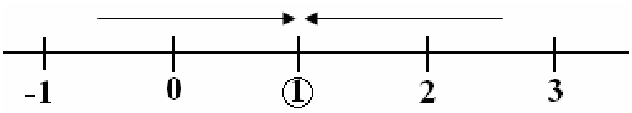
UNIDAD 8 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

CONCEPTOS PREVIOS:

- Decimos que:
  $\boxed{x \to a}$ y se lee ***"x tiende a a"***, si x toma valores cada vez más próximos a a.

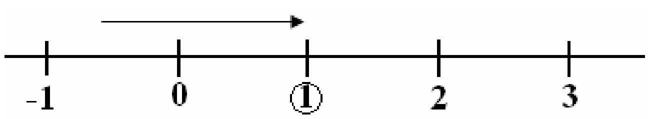
  Ejemplo: La secuencia de números $0;\, 2;\, 0'5;\, 1'9;\, 0'8;\, 1'4;\, 0'9;\, 1'1;\, 0'99;\, 1'01;\, 0'999;\, 1'001;\ldots$ se aproxima a **1**. Escribimos $\boxed{x \to 1}$.



Podemos distinguir dos modos de acercarnos a a, por la izquierda o por la derecha:

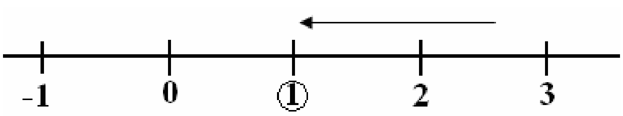
$\boxed{x \to a^-}$ se lee ***"x tiende a a por la izquierda"***, si x toma valores cada vez más próximos a a pero menores que a, es decir $x < a$.

Ejemplo: La secuencia de números $0;\, 0'5;\, 0'8;\, 0'9;\, 0'99;\, 0'999;\ldots$ se aproxima a **1** pero con valores menores que **1.** Escribimos $\boxed{x \to 1^-}$.



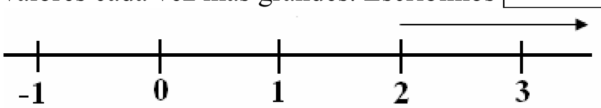
$\boxed{x \to a^+}$ se lee ***"x tiende a a por la derecha"***, si x toma valores cada vez más próximos a a pero mayores que a, es decir $x > a$.

Ejemplo: La secuencia de números $2;\, 1'9;\, 1'4;\, 1'1;\, 1'01;\, 1'001\ldots$ se aproxima a **1** pero con valores mayores que **1**. Escribimos $\boxed{x \to 1^+}$.



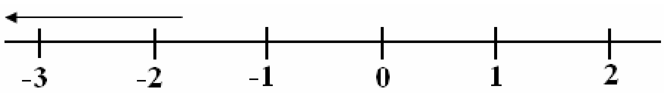
- Decimos que:
  $\boxed{x \to +\infty}$ y se lee ***"x tiende a $+\infty$"***, si x toma valores cada vez "más grandes" (mayores que cualquier número real prefijado k).

  Ejemplo: La secuencia de números $0;\, 1;\, 10;\, 100;\, 1.000;\, 10.000;\, 100.000;\, 1.000.000;\ldots$ toma valores cada vez más grandes. Escribimos $\boxed{x \to +\infty}$.



- Decimos que:
  $\boxed{x \to -\infty}$ y se lee ***"x tiende a $-\infty$"***, si x toma valores cada vez "más pequeños" (menores que cualquier número real prefijado k).

  Ejemplo: La secuencia de números $0;\, -1;\, -10;\, -100;\, -1.000;\, -10.000;\, -100.000;\, -1.000.000;\ldots$ toma valores cada vez más pequeños. Escribimos $\boxed{x \to -\infty}$.

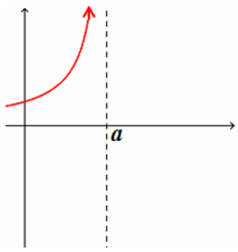


1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

1.1 Límites laterales

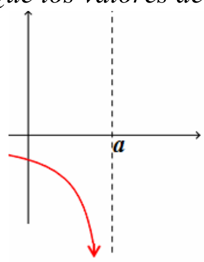
$\boxed{\text{¿Cómo se comporta } f(x) \text{ cuando } x \to a^- \text{?}}$ Pueden presentarse tres casos:

1º) Que $f(x)$ "crezca cada vez más" sin ninguna cota.



$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty}$$

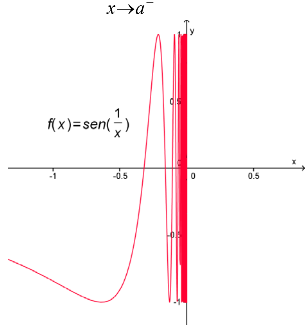
2º) Que los valores de $f(x)$ se hagan cada vez "más pequeños y negativos".



