2016

1. a) Discute, segundo os valores de m, o sistema:

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad z &= 1 \\ 4x + my + 3z &= m \\ 2x + 3y + \quad z &= 3 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 5$.

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

***Exercicio 1*:**

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2 \\ \\ \text{Orlamos este menor} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = -m + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(C) = \begin{cases} 2 & se\ m = 5 \\ 3 & se\ m \neq 5 \end{cases}$$

<u>Discusión:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 5,\ \ rang(C) = rang(A) = 2 < 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ indeterminado. \\ m \neq 5, \quad rang(C) = rang(A) = 3 = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 5}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left.\begin{array}{r} x + \ z = 1 - y \\ 4x + 3z = 5 - 5z \end{array}\right\}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 5-5y & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(3 - 3y - 5 + 5y) = 2 - 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 4 & 5-5y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(5 - 5y - 4 + 4y) = y - 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + \lambda \end{array}}$$

1. a) Discute, segundo os valores do parámetro m, o sistema:

$$\begin{aligned} mx + 3y + 4z &= m \\ x - 4y - 5z &= 0 \\ x - 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

b) Resólveo cando $m = 0$ e cando $m = 1$.

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 & m \\ 1 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow rang(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 16m - \cancel{12} - 15 + 16 - 15m + \cancel{12} = m + 1;$$

Polo tanto

- $m = -1 \Rightarrow rang(C) = 2$
- $m \neq -1 \Rightarrow rang(C) = 3$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

- $m \neq -1 \Rightarrow rang(A) = 3$ (sempre $rang(A) \geq rang(C)$)
- Se $m = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$

Discusión:

$$\boxed{\begin{array}{l} m = -1 \ \Rightarrow \ rang(C) = 2 < 3 = rang(A).\ Sistema\ incompatible.\ Non\ ten\ solución \\ m \neq -1 \ \Rightarrow \ rang(C) = 3 = rag(A) = nº\ de\ incógnitas.\ Sistema\ compatible\ determinado. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Solución\ única \end{array}}$$

b) Para $\boxed{m = 0}$

Sistema homoxéneo. Por a) e un sistema compatible determinado. Polo tanto

$$\boxed{x = y = z = 0}$$

Para $\boxed{m = 1}$. Por a), é un sistema compatible determinado, ten solución única que calculamos pola regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = {}^{1}\!/_{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = -{}^{1}\!/_{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = {}^{1}\!/_{2}$$

$$\boxed{x = {}^{1}\!/_{2}; \quad y = -{}^{1}\!/_{2}; \quad z = {}^{1}\!/_{2}}$$