

## UNIDAD 10 GEOMETRÍA MÉTRICA

Si solo tenemos en cuenta las relaciones existentes entre los puntos del espacio y los vectores de  $V_3$ , la geometría restringirá su estudio a las posiciones relativas de puntos, rectas y planos. Dicha geometría es la que se conoce con el nombre de **geometría afin**.

Ahora bien, si además consideramos el producto escalar en  $V_3$ , es posible definir distancias y ángulos. La parte de la geometría que estudia el espacio bajo este punto de vista es la que se denomina **geometría métrica o euclídea**.

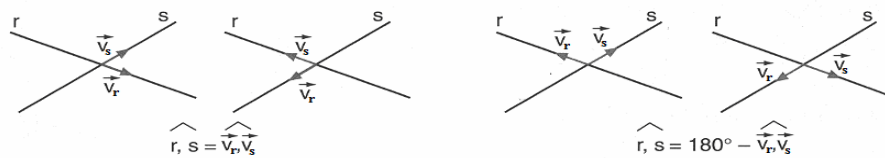
### 1. MEDIDA DE ÁNGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS

#### 1.1. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS



- Si dos rectas son paralelas o coincidentes forman un ángulo de  $0^\circ$ .
- Si dos rectas son secantes determinan cuatro ángulos iguales dos a dos. Se define el **ángulo que forman las dos rectas** como el menor de ellos.
- Si dos rectas se cruzan, se define el **ángulo que forman** como el ángulo que determinan una de ellas y la paralela a la otra que la corta.

El ángulo que forman dos rectas coincide con el ángulo que forman sus vectores directores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  si éste es agudo, o con su suplementario si es obtuso.



Por tanto, si  $\alpha = \widehat{r, s}$  y  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$  son los vectores directores de  $r$  y  $s$  respectivamente:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\widehat{\vec{v}_r, \vec{v}_s}) \right| = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} \leftarrow \text{Permite obtener el ángulo que forman } r \text{ y } s$$

Es necesario tomar valor absoluto ya que  $\cos \alpha$  coincide, salvo el signo, con el coseno del ángulo formado por sus vectores directores.

**Ejemplo:** Calcula el ángulo que forman las rectas  $r$  y  $s$ .

$$r : \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{2} = z \quad s : \begin{cases} x+y+2z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

Solución:

Hallamos un vector director de  $r$  y otro de  $s$ .

Un vector director de  $r$  es  $\vec{v}_r(5, 2, 1)$ .

Para hallar un vector director de  $s$  hacemos el producto vectorial.

$$\vec{v}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_s(1, 3, -2)$$

$$\cos \alpha = \frac{|5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{30} \sqrt{14}} \approx 0.439 \Rightarrow \alpha = 63^\circ 57'$$

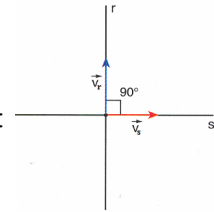
**Observa:** “Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores”

Por tanto:

**Consecuencia: Rectas perpendiculares.**

Sean  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$  vectores directores de las rectas  $r$  y  $s$  respectivamente. Entonces:

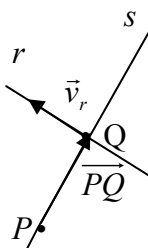
$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$



**Ejemplo 1:** Las rectas  $r : (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(3,2,4)$  y  $s : (x, y, z) = (1,1,3) + \mu(0,2,-1)$  son perpendiculares, puesto que sus vectores directores respectivos verifican:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (3,2,4) \cdot (0,2,-1) = 0$$

**Ejemplo 2:** Determina la ecuación vectorial de la recta  $s$  que pasa por el punto  $P(1,0,2)$  y corta perpendicularmente a la recta  $r : (x, y, z) = (2,1,0) + \lambda(3,2,1)$ .



Solución:

Solo existe una recta que pasa por  $P$  y corta perpendicularmente a  $r$ . Llamemos a esta recta  $s$  y  $Q$  al punto común a  $r$  y  $s$ .