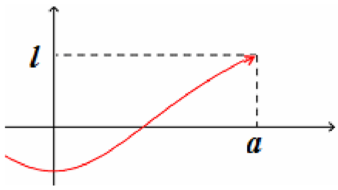
$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty}$$

Nota: Hay un cuarto caso "algo más raro":
"Que los valores de f(x) no presenten tendencia alguna",
En ese caso:

$$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x)$$

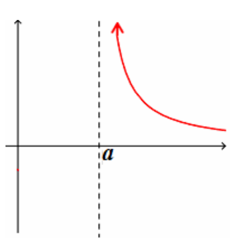


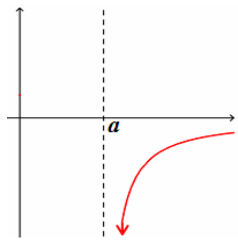
3º) Que los valores de $f(x)$ se aproximen a un número real l.

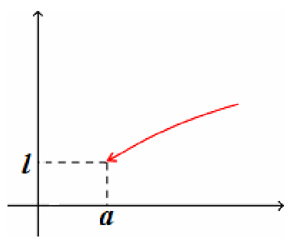


$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = l}$$

$\boxed{\text{¿Cómo se comporta } f(x) \text{ cuando } x \to a^+ \text{?}}$ De nuevo se presentan tres casos:







$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = l}$$

Se definen:

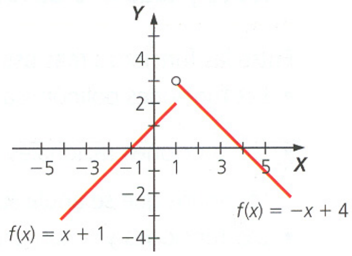
$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)}$ $\rightarrow$ ***Límite lateral por la izquierda*** de la función f en a.

$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)}$ $\rightarrow$ ***Límite lateral por la derecha*** de la función f en a.

A ambos se les llama ***límites laterales*** de la función f en a.

Observa: Para obtener el límite lateral de una función f en a, no es necesario que esté definida la función en a.

Ejemplo 1: *Observa la función definida a trozos dada por su gráfica:*



Si x se aproxima a 1 "por la izquierda", $f(x)$ se aproxima a 2.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

Si x se aproxima a 1 "por la derecha", $f(x)$ se aproxima a 3.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$$

Observa que $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

Ejemplo 2: *Calcula* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *y también* $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *en los siguientes casos e indica si coinciden.*

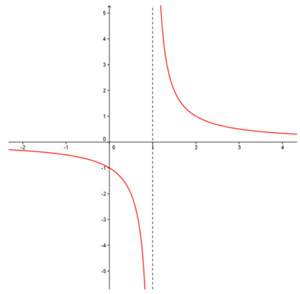
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

x	0	0´9	0´99	0´999	…
f(x)	-1	-10	-100	-1000	…

x	2	1´1	1´01	1´001	…
f(x)	1	10	100	1000	…

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}=+\infty$$



No coinciden.

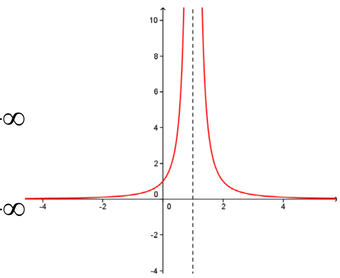
b) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

x	0	0´9	0´99	0´999	…
f(x)	1	100	10000	1000000	…

x	2	1´1	1´01	1´001	…
f(x)	1	100	10000	1000000	…

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$



Sí coinciden.

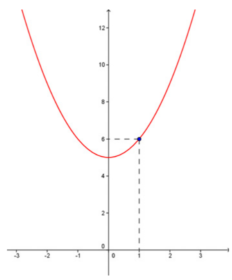
c) $f(x)=x^2+5$

x	0	0´9	0´99	0´999	…
f(x)	5	5´81	5´9801	5´9980	…

x	2	1´1	1´01	1´001	…
f(x)	9	6´21	6´0201	6´002001	…

$$\lim_{x\to 1^-} \left(x^2+5\right)=6$$

$$\lim_{x\to 1^+} \left(x^2+5\right)=6$$



Sí coinciden.

1.2 Límite de una función en un punto.

Si $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\begin{cases}+\infty\\-\infty\\l\end{cases}$ (alguna de las tres posibilidades), entonces se dice que

existe el límite cuando $x \to a$ *(*x *tiende a* a*)*

y se escribe así: $\exists \lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases}+\infty\\-\infty\\l\end{cases}$ respectivamente.

Es decir:

- Una función f tiene límite en un punto a si **existen los límites laterales en dicho punto y además coinciden**, y recíprocamente.
- En caso contrario, NO existe el límite en ese punto (pero podrán existir los límites laterales).
- El límite, si existe, **es único**.

Si los límites laterales no toman el mismo valor, es decir, si $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, o bien no existe alguno de ellos, se dice que NO existe el límite cuando $\boxed{x\to a}$ y se escribe: $\boxed{\nexists \lim_{x\to a} f(x)}$

Ejemplo 1 anterior:

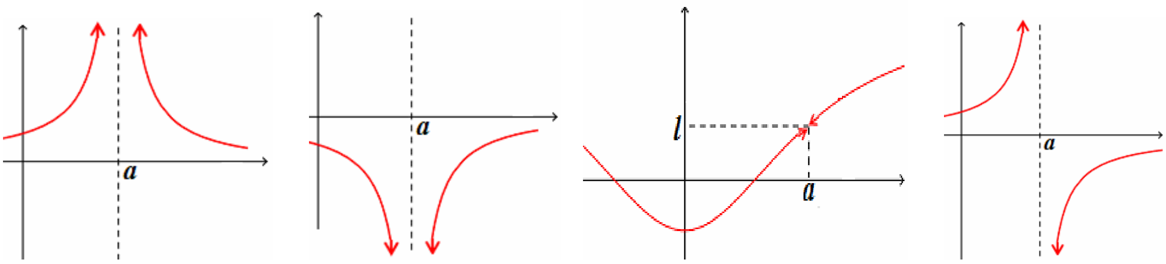
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=2\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{ya que} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Ejemplo 2 anterior:

a) $\nexists \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ b) $\exists \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ c) $\exists \displaystyle\lim_{x\to 1}\left(x^2+5\right)=6$

