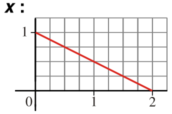
TEMA 11 – DISTRIBUCIONES DE VARIABLE CONTINUA. LA NORMAL

FUNCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLES CONTINUAS

<u>EJERCICIO 1</u> : La siguiente gráfica corresponde a la función de probabilidad de una variable continua, x :



Calcula la probabilidad de que x: a) Sea menor que 1. b) Esté entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$.

Solución: El área total bajo la curva es: $\text{Área} = \frac{2\cdot 1}{2} = 1\,u^2$

a) Entre 0 y 1 tenemos un trapecio cuyas bases miden 1 y $\frac{1}{2}$, y su altura es 1. Su área será:

$$\text{Área} = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}\,u^2$$

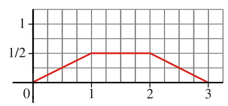
Por tanto: $p[x<1] = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$

b) Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$ tenemos un trapecio de bases $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$, y de altura 1. Su área será:

$$\text{Área} = \frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\,u^2$$

Por tanto: $p\left[\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right] = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

<u>EJERCICIO 2</u> : La demanda diaria de un cierto producto es una variable continua x (medida en toneladas) cuya función de probabilidad es la siguiente:



Calcula la probabilidad de que la demanda diaria de este producto sea:
a) Superior a 2 toneladas. b) Esté entre 1,5 y 2,5 toneladas.

Solución: El área total bajo la curva es: $\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1\,u^2$

a) Para $x>2$, tenemos un triángulo de base 1 y altura $\frac{1}{2}$. Su área es: $\text{Área} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}\,u^2$

Por tanto: $p[x>2] = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$

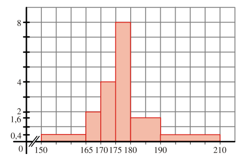
b) Entre 1, 5 y 2 tenemos un cuadrado de lado $\frac{1}{2}$: $\text{Área} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,u^2$

Entre 2 y 2,5 tenemos un trapecio de bases $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ y altura $\frac{1}{2}$: $\text{Área} = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{16}\,u^2$

Entre 1, 5 y 2,5 el área es: $\frac{1}{4}+\frac{3}{16} = \frac{7}{16}\,u^2$

Por tanto: $p[1{,}5 < x < 2{,}5] = \frac{7/16}{1} = \frac{7}{16}$

<u>EJERCICIO 3</u> : La estatura, en centímetros, de un grupo de 100 personas viene representada en la siguiente gráfica:



Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar entre esas cien:
a) Mida más de 180 cm. b) Mida entre 170 y 185 cm.

Solución: El área total bajo la curva la hallamos sumando el área de cada rectángulo:
$15\cdot 0{,}4 + 5\cdot 2 + 5\cdot 4 + 5\cdot 8 + 10\cdot 1{,}6 + 20\cdot 0{,}4 = 6+10+20+40+16+8 = 100$

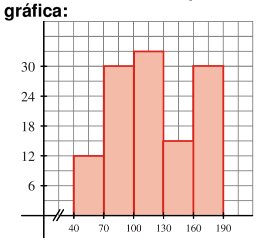
a) El área de los dos últimos rectángulos es: $16+8 = 24$

Por tanto: $p[x>180] = \frac{24}{100} = 0{,}24$

b) Entre 170 y 185, el área es: $5\cdot 4 + 5\cdot 8 + 5\cdot 1{,}6 = 20+40+8 = 68$

Por tanto: $P[170 < x < 185] = \frac{68}{100} = 0{,}68$

<u>EJERCICIO 4</u> : El número de empleados de 120 empresas de una región viene representado en la siguiente gráfica:



Calcula la probabilidad de que, al elegir una empresa al azar entre esas 120, tenga:
a) Más de 130 trabajadores. b) Entre 100 y 140 trabajadores.