Expresamos  $Q$  como punto genérico de la recta  $r$ :  $Q(2 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, \lambda)$

El vector  $\vec{PQ}(1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, \lambda - 2)$ , que es un vector director de  $s$  es perpendicular a  $\vec{v}_r$  vector director de  $r$ , por tanto, su producto escalar es 0:

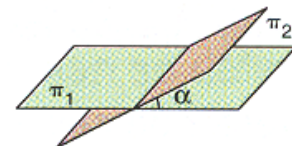
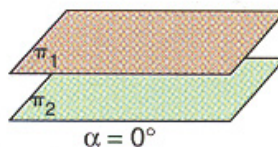
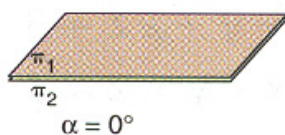
$$\vec{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, \lambda - 2) \cdot (3, 2, 1) = 0 \Rightarrow 3 + 9\lambda + 2 + 4\lambda + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{14}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ}\left(\frac{5}{14}, \frac{4}{7}, -\frac{31}{14}\right). \text{ Tomamos } \vec{v}_s = 14\vec{PQ}(5, 8, -31) \text{ como vector director de } s.$$

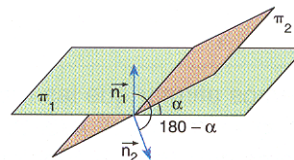
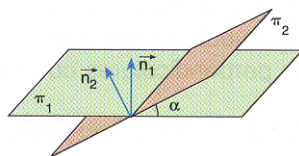
La recta  $s$  es  $s : (x, y, z) = (1, 0, 2) + \mu(5, 8, -31)$

### 1.2. ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

Solo tiene sentido considerar el caso de dos planos secantes, ya que si son paralelos o coincidentes forman un ángulo de  $0^\circ$ .



El **ángulo que forman dos planos secantes** es el menor de los ángulos diedros que determinan.



Para obtener la medida de ese ángulo  $\alpha = \widehat{\pi_1, \pi_2}$  utilizamos los vectores normales  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  de cada uno de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ :

$$\cos \alpha = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \leftarrow \text{Permite obtener el ángulo que forman } \pi_1 \text{ y } \pi_2$$

De nuevo hay que tomar valor absoluto ya que  $\cos \alpha$  coincide, salvo el signo, con el coseno del ángulo formado por los vectores normales a ambos planos.

**Ejemplo:** Dados los planos  $\pi_1 : 3x - y + 2z + 1 = 0$  y  $\pi_2 : 2x + y - 5z - 1 = 0$ , determina el ángulo que forman.

Solución:

Escribimos un vector normal a  $\pi_1$ ,  $\vec{n}_1(3, -1, 2)$ , y otro a  $\pi_2$ ,  $\vec{n}_2(2, 1, -5)$ .

Calculamos el ángulo que forman  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$ :

$$\cos \alpha = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-5)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{14} \sqrt{30}} \approx 0.244 \Rightarrow \alpha = 75^\circ 52' 43''$$

**Observa:** “Dos planos son perpendiculares cuando sus vectores normales lo sean”

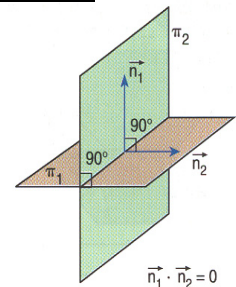
Por tanto:

**Consecuencia: Planos perpendiculares**

Sean  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  vectores normales de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  respectivamente.

Entonces:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$



**Ejemplo 1:** Los planos  $\pi_1 : 2x - 3y + z - 4 = 0$  y  $\pi_2 : y + 3z - 2 = 0$  son perpendiculares, puesto que sus vectores normales respectivos  $\vec{n}_1(2, -3, 1)$  y  $\vec{n}_2(0, 1, 3)$  verifican:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = 0 \Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2$$

**Ejemplo 2:** Dados los planos  $\pi_1 : 3x - 2y + 5z - 2 = 0$  y  $\pi_2 : kx + 7y + z = 0$ , hallar el valor de  $k$  para que sean perpendiculares.