Por tanto, el concepto de límite de una función en un punto da respuesta a la pregunta:

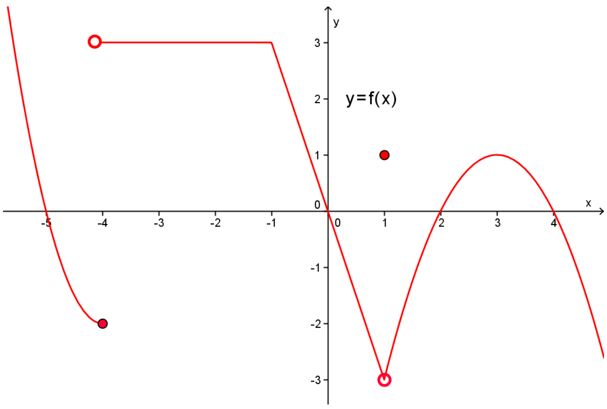
$\boxed{\text{¿Cómo se comporta } f(x) \text{ cuando } x\to a\text{?}}$



$\boxed{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=+\infty}$ $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=-\infty}$ $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=l}$ $\boxed{\nexists\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)}$

Fíjate: Si existe $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$, entonces *f(x)* se aproxima **al mismo valor** cuando $x\to a$, tanto si nos aproximamos a ***a*** por la izquierda como por la derecha.

Ejemplo1: *Fíjate en la gráfica y en el cálculo de los siguientes límites:*



$Dom(f)=\Re \qquad Rec(f)=\Re$

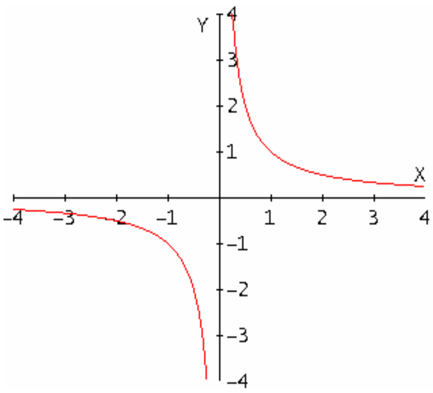
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -4^-} f(x)=-2\\ \displaystyle\lim_{x\to -4^+} f(x)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -4} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=-3\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=-3$$

Observa que, sin embargo, $f(1)=1$

Ejemplo2: *Observa ahora, con atención, estos otros ejemplos:*

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad Dom(f)=\Re\setminus\{0\} \quad Rec(f)=\Re\setminus\{0\}$



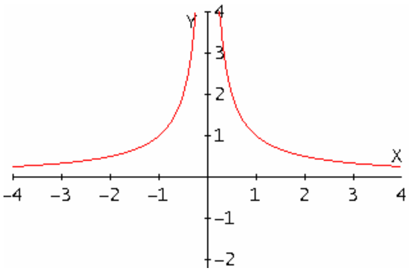
$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to -1}\frac{1}{x}=-1$

¿Sin embargo, qué valor toma $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$?

Estudiamos los *límites laterales*:

Como $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ (No existe el límite)

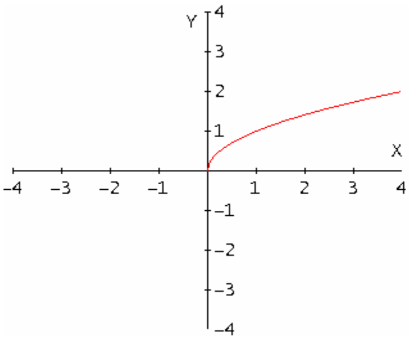
b) $f(x)=\left|\dfrac{1}{x}\right|$ $\quad Dom(f)=\Re\setminus\{0\}$ $\quad Rec(f)=(0,+\infty)$



¿Existe en este caso $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{x}\right|$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\left|\dfrac{1}{x}\right|=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\dfrac{1}{x}\right|=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\ \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{x}\right|=+\infty$$

c) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad Dom(f)=[0,+\infty)$ $\quad Rec(f)=[0,+\infty)$



En este caso $\nexists\ \lim\limits_{x\to -4}\sqrt{x}$ (Fíjate: $-4\notin Dom(f)$)

Tampoco existe el límite en $x=0$ ya que no existe el límite lateral por la izquierda en $x=0$:

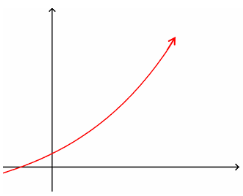
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\nexists\\\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)$$

No obstante $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

2. *LÍMITES EN EL INFINITO*

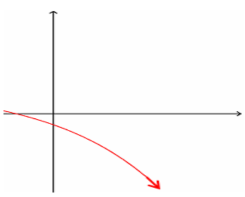
2.1 Comportamiento de una función cuando $x\to+\infty$