Solución: El área total bajo la curva la hallamos sumando el área de cada rectángulo:
$30\cdot 12 + 30\cdot 30 + 30\cdot 33 + 30\cdot 15 + 30\cdot 30 == 360+900+990+450+900 = 3600$

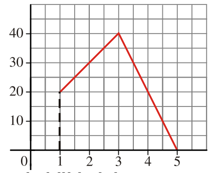
a) El área de los dos últimos rectángulos es: $450+900 = 1350$

Por tanto: $p[x>130] = \frac{1350}{3600} = 0{,}375$

b) Entre 100 y 140 el área es: $30\cdot 33 + 10\cdot 15 = 990+150 = 1140$

Por tanto: $p[100 < x < 140] = \frac{1140}{3600} = 0{,}317$

EJERCICIO 5 : La siguiente gráfica nos da una distribución de probabilidad de una variable continua, *x*:



Calcula la probabilidad de que *x*: a) Sea mayor que 3. b) Esté entre 2 y 4.

Solución: Hallamos el área total bajo la curva:

- Entre 1 y 3, tenemos un trapecio de bases 40 y 20 y altura 2: $\text{Área} = \frac{(40+20)\ 2}{2} = 60\ u^2$
- Entre 3 y 5, tenemos un triángulo de base 2 y altura 40: $\text{Área} = \frac{2\cdot 40}{2} = 40\ u^2$
- El área total será: $60 + 40 = 100\ u^2$

a) $p[x > 3] = \frac{40}{100} = 0,4$

b) Entre 2 y 3, tenemos un trapecio de bases 40 y 30, y altura 1: $\text{Área} = \frac{(40+30)\ 1}{2} = 35\ u^2$

Entre 3 y 4, tenemos un trapecio de bases 40 y 20 y altura 1: $\text{Área} = \frac{(40+20)\ 1}{2} = 30\ u^2$

Por tanto: $p[2 < x < 4] = \frac{35+30}{100} = \frac{65}{100} = 0,65$

DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)

EJERCICIO 6 : Halla las siguientes probabilidades en una distribución *N*(0, 1):
a) $p[z < -1,73]$ b) $p[0,62 < z < 1,34]$ c) $p[-1,2 < z < 1,2]$

Solución:

a) $p[z < -1,73] = p[z > 1,73] = 1 - p[z \le 1,73] = 1 - 0,9582 = 0,0418$

b) $p[0,62 < z < 1,34] = p[z < 1,34] - p[z \le 0,62] = 0,9099 - 0,7324 = 0,1775$

c) $p[-1,2 < z < 1,2] = p[z < 1,2] - p[z \le -1,2] = p[z < 1,2] - p[z \ge 1,2] = p[z < 1,2] - [1 - p[z < 1,2]] =$
$0,8849 - 1 + 0,8849 = 0,7698$

EJERCICIO 7 : En una distribución *N*(0, 1), calcula:
a) $p[z > 1,18]$ b) $p[z < -2,1]$ c) $p[-0,71 < z < 1,23]$

Solución:

a) $p[z > 1,18] = 1 - p[z \le 1,18] = 1 - 0,8810 = 0,1190$

b) $p[z < -2,1] = p[z > 2,1] = 1 - p[z \le 2,1] = 1 - 0,9821 = 0,0179$

c) $p[-0,71 < z < 1,23] = p[z < 1,23] - p[z \le -0,71] = p[z < 1,23] - p[z \ge 0,71] =$
$= p[z < 1,23] - (1 - p[z < 0,71]) = 0,8907 - (1 - 0,7612) = 0,6519$

DISTRIBUCIÓN NORMAL N(μ,σ)

EJERCICIO 8 : El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal *N*(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:
a) Superior a 200 unidades. b) Entre 180 y 220 unidades.

Solución:

a) $p[x > 200] = p\left[\frac{x-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right] = p[z > 0,67] = = 1 - p[z \le 0,67] = 1 - 0,7486 = 0,2514$

b) $p[180 < x < 220] = p\left[\frac{180-192}{12} < \frac{x-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right] =$
$= p[-1 < z < 2,33] = p[z < 2,33] - p[z \le -1] = = p[z < 2,33] - p[z \ge 1] = p[z < 2,33] - (1 - p[z < 1]) =$
$= 0,9901 - (1 - 0,8413) = 0,8314$

EJERCICIO 9 : Las ventas diarias, en euros, en un determinado comercio siguen una distribución *N*(950, 200). Calcula la probabilidad de que las ventas diarias en ese comercio:
a) Superen los 1200 euros. b) Estén entre 700 y 1000 euros.