Solución:

Los vectores normales son  $\vec{n}_1(3, -2, 5)$  y  $\vec{n}_2(k, 7, 1)$ ; luego, para que sean ortogonales se debe cumplir  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow (3, -2, 5) \cdot (k, 7, 1) = 0 \Rightarrow 3k - 14 + 5 = 0 \Rightarrow k = 3$

**Ejemplo 3:** Averigua si  $\pi_1 : 2x + y + z + 3 = 0$  es perpendicular a

$$\pi_2 : (x, y, z) = (3, 5, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, 1, 1).$$

Solución:

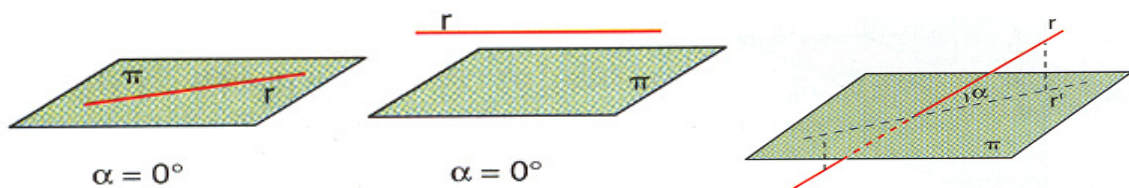
Los vectores normales a  $\pi_1$  y  $\pi_2$  respectivamente son  $\vec{n}_1(2, 1, 1)$  y

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{n}_2(1, -1, -1).$$

Como  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2, 1, 1) \cdot (1, -1, -1) = 0 \Rightarrow \pi_1$  es perpendicular a  $\pi_2$ .

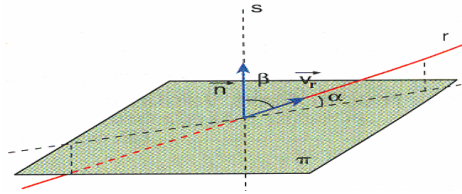
### 1.3. ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

Una recta puede estar incluida en un plano, ser paralela a éste o secante.



En los dos primeros casos recta y plano forman un ángulo de  $0^\circ$ .

El **ángulo**  $\alpha = \widehat{r, \pi}$  entre una recta y un plano es el ángulo que forma la recta con su proyección ortogonal sobre el plano.



Si observamos el dibujo:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta = \left| \cos(\widehat{\vec{v}_r, \vec{n}}) \right| = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|} \Rightarrow \boxed{\text{sen } \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}|}} \leftarrow \text{Permite obtener el ángulo que forman } r \text{ y } \pi$$

**Ejemplo 1:** Calcula el ángulo que forman la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

$$r : \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 5 \end{cases} \quad \pi : 3x - 4y + 5z - 1 = 0$$

Solución:

Un vector director de la recta es  $\vec{v}_r(1, 1, 0)$  y un vector normal al plano  $\vec{n}(3, -4, 5)$ .

$$\text{sen } \alpha = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{50}} = 0.1 \Rightarrow \alpha = 5^\circ 44' 21''$$

**Ejemplo 2:** Halla el ángulo formado por el plano  $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$  y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución:

Vector normal del plano  $\vec{n}(1, 2, -1)$ . Vector director de la recta  $\vec{v}_r(2, 1, 1)$ .

$$\text{sen } \alpha = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

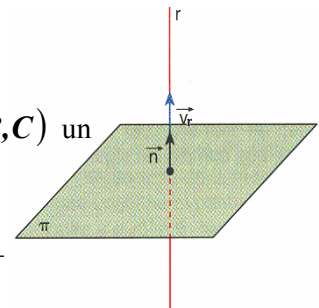
**Observa:** “Una recta y un plano son perpendiculares cuando el vector director de la recta sea paralelo al vector normal del plano”

Por tanto:

**Consecuencia: Recta y plano perpendiculares**

Sean  $\vec{v}_r(v_1, v_2, v_3)$  un vector director de una recta  $r$  y  $\vec{n}(A, B, C)$  un vector normal de un plano  $\pi$ . Entonces:

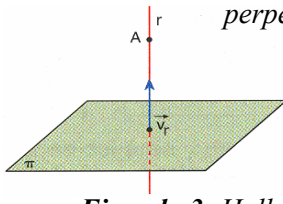
$$\boxed{r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{v}_r // \vec{n}} \quad \text{Es decir: } r \perp \pi \Leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$$



**Ejemplo 1:** La recta  $r : (x, y, z) = (2, 0, -3) + \lambda(-1, 3, 5)$  y el plano  $\pi : x - 3y - 5z + 2 = 0$  son perpendiculares, ya que el vector director  $\vec{v}_r(-1, 3, 5)$  y el vector normal

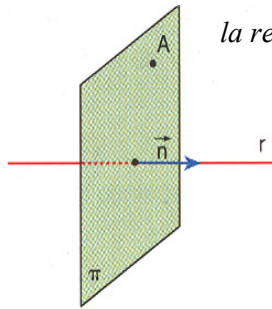
$$\vec{n}(1, -3, -5) \text{ verifican: } \frac{-1}{1} = \frac{3}{-3} = \frac{5}{-5} \Rightarrow -1 = -1 = -1$$

**Ejemplo 2:** Determina la ecuación continua de la recta que contiene al punto  $A(1,4,0)$  y es perpendicular al plano cuya ecuación es  $\pi : 5x - y + z + 3 = 0$ .



Solución:  
Cualquier vector normal del plano será un vector director de la recta.  
Como  $\vec{n}(5,-1,1)$ , tomo  $\vec{v}_r(5,-1,1)$ . Por tanto,  $r : \frac{x-1}{5} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{1}$ .

**Ejemplo 3:** Halla la ecuación del plano que contiene al punto  $A(2,0,3)$  y es perpendicular a



la recta  $r : \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{1}$

Solución:  
Cualquier vector director de la recta será un vector normal del plano.  
Como  $\vec{v}_r(1,5,1)$ , tomo  $\vec{n}(1,5,1)$ .  
Así pues, el plano será  $\pi : x + 5y + z + D = 0$ .  
Además  $A(2,0,3) \in \pi \Rightarrow 2 + 5 \cdot 0 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -5$   
Por tanto, la ecuación del plano es  $\pi : x + 5y + z - 5 = 0$ .

## 2. DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

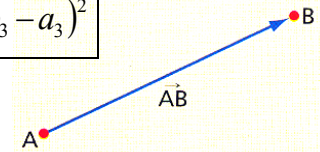
### 2.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Dados  $A(a_1, a_2, a_3)$  y  $B(b_1, b_2, b_3)$  dos puntos del espacio se define la **distancia entre A y B** como el módulo del vector  $\vec{AB}$ :

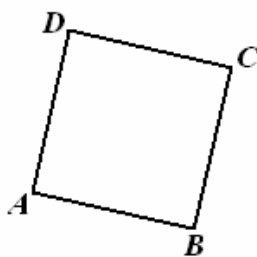
$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Verifica las siguientes propiedades:

- $d(A, B) \geq 0$  y  $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $d(A, B) = d(B, A)$
- $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$  (Desigualdad triangular)



**Ejemplo 1:** Calcula la distancia entre los puntos  $A(0,2,0)$  y  $C(7,2,-1)$ . A continuación, determina el perímetro  $P$  de un cuadrado cuyos vértices consecutivos son  $A(0,2,0)$ ,  $B(3,2,-4)$ ,  $C(7,2,-1)$  y  $D(4,2,3)$ .



Solución:

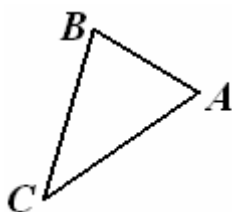
$$d(A, C) = |\vec{AC}| = \sqrt{(7-0)^2 + (2-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} u.$$

Hallamos la distancia entre dos vértices consecutivos, por ejemplo  $A(0,2,0)$  y  $B(3,2,-4)$ , y la multiplicamos por cuatro, ya que es un cuadrado:

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(3-0)^2 + (2-2)^2 + (-4-0)^2} = 5 u \Rightarrow P = 4 \cdot 5 = 20 u.$$

*Fíjate:* Para visualizar el verdadero cuadrado tendríamos que representarlo en tres dimensiones.