$\boxed{\text{¿Cómo se comporta } f(x) \text{ cuando } x\to+\infty\text{?}}$ Pueden presentarse cuatro casos:



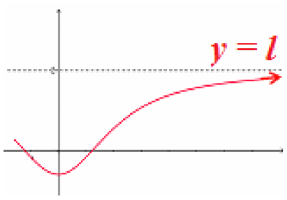
1º) Que $f(x)$ "crezca cada vez más" sin ninguna cota.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$



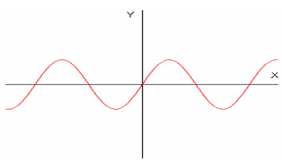
2º) Que los valores de $f(x)$ se hagan cada vez "más pequeños y negativos".

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$$



3º) Que los valores de $f(x)$ se aproximen a un número l.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=l}$$

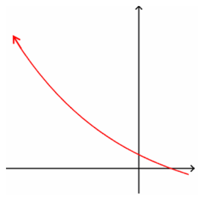


4º) Que $f(x)$ no presente tendencia alguna.

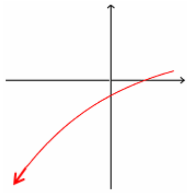
En este caso $\boxed{\nexists\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}$ como $f(x)=sen\ x$

2.2 Comportamiento de una función cuando $x \to -\infty$

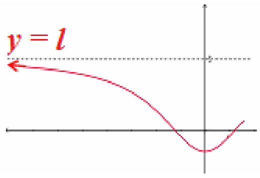
$\boxed{\text{¿Cómo se comporta } f(x) \text{ cuando } x \to -\infty \text{?}}$ De nuevo pueden presentarse cuatro casos:



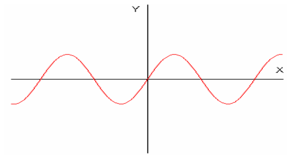
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$



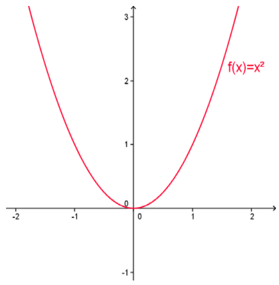
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$



$\nexists \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Ejemplo: *Calcula* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ *en los siguientes casos*

a) $f(x) = x^2$

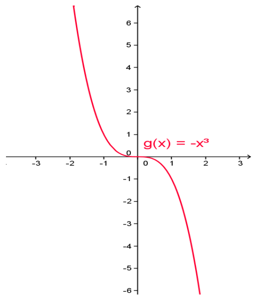


x	0	1	10	100	…
f(x)	0	1	100	10000	…

x	0	-1	-10	-100	…
f(x)	0	1	100	10000	…

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$$

b) $f(x) = -x^3$

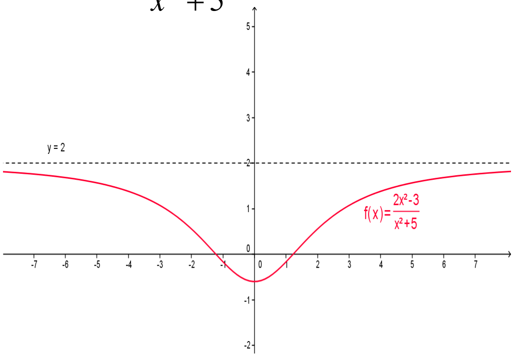


x	0	1	10	100	…
f(x)	0	-1	-1000	-1000000	…

x	0	-1	-10	-100	…
f(x)	0	1	1000	1000000	…

$$\lim_{x\to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 5}$

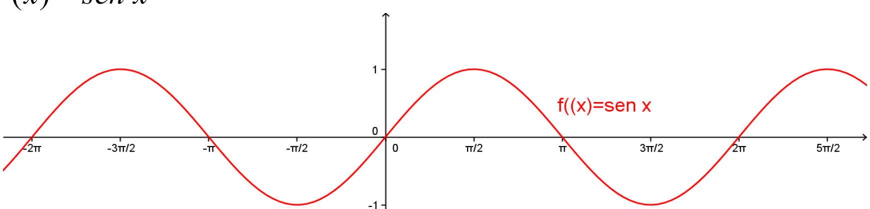


x	0	1	10	100	…
f(x)	-0´6	-0´167	1´876	1´999	…

x	0	-1	-10	-100	…
f(x)	-0´6	-0´167	1´876	1´999	…

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 5} = 2 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 5} = 2$$

d) $f(x) = sen\ x$



$$\nexists \lim_{x\to +\infty} sen\ x$$

3. CÁLCULO DE LÍMITES

El cálculo de un límite a partir de la gráfica de una función es una tarea fácil, basta con observar con atención dicha gráfica. Sin embargo no siempre se dispondrá de ella por lo que habrá que recurrir a su expresión algebraica. Sin embargo, el cálculo analítico del límite de una función puede ser fácil de obtener, o bien dar lugar a una indeterminación que se debe resolver del modo adecuado.