Solución:

a) $p[x > 1200] = p\left[\frac{x-950}{200} > \frac{1200-950}{200}\right] = p[z > 1,25] = = 1 - p[z \le 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$

b) $p[700 < x < 1000] = p\left[\frac{700-950}{200} < \frac{x-950}{200} < \frac{1000-950}{200}\right] =$
$= p[-1 < z < 0,25] = p[z < 0,25] - p[z \le -1] = = p[z < 0,25] - p[z \ge 1] = p[z < 0,25] - (1 - p[z1]) =$
$= 0,5987 - (1 - 0,8413) = 0,44$

HALLAR EL VALOR DE "k" CONOCIDA LA PROBABILIDAD, EN DISTRIBUCIONES NORMALES

EJERCICIO 10 : En una distribución *N*(0, 1), halla el valor de *k* en cada caso:
a) $p[z < k] = 0,9969$ b) $p[-k < z < k] = 0,985$

Solución:

a) $P[z < k] = 0,9969 \rightarrow k = 2,74$

b) $p[-k < z < k] = p[z < k] - p[z \le -k] = p[z < k] - p[z \ge k] = p[z < k] - [1 - p[z < k]] = 2p[z < k] - 1 = 0,985 \Rightarrow$
$p[z<k] = \frac{1+0,985}{2} = 0,9925 \rightarrow k = 2,43$

EJERCICIO 11 : En una distribución *N*(25, 6), halla el valor de *k* en cada caso:
a) $p[x < k] = 0,8315$ b) $p[x > k] = 0,0062$

Solución:

a) $p[x < k] = p\left[\frac{x-25}{6} < \frac{k-25}{6}\right] = p\left[z < \frac{k-25}{6}\right] = 0,8315$

$\Rightarrow \frac{k-25}{6} = 0,96 \Rightarrow k = 0,96\cdot 6 + 25 \rightarrow k = 30,76$

b) $p[x > k] = p\left[\frac{x-25}{6} > \frac{k-25}{6}\right] = p\left[z > \frac{k-25}{6}\right] =$

$= 1 - p\left[z \le \frac{k-25}{6}\right] = 0,0062 \Rightarrow p\left[z \le \frac{k-25}{6}\right] = 0,9938 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{k-25}{6} = 2,5 \Rightarrow k = 2,5\cdot 6 + 25 \rightarrow k = 40$

APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL A LA NORMAL

EJERCICIO 12 : Un examen de 100 preguntas admite como respuesta en cada una de ellas dos posibilidades, verdadero o falso. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que acierte más de 60 respuestas.

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de respuestas acertadas", entonces x es una binomial con $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$, en la que tenemos que calcular: $p[x > 60]$ (La media de x es $np = 50$. Su desviación típica es $\sqrt{npq} = 5$).

La calculamos aproximando con una normal: x es $B\left(100, \frac{1}{2}\right) \rightarrow x'$ es $N(50, 5) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

$$p[x > 60] = p[x' \geq 60{,}5] = p\left[z \geq \frac{60{,}5 - 50}{5}\right] = p[z \geq 2{,}1] =$$
$$= 1 - p[z < 2{,}1] = 1 - 0{,}9821 = 0{,}0179 \rightarrow p[x > 60] = 0{,}0179$$

EJERCICIO 13 : El 60% de una población de 20 000 habitantes tiene los ojos oscuros. Si elegimos al azar 50 personas de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 30 personas con los ojos oscuros?

Solución:
Si llamamos $x =$ "número de personas con los ojos oscuros", entonces x es una binomial con $n = 50, p = 0{,}6$, en la que tenemos que calcular $p[x < 30]$.
La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 50\ 0{,}6 = 30$, su desviación típica es $\sqrt{npq} = 3{,}46$.

x es $B(50;\ 0{,}6) \rightarrow x'$ es $N(30;\ 3{,}46) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

$$p[x < 30] = p[x' < 29{,}5] = p\left[z < \frac{29{,}5\quad 30}{3{,}46}\right] = p[z < -0{,}08] = p[z > 0{,}08] = 1 - p[z < 0{,}08] =$$
$$= 1 - 0{,}5319 = 0{,}4681 \rightarrow p[x < 30] = 0{,}4681$$

REPASO

EJERCICIO 14 : La temperatura en grados Fahrenheit de una cierta localidad sigue una distribución $N(68, 4)$. Calcula la probabilidad de que la temperatura en esa localidad:
a) Supere los 75° F. **b) Esté entre 65° F y 70° F.**