**Ejemplo 2:** Calcula el perímetro del triángulo de vértices  $A(3,1,0)$ ,  $B(1,2,-3)$  y  $C(1,0,5)$ .



Solución:

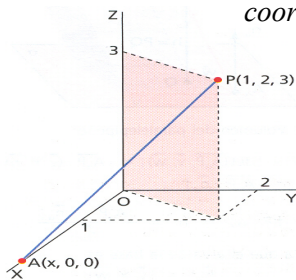
$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{14} u$$

$$d(A, C) = |\vec{AC}| = \sqrt{(1-3)^2 + (0-1)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{30} u$$

$$d(B, C) = |\vec{BC}| = \sqrt{(1-1)^2 + (0-2)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} u$$

Por tanto,  $P = \sqrt{14} + \sqrt{30} + 2\sqrt{17} \approx 17.47 u$ .

**Ejemplo 3:** La distancia del punto  $P(1,2,3)$  a otro  $A$  del eje  $OX$  es 7. Hallar las coordenadas del punto  $A$ .



Solución:

$A(x, 0, 0)$  por pertenecer al eje de abscisas.

$$d(P, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2} = 7 \Rightarrow (x-1)^2 + 13 = 49 \Rightarrow (x-1)^2 = 36 \Rightarrow x-1 = \pm 6 \Rightarrow x = 7 \text{ ó } x = -5$$

Los puntos posibles son:  $A_1(7, 0, 0)$  y  $A_2(-5, 0, 0)$ .

**2.2. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA**

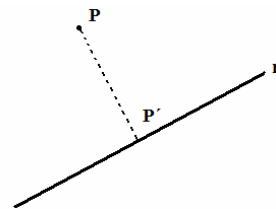
Dada una recta  $r(A, \vec{v}_r)$  y un punto  $P$ , se define la **distancia de  $P$  a  $r$** , y se escribe  $d(P, r)$ , como la mínima distancia de  $P$  a un punto cualquiera de  $r$ .

$$d(P, r) = d(P, P')$$

A  $P'$  se le llama **proyección ortogonal de  $P$  sobre la recta  $r$** .

**Observa:** Esta distancia coincide con la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta.

Si el punto  $P$  pertenece a la recta  $d(P, r) = 0$  y recíprocamente.



**PRIMER MÉTODO: A partir de la proyección ortogonal de un punto sobre una recta**

- 1º) Se halla el plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  y que contiene a  $P$ .
- 2º) Se obtiene  $P'$  como intersección de  $\pi$  y  $r$ .
- 3º) Se halla  $d(P, P')$ .

**Fijate:** Este método nos permite obtener  $P'$  y la recta perpendicular a  $r$  que contiene a  $P$ .

**Ejemplo:** Calcula la distancia del punto  $P(5, -1, 6)$  a la recta  $r$ :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

Obtén, además, la ecuación de la recta perpendicular a  $r$  que contiene a  $P$ .

Solución:

1º) Plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  y que contiene a  $P$ .

Por ser  $\pi \perp r$ , su vector director  $\vec{v}_r(-2, -1, 1)$  es un vector normal de  $\pi$ .

Tomando  $\vec{n} = \vec{v}_r(-2, -1, 1) \Rightarrow \pi: -2x - y + z + D = 0$ .

Como  $\pi$  ha de contener al punto  $P$ , se tiene:  $-2 \cdot 5 - (-1) + 6 + D = 0 \Rightarrow D = 3$

La ecuación de  $\pi$  es:

$$\pi: -2x - y + z + 3 = 0$$

2º) Obtención de  $P' = r \cap \pi$ .

Como  $P' \in r \Rightarrow P'(1 - 2\lambda, -\lambda, 5 + \lambda)$  punto genérico de  $r$ .