Propiedades: Si $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} g(x)=M$

Entonces:

$a)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} [f(x)\pm g(x)]=L\pm M$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} [f(x)\cdot g(x)]=L\cdot M$

$c)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}\ \ (Si\ M\neq 0)$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\\-\infty\end{cases}} f(x)^{g(x)}=L^M\ \ (L>0)$

NOTA: En algunos casos como cuando L y/o M son límites infinitos ó M=0, pueden aparecer indeterminaciones en las expresiones anteriores. Se resolverán de un modo específico.

Casos de indeterminación:

$a)\left[\dfrac{k}{0}\right]\quad b)\left[\dfrac{0}{0}\right]\quad c)\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\quad d)[\infty-\infty]\quad e)[0\cdot\infty]\quad f)\ [1^\infty]\quad g)\ [\infty^0]\quad h)\ [0^0]$

3.1. Cálculo de límites cuando $x\to a$

a) Casos inmediatos

Se obtiene el límite calculando $f(a)$, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to 3} x^2=3^2=9\qquad b)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x-5}=-\dfrac{10}{3}\qquad c)\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{3x+4}=\sqrt{3\cdot 7+4}=\sqrt{25}=5$

$d)\lim\limits_{x\to 0}(5+2x)^x=5^0=1\qquad e)\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{x}=\nexists\qquad f)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x+e^{2x}}{\ln(x+1)+x^3+1}=\dfrac{0^2\cdot\cos 0+e^{2\cdot 0}}{\ln 1+0^3+1}=1$

$g)\lim\limits_{x\to 2}(-2x^3+2x^2-1)=-2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-1=-9\qquad h)\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\qquad i)\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}=\nexists\qquad j)\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=\nexists$

$k)\lim\limits_{x\to 12}\sqrt{x-3}=3\qquad l)\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x-2}=\nexists\qquad m)\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0\qquad n)\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}=\nexists$

b) Cociente de polinomios

Objetivo: calcular $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ siendo $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas.

Caso 1º $\boldsymbol{Q(a)\neq 0}$

Sigue siendo un caso inmediato.

Ejemplos:

$a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+8}{x^2-4}=\dfrac{9}{-3}=-3\qquad b)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{0}{2}=0$

Caso 2º $\boldsymbol{P(a)\neq 0}$ y $\boldsymbol{Q(a)=0}$. ***Indeterminación*** $\dfrac{k}{0}$

Se resuelve obteniendo el valor de los límites laterales.

Ejemplos:

$a) \lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3} = \left(\frac{6}{0}\right)$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 3} \frac{2x}{x-3}$$

$b) \lim_{x \to 3} \frac{2x}{(x-3)^2} = \left(\frac{6}{0}\right)$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{(x-3)^2} = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{(x-3)^2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{2x}{(x-3)^2} = +\infty$$

$\boxed{\text{Caso 3º}}$ $\boldsymbol{P(a) = 0}$ y $\boldsymbol{Q(a) = 0}$. ***Indeterminación*** $\frac{0}{0}$

Se resuelve factorizando el numerador y el denominador.

Ejemplos:

$a) \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+5} = \frac{-1}{7}$$

$b) \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)^2} = \lim_{x \to 3} \frac{x}{x-2} = 3$$

$c) \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Factorizando:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{0}\right)$$ Indeterminación.

Límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$$

d) Cálculo de límites de funciones definidas a trozos

Ejemplo: Hallar el límite de la función $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & si\ x<3 \\ -x+7 & si\ 3 \le x < 6 \\ x/6 & si\ x \ge 6 \end{cases}$ en 1, 3 y 6.

$\boxed{\text{En } x = 1}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x-5) = -3$$

$\boxed{\text{En } x = 3}$ Límites laterales

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x-5) = 1 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (-x+7) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 3} f(x)$$

$\boxed{\text{En } x = 6}$ Límites laterales

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^-} (-x+7) = 1 \\ \lim_{x \to 6^+} f(x) = \lim_{x \to 6^+} \frac{x}{6} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 6} f(x) = 1$$

3.2. Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$

a) Casos inmediatos

En el caso de funciones polinómicas tendremos en cuenta el signo del coeficiente del término de mayor grado.

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(3x^2-7x\right)=+\infty$ $\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(-4x^2+5x\right)=-\infty$ $\quad c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(5x^2-30x\right)=+\infty$

$d)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x^3-5000x^2\right)=+\infty$ $\quad e)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-3}=+\infty$ $\quad f)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+7}=+\infty$

$g)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{3-x}=\nexists$

b) Cociente de polinomios

Surge la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Se resuelve analizando los términos de mayor grado del numerador y del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}=\begin{cases}+\infty\ \text{ ó }-\infty & si\ n>m,\ y\ \frac{a_n}{b_m}>0,\ o\ \ bien,\ \frac{a_n}{b_m}<0\\ \frac{a_n}{b_m} & si\ \ n=m\\ 0 & si\ \ n<m\end{cases}$$

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x-1}{10x^2-7x+3}=+\infty$ $\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-7x}{-5x^2+3x-2}=-\infty$ $\quad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+5x^2+1}{6x^3+3x+1}=-\frac{1}{3}$

$d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^7+3x+1}{2x^7+5}=2$ $\quad e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{5x^2+2}=0$ $\quad f)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x^2+5x-2}=0$

3.3. Cálculo de límites cuando $x \to -\infty$

Tendremos en cuenta que:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)}$$

y calcularemos el límite de la expresión resultante.

