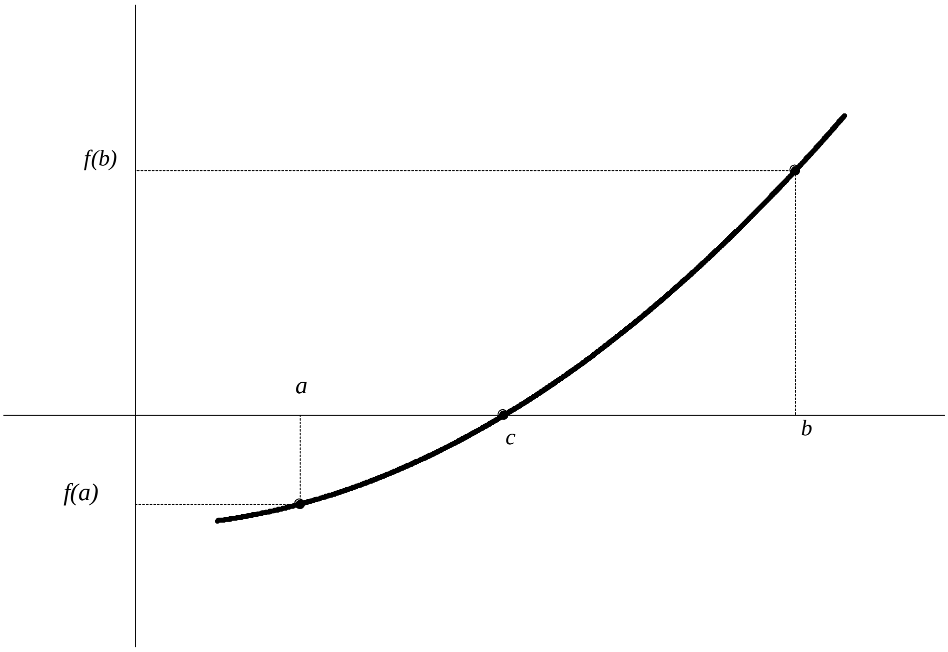
Teorema de Bolzano

Se *f(x)* é unha función continua no intervalo [*a*, *b*], e se, ademais, nos extremos do intervalo a función f(x) toma valores de signo oposto ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entón existe polo menos un valor $c \in (a, b)$ para o que se cumpre: $f(c) = 0$.



É dicir: se unha función é continua nun intervalo pechado e acoutado [a, b], e os valores nos extremos do intervalo teñen signos distintos, entón podemos asegurar a existencia de polo menos unha raíz da función no intervalo aberto (a, b).

Interpretación xeométrica:

Para ir de un punto situado por debaixo do eixo OX , punto ***(a, f(a)),*** a outro por riba, punto ***(b, f(b))***, a traves dunha curva continua, ou a inversa, debemos cortar, en polo menos un punto, ao eixo OX (punto *c* no que $f(c) = 0$).

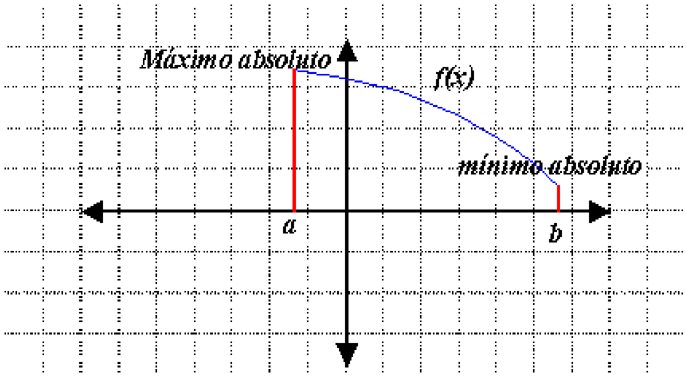
O mesmo razoamento se fai ao cando o negativo é ***f(a)*** e o positivo é ***f(b).***

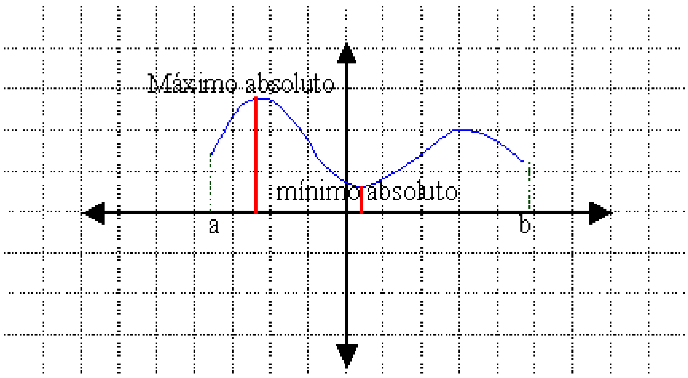
Exercicios

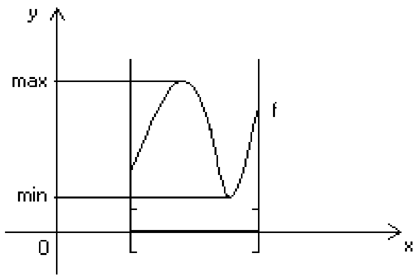
1. Comproba que a función $f(x)=2x^2-3x-5$ corta ao eixo das abscisas nun punto do intervalo [2,3].
2. Comproba, mediante o teorema de Bolzano que a ecuación $x^3+4x^2-2x=8$ ten unha solución no intervalo (1,2).
3. Comproba que a función $f(x)=e^x-3$ ten un cero no intervalo (1,2). Aproxima ese cero cun erro inferior a 0,1.
4. Pódese aplicar o teorema de Bolzano á función $f(x)=\frac{x}{tanx}$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$?
5. Se unha función, f, é continua nun intervalo [a,b] e ademais os signos de f(a) e f(b) coinciden, é posíbel que f teña algún cero nese intervalo?.
6. Comproba que a función $f(x)=2x^2+x+1$ toma o valor 10 no intervalo (-2,3).

Teorema de Weierstrass

Se y = *f(x)* é continua en [*a*,*b*] entón *f(x)* alcanza o máximo absoluto e o mínimo absoluto en [a,b].







Interpretación xeométrica
Como a función é continua no intervalo pechado entón a gráfica non se "rompe" entre os puntos (*a,f(a)*) e (*b,f(b)*) como se ve nos debuxos.
Por outra banda tamén vemos que en algun punto dese intervalo f alcanzará un máximo e tamén un mínimo.

Exercicios

Comproba que se pode aplicar o teorema de Weierstrass ás seguintes funcións no intervalo indicado

a) $f(x)=2x^2-4x+5$ en [-1,2]

b) $g(x)=\dfrac{5}{x-2}$ en [0,3]

c) $g(x)=\dfrac{5}{x-2}$ en [3, 6]

d) $h(x)=x^3-1$ en (-2,2)