Pero  $P' \in \pi \Rightarrow -2(1 - 2\lambda) - (-\lambda) + (5 + \lambda) + 3 = 0 \Rightarrow -2 + 4\lambda + \lambda + 5 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

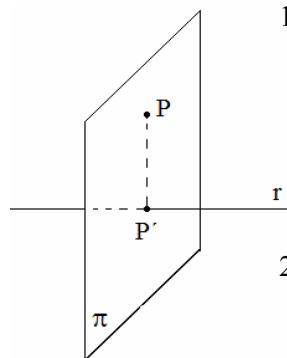
Por tanto:  $P'(3, 1, 4)$

3º)  $d(P, r) = d(P, P') = |PP'| = \sqrt{(3-5)^2 + (1-(-1))^2 + (4-6)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} u$ .

Obtención de la recta  $s$  perpendicular a  $r$  que contiene a  $P$ :

Un vector director de la recta  $s$  es  $\vec{v}_s = \overrightarrow{PP'}(-2, 2, -2)$ . Por tanto:

$$s: (x, y, z) = (5, -1, 6) + \lambda(-2, 2, -2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



Otra forma de obtener  $P' = r \cap \pi$ .

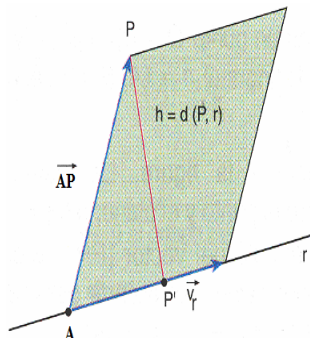
$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x + 2z - 11 = 0 \end{cases}$$

Sistema formado por  $r$  y  $\pi$ .

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x + 2z - 11 = 0 \\ -2x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P'(3, 1, 4)$$

**SEGUNDO MÉTODO: Utilizando el producto vectorial (Más fácil y rápido)**



Sabemos que:

$$A_{\text{Paralelogramo}} = |\vec{AP} \times \vec{v}_r| \Rightarrow |\vec{v}_r| \cdot h = |\vec{AP} \times \vec{v}_r| \Rightarrow h = \frac{|\vec{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} \Rightarrow$$

$$A_{\text{Paralelogramo}} = |\vec{v}_r| \cdot h$$

$$\Rightarrow d(P,r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} \leftarrow \text{Distancia de un punto } P \text{ a una recta } r$$

**Inconvenientes:** No se obtiene la proyección ortogonal de  $P$  sobre  $r$  ( $P'$ ) ni la recta perpendicular a  $r$  que contiene a  $P$ .

**Ejemplo 1:** Calcula la distancia entre el punto  $P(2,4,1)$  y la recta

$$r : (x, y, z) = (2, 3, -1) + \lambda(1, 2, 1).$$

Solución:

$A(2,3,-1)$  es un punto de la recta  $r$  y  $\vec{v}_r(1,2,1)$  un vector director.

$$\vec{AP}(0,1,2); \vec{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{AP} \times \vec{v}_r(-3,2,-1)$$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{9+4+1}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3} u$$

**Ejemplo 2:** Calcular la distancia del punto  $P(1,3,-1)$  a la recta  $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Solución:

Un punto de la recta es  $A(0,0,0)$  y un vector director  $\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  siendo  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  los vectores normales de los planos que definen la recta  $r$ .

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_r(1,1,2)$$

$$\vec{AP}(1,3,-1); \vec{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{AP} \times \vec{v}_r(7,-3,-2)$$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{49+9+4}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{93}}{3} u$$

**Ejercicio:** Sea el triángulo determinado por los puntos  $A(1,4,-1)$ ,  $B(0,0,1)$  y  $C(1,3,1)$ .

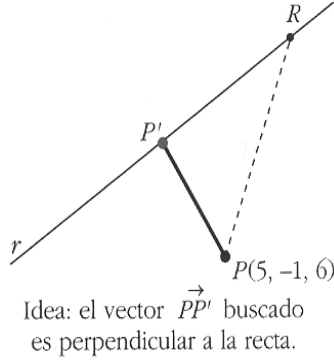
Halla la distancia del punto  $B$  a la recta determinada por  $A$  y  $C$ .