Ejemplos:

$a)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x^2-5x+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((-x)^2-5(-x)+3\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+5x+3\right)=+\infty.$

$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(3x^3+2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3(-x)^3+2(-x)-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3-2x-1\right)=-\infty.$

$c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-7}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(-x)-7}{3(-x)^2+2(-x)-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-7}{3x^2-2x-1}=0.$

3.4. Límites de funciones irracionales. Indeterminación $\frac{0}{0}$ e $\infty-\infty$

Se resuelven multiplicando y dividiendo la función por la expresión radical conjugada.

Ejemplos:

$a)\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}.$$

$$b)\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\left(\frac{0}{0}\right) \text{ Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}.$$

$$c)\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=(\infty-\infty) \text{ Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+4-x^2+2}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-2}}=\frac{6}{+\infty}=0\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=0.$$

$$d)\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=(\infty-\infty) \text{ Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{Indet.}$$

Se divide por x el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

$$e)\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\left(\frac{0}{0}\right) \text{ Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-2^2\right]\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left[\left(\sqrt{x+6}\right)^2-3^2\right]\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6-9)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{3}{2}.$$

3.5. Indeterminación $0\cdot\infty$ y otros casos de $\infty-\infty$

Se opera previamente y pasamos a un caso de indeterminación conocida tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ó $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Ejemplos:

$$a)\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5x+1}{x^2-3}\cdot\frac{x^2-4}{4x}\right)=(0\cdot\infty) \text{ Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5x^3+x^2-20x-4}{4x^3-12x}\right)=\frac{5}{4}\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5x+1}{x^2-3}\cdot\frac{x^2-4}{4x}\right)=\frac{5}{4}.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x^4-1}{x^2+5}\right)=(0\cdot\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^4-2}{x^3+5x}\right)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot\frac{x^4-1}{x^2+5}\right)=+\infty.$$

$c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+4}{x-3}-\dfrac{4x+5}{2}\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2(2x^2+4)-(4x+5)(x-3)}{2(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+8-4x^2+12x-5x+15}{2x-6}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+23}{2x-6}=\frac{7}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+4}{x-3}-\frac{4x+5}{2}\right)=\frac{7}{2}.$$

$d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+5x}{2x+5}-\dfrac{6x^2+9x}{4x-1}\right)=(\infty-\infty)$ Indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+5x)(4x-1)-(6x^2+9x)(2x+5)}{(2x+5)(4x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-31x^2-50x}{8x^2+18x-5}=-\frac{31}{8}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+5x}{2x+5}-\frac{6x^2+9x}{4x-1}\right)=-\frac{31}{8}.$$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}:\dfrac{x-1}{x^2+5}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ Indeterminación.

Aunque no es una indeterminación del tipo que estamos estudiando, también se resuelve operando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+10}{x^2-x}\right)=2\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}:\frac{x-1}{x^2+5}\right)=2.$$

3.6. Indeterminación 1^∞

Para resolverla tendremos en cuenta que:

Si $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} g(x)=\infty$ (ya sea $+\infty$ o bien $-\infty$) entonces:

$$\lim_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\begin{cases}a\\+\infty\end{cases}} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Ejemplos:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=1^\infty$ Indeterminación.

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x-1)(x-3)}{x^2+2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}}=e^3\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=e^3.$$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{x-2}=1^\infty$ Indeterminación.

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\left(\frac{3x+1}{3x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{3x}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+1}{3x}\right)^{x-2}=\sqrt[3]{e}.$$

$$c)\ \lim_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{\infty} \quad \text{Indeterminación.}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{-x+2}{2x(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{-(x-2)}{2x(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{-1}{2x}} = e^{\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{e} \Rightarrow \lim_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}.$$

$$d)\ \lim_{x\to6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}} = 1^{\infty} \quad \text{Indeterminación.}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to6}\frac{1}{x-6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-5x-6}{(x-4)(x-6)}} = e^{\frac{0}{0}} \quad \text{De nuevo tenemos una indeterminación.}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to6}\frac{(x+1)(x-6)}{(x-4)(x-6)}} = e^{\lim\limits_{x\to6}\frac{x+1}{x-4}} = e^{\frac{7}{2}} = \sqrt{e^7} = e^3\sqrt{e} \Rightarrow \lim_{x\to6}\left(\frac{x^2-4x-10}{x-4}\right)^{\frac{1}{x-6}} = e^3\sqrt{e}.$$

4. *ASÍNTOTAS*

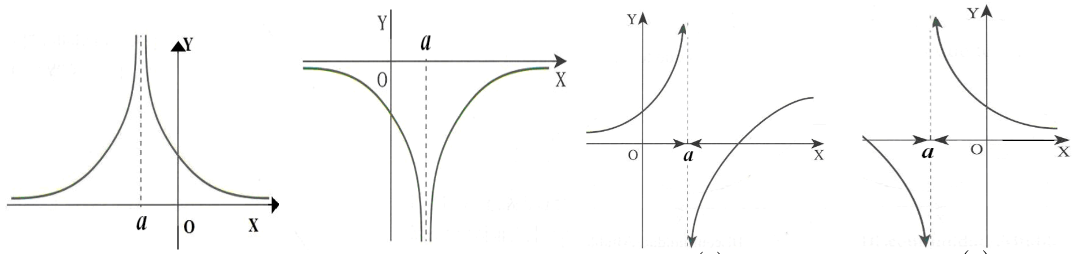
4.1 Asíntotas verticales

Si

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \text{ ó } -\infty \qquad \text{y/o} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \text{ ó } -\infty}$$

entonces la función tiene una rama infinita por la derecha o por la izquierda (o por las dos), y la recta $\boldsymbol{x = a}$ es una ***asíntota vertical.***.