Solución:

a) $p[x > 75] = p\left[\frac{x - 68}{4} > \frac{75 - 68}{4}\right] = p[z > 1{,}75] = 1 - p[z \leq 1{,}75] = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$

b) $p[65 < x < 70] = p\left[\frac{65 - 68}{4} < \frac{x - 68}{4}\right] = p[-0{,}75 < z < 0{,}5] =$

$= p[z < 0{,}5] - p[z \leq -0{,}75] = p[z < 0{,}5] - p[z \geq 0{,}75] = p[z < 0{,}5] - (1 - p[z < 0{,}75]) =$
$= 0{,}6915 - (1 - 0{,}7734) = 0{,}4649$

EJERCICIO 5 : El 4% de una población padece una cierta enfermedad. Si elegimos al azar un grupo de 200 personas de esa población, calcula la probabilidad de que padezcan la enfermedad más de 15 de ellas.

Solución: Si llamamos $x =$ "nº de personas que padecen la enfermedad", entonces x es una binomial con $n = 200$ y $p = 0{,}04$, en la que tenemos que calcular $p[x > 15]$
La calculamos aproximando con una normal.

La media de x es $np = 200\ 0{,}04 = 8$; su desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{7{,}68} = 2{,}77$.

x es $B(200;\ 0{,}04) \rightarrow x'$ es $N(8;\ 2{,}77) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

$$p[x > 15] = p[x' \geq 15{,}5] = p\left[z \geq \frac{15{,}5 - 8}{2{,}77}\right] = p[z \geq 2{,}71] = 1 - p[z < 2{,}71] = 1 - 0{,}9966 = 0{,}0034$$

EJERCICIO 16 : La duración media de un determinado aparato eléctrico es de 10 años, con una desviación típica de 1 año. Si suponemos que la duración de este aparato sigue una distribución normal, calcula la probabilidad de que:
a) Dure más de 15 años. **b) Dure entre 8 y 12 años.**

Solución: x es $N(10, 1) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

a) $p[x > 15] = p\left[z > \frac{15 - 10}{1}\right] = p[z > 5] = 1 - p[z \leq 5] = 0$

b) $p[8 < x < 12] = p\left[\frac{8 - 10}{1} < z < \frac{12 - 10}{1}\right] = p[-2 < z < 2] =$

$p[z < 2] - p[z \leq -2] = p[z < 2] - (1 - p[z < 2]) =$
$= p[z < 2] + p[z < 2] - 1 = 0{,}9772 + 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$

EJERCICIO 17 : La probabilidad de ganar en un sorteo diario es del 2%. Si jugamos durante 60 días, ¿cuál es la probabilidad de que ganemos más de 20 veces?

Solución:
- Si llamamos $x =$ "nº de días que ganamos", tenemos que x es $B(60;\ 0{,}02)$.
- Tenemos que calcular $p[x > 20]$.

Lo hacemos aproximando con una normal: $\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}02 = 1{,}2$; $\sigma = \sqrt{npq} = 1{,}08$

- Entonces: x es $B(60;\ 0{,}02) \rightarrow x'$ es $N(1{,}2;\ 1{,}08) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$
- Así: $p[x > 20] = p[x' \geq 20{,}5] = p\left[z \geq \frac{20{,}5 - 1{,}2}{1{,}08}\right] = p[z \geq 17{,}9] = 0$

EJERCICIO 18 : En un instituto hay 200 chicas y 180 chicos. Calcula la probabilidad de que en un grupo de 30 alumnas y alumnos haya mas de 20 chicos.

Solución:
- Si llamamos $x =$ "nº de chicos en el grupo de 30", tenemos que x es $B(30;\ 0{,}47)$ puesto que:

$$p[\text{chico}] = \frac{180}{200 + 180} = \frac{180}{380} = 0{,}47$$

- Tenemos que calcular $p[x > 20]$; lo hacemos aproximadamente con una normal:

$\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}47 = 14{,}1$; $\sigma = \sqrt{npq} = 2{,}73$

- Entonces: x es $B(30;\ 0{,}47) \rightarrow x'$ es $N(14{,}1;\ 2{,}73) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$
- Así: $p[x > 20] = p[x' \geq 20{,}5] = p\left[z \geq \frac{20{,}5 - 14{,}1}{2{,}73}\right] = p[z \geq 2{,}34] = 1 - p[z < 2{,}34] = 1 - 0{,}9904 = 0{,}0096$