2}\Rightarrow y''=-\frac{32x(4x^2+1)-(16x^2-4)2\cdot 8x}{\left(4x^2+1\right)^3}=\frac{-128x^3+96x}{\left(4x^2+1\right)^3}=\frac{-32x(4x^2-3)}{\left(4x^2+1\right)^3}.$$

19. Halla la derivada segunda de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{1}{x^2+x}$; **b)** $y=xe^{2x}$; **c)** $y=\dfrac{3x^2+x}{x+2}$.

Solución:

a) $y'=\dfrac{-(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\Rightarrow y''=-\dfrac{2\left(x^2+x\right)-(2x+1)\cdot 2\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^3}=\dfrac{2\left(3x^2+3x+1\right)}{\left(x^2+x\right)^3}$.

b) $y'=(1+2x)e^{2x}\Rightarrow y''=(2+2+4x)e^{2x}=4(1+x)e^{2x}$.

c) Simplificamos la función dividiendo los polinomios:

$$y=3x-5+\frac{10}{x+2}\Rightarrow y'=3-\frac{10}{(x+2)^2}\Rightarrow y''=\frac{20}{(x+2)^3}\ .$$

Actividades

20. Calcula la derivada segunda de: **a)** $y=\ln\left(5x^3-6x^2+7\right)$; **b)** $y=\sqrt{x^2-5x+3}$.

21. Halla la derivada segunda de: **a)** $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; **b)** $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$; **c)** $f(x)=\dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$.

22. Halla la derivada segunda de: **a)** $y=x^2e^{-3x+1}$; **b)** $y=\dfrac{10}{8-x}$; **c)** $y=\dfrac{38x-100}{0{,}4x}$.

23. Calcula la derivada segunda de: **a)** $y=7e^{2x-1}-3x^4+5x$; **b)** $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

24. Halla la derivada segunda de: **a)** $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$; **b)** $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$; **c)** $y=\dfrac{5x^3}{5x^3-7}$.

25. Averigua la derivada segunda de: **a)** $y=sen\left(x^2+2x\right)$; **b)** $y=\dfrac{x(x+1)+1}{x+1}$.