- ***Posibles situaciones:***



$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

Observaciones:

- Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ racional, ***los candidatos a asíntotas verticales*** son los valores de x que anulan el denominador.
- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.

Ejemplo: Calcula las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \frac{3}{x-4} \quad b)\ g(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-2} \quad c)\ h(x) = \frac{x^2-x}{x-1} \quad d)\ i(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x}$$

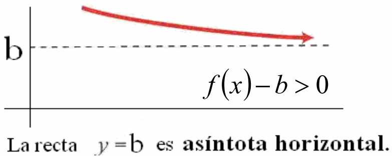
4.2 Asíntotas horizontales

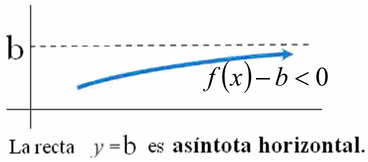
Si

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad (b\in\Re)}$$

entonces la función f tiene una rama infinita cuando $x \to +\infty$ y la recta $\boldsymbol{y = b}$ es una ***asíntota horizontal*** en $+\infty$.

- ***Posibles situaciones:***





Análogamente si $x \to -\infty$.

Observaciones:

- Una función tendrá, a lo sumo, dos asíntotas horizontales, una en $+\infty$ y otra en $-\infty$.
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es un cociente de polinomios, la función tendrá la misma asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$. Será necesario que $Grado\,P(x) \leq Grado\,Q(x)$.

Ejemplo: Calcula las asíntotas horizontales de: $a)\ f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x}$ $\quad b)\ g(x)=\dfrac{3x^2-5x+7}{x-2}$

4.3 Asíntotas oblicuas

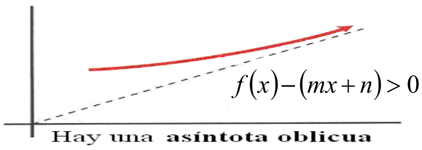
Si

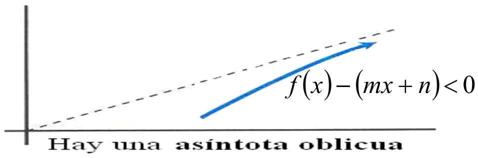
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0$$

entonces la función f tiene una rama infinita cuando $x\to+\infty$ y la recta $\boldsymbol{y=mx+n}$ es una ***asíntota oblicua*** en $+\infty$.

Para calcularla: $\boxed{m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \qquad n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]}$

- ***Posibles situaciones:***





Análogamente si $x \to -\infty$.

Observaciones:

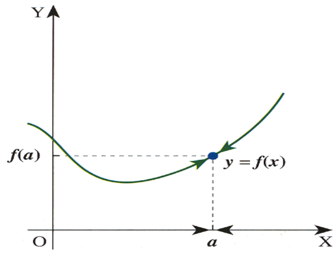
- Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es un cociente de polinomios, la función tendrá asíntota oblicua si $Grado\ P(x)-Grado\ Q(x)=1$. La asíntota oblicua será el cociente obtenido al efectuar la división de polinomios anterior.
- Una función tendrá, a lo sumo, dos asíntotas oblicuas, una en $+\infty$ y otra en $-\infty$.
- Si hay asíntota horizontal $\Rightarrow$ No hay asíntota oblicua y viceversa.

Ejemplo 1: *Calcula las asíntotas oblicuas de:* $a)\ f(x)=\dfrac{3x^2-5x+7}{x-2}$ $\quad b)\ g(x)=\dfrac{5x^3-2x^2+3}{x^2-4}$

Ejemplo 2: *Determina los valores de* $a,b\in\Re$, *sabiendo que la función* $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$ *pasa por el punto* $(1,2)$ *y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es* 6.

5. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

5.1 Continuidad de una función en un punto



Continua en *a*

Una función f ***es continua en*** a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Esta definición implica que se cumplan ***tres*** condiciones:

1) Existe $f(a)$ (Es decir, $a \in Dom(f)$.)

2) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y <u>es finito.</u>

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (Es decir, 1) y 2) coinciden).

Si no se cumple alguna de estas tres condiciones, diremos que la función es ***discontinua*** en ***a***.

5.2 Continuidad de una función en un intervalo

f es **continua en (a, b)** si lo es en todo punto de ese intervalo.

f es **continua en [a, b]** si es continua en (a, b) y, además, es continua por la derecha en *a* y por la izquierda en *b*.

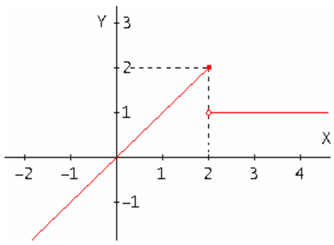
Nota:

f es ***continua por la derecha en*** a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

f es ***continua por la izquierda en*** b si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

5.3 Tipos de discontinuidades

a) Discontinuidad inevitable de salto finito*:* Presenta un salto en ese punto. Existen los límites laterales y son finitos, pero distintos.



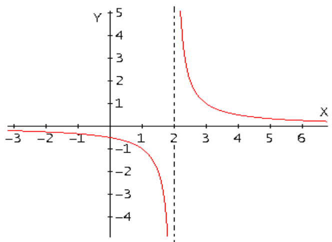
Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x & si\ x \le 2 \\ 1 & si\ x > 2 \end{cases}$ $\quad Dom(f) = \Re$

$\exists\ f(2) = 2$

$\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 2$.

b) Discontinuidad inevitable de salto infinito: Tiene ramas infinitas en ese punto. Uno o los dos límites laterales son infinitos.



Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\quad Dom(f) = \Re \setminus \{2\}$

$\nexists\ f(2)$

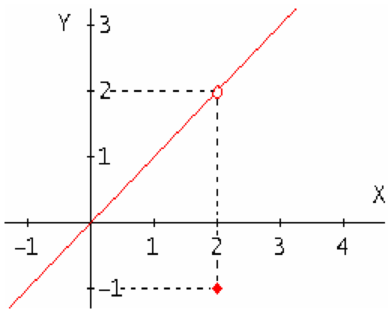
$\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 2$.

c) Discontinuidad evitable:

En este caso existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, pero no coincide con $f(a)$ (tiene ese punto "desplazado"), o bien no existe $f(a)$ (Le "falta" ese punto).

Ejemplo: *(Tiene ese punto "desplazado")*



$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \ne 2 \\ -1 & si\ x = 2 \end{cases}$ $\quad Dom(f) = \Re$

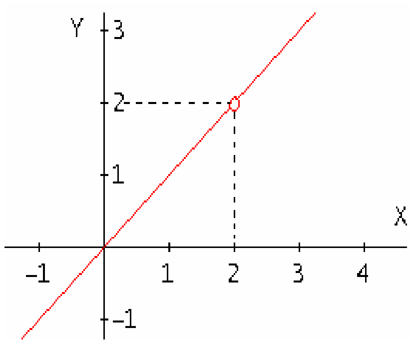
En este caso:

$\exists\ f(2) = -1$ y también $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$

Sin embargo, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \ne f(2)$

Esta función tiene una ***discontinuidad evitable*** en $x = 2$ y se evita redefiniendo $f(2) = 2$.

Ejemplo: *(Le "falta" ese punto)*



$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x-2} \qquad Dom(f)=\Re\setminus\{2\}$$

Fíjate que:

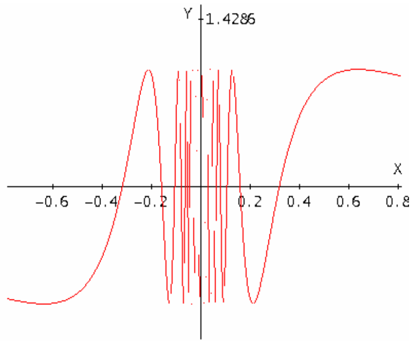
$\nexists\, f(2)$ (La función no está definida en $x=2$)

$\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$ ya que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x=2$$

Esta función tiene una ***discontinuidad evitable*** en $x=2$ y se evita definiendo $f(2)=2$.

d) Discontinuidad esencial: Alguno de los límites laterales no existe.



Ejemplo:

$$f(x)=sen\left(\frac{1}{x}\right) \qquad Dom(f)=\Re\setminus\{0\}$$

Observa que:

$\nexists\, f(0)$ (La función no está definida en $x=0$)

$$\nexists \lim_{x\to 0} f(x) \text{ ya que: } \left.\begin{array}{l}\nexists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\\ \nexists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\end{array}\right\}$$

f tiene una ***discontinuidad esencial*** en $x=0$

Propiedad: Si f y g son funciones continuas en a, las siguientes funciones también son continuas en a:

$a)\ f\pm g \quad b)\ f\cdot g \quad c)\ k\cdot f \quad k\in\Re \quad d)\ f/g \quad si\ \ g(a)\neq 0 \quad e)\ f\circ g$

Las funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus compuestas, son continuas en su dominio de definición.

Ejemplo 1: *Estudiar la continuidad de la función y clasificar sus posibles discontinuidades:*

$$a)\ f(x)=\begin{cases}x+1 & si\ \ x<0\\ x-1 & si\ \ x\geq 0\end{cases} \qquad b)\ g(x)=\begin{cases}2-x^2 & si\ \ x\leq 2\\ 2x-6 & si\ \ x>2\end{cases}$$

Representarlas gráficamente.

Ejemplo 2: *Estudiar la continuidad de la función y clasificar sus posibles discontinuidades:*

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & si\ \ x\in\,]-4,-2[\\ 1+3x & si\ \ x\in[-2,1[\\ x^2 & si\ \ x\in[1,4[\end{cases}$$

Representarla gráficamente.

Ejemplo 3: *Determina el valor de a en las siguientes funciones sabiendo que:*

$$a)\ f(x)=\begin{cases}2x+a & si\ x\leq 1\\ x^2-ax+2 & si\ x>1\end{cases} \qquad b)\ f(x)=\begin{cases}e^{ax} & si\ \ x\leq 0\\ x+2a & si\ \ x>0\end{cases}$$

es continua en $x=1$ — *es continua en $x=0$*

Ejemplo 4: *La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ no está definida en $x=1$. Indica si es posible definir $f(1)$ de modo que f sea continua en $x=1$.*

¿Qué tipo de discontinuidad presenta?