A continuación, calcula el perímetro y el área de este triángulo.

Solución:

$$d(B,r) = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{205}}{5} u \quad P = \sqrt{21} + \sqrt{5} + \sqrt{10} u \quad A = \frac{\sqrt{41}}{2} u^2.$$

**TERCER MÉTODO: Otra forma de obtener P'**



Si retomamos el ejemplo del primer método:  
 $P'(1 - 2\lambda, -\lambda, 5 + \lambda)$  es un punto genérico de la recta  $r$ .  
 $\Rightarrow \vec{P'P}(4 + 2\lambda, -1 + \lambda, 1 - \lambda)$ .  
 El vector que nos interesa es perpendicular a la recta  $r$ :  
 $\vec{v}_r \perp \vec{P'P} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{P'P} = 0$   
 Por tanto:  
 $(-2, -1, 1) \cdot (4 + 2\lambda, -1 + \lambda, 1 - \lambda) = 0$   
 $\Rightarrow -2(4 + 2\lambda) - 1(-1 + \lambda) + (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ .  
 $\Rightarrow \vec{P'P}(2, -2, 2)$  y  $P'(3, 1, 4)$   
 $\Rightarrow d(P, r) = d(P, P') = |\vec{PP}'| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}u$ .

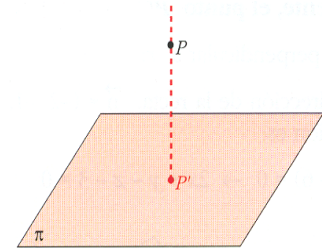
**2.3. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO**

La *distancia de un punto P a un plano π*, es la mínima distancia entre P y un punto cualquiera del plano π. Se escribe  $d(P, \pi)$ .

$$d(P, \pi) = d(P, P')$$

A  $P'$  se le llama *proyección ortogonal de P sobre el plano π*.

Si el punto P pertenece al plano  $d(P, \pi) = 0$  y recíprocamente.



**PRIMER MÉTODO: A partir de la proyección ortogonal de un punto sobre un plano**

- 1º) Se halla la recta  $r$  perpendicular a  $\pi$  que contiene a  $P$ .
- 2º) Se calcula  $P'$  como intersección de  $r$  y  $\pi$ .
- 3º) Se calcula  $d(P, P')$ .

**Fíjate:** Este método nos permite obtener  $P'$  y la recta perpendicular a  $\pi$  que contiene a  $P$ .

**Ejemplo:** Calcula la distancia del punto  $P(-2, 0, 3)$  al plano  $\pi: 4x + 2y - 4z + 3 = 0$ .

Obtén para ello la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π.

Solución:

1º) Recta  $r$  perpendicular a  $\pi$  que contiene a  $P$ .

Por ser  $r \perp \pi$ , el vector normal de  $\pi$  será el vector director de  $r$  o uno proporcional.

$$\vec{n} = (4, 2, -4) \Rightarrow \vec{v}_r(2, 1, -2) \Rightarrow r: \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

2º) Obtención de  $P' = r \cap \pi$ .

Como  $P' \in r \Rightarrow P'(-2 + 2\lambda, \lambda, 3 - 2\lambda)$  punto genérico de  $r$ .

Pero  $P' \in \pi \Rightarrow 4(-2 + 2\lambda) + 2\lambda - 4(3 - 2\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow$   
 $-8 + 8\lambda + 2\lambda - 12 + 8\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{17}{18}$

Por tanto:  $P'\left(-\frac{1}{9}, \frac{17}{18}, \frac{10}{9}\right)$

3º)  $d(P, \pi) = d(P, P') = |\vec{PP}'| = \sqrt{\left(-\frac{1}{9} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{17}{18} - 0\right)^2 + \left(\frac{10}{9} - 3\right)^2} = \frac{51}{18} = \frac{17}{6}u$ .

**Otra forma de obtener  $P' = r \cap \pi$ .**

$$r: \frac{x+2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Sistema formado por  $r$  y  $\pi$ .

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ 4x + 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P'\left(-\frac{1}{9}, \frac{17}{18}, \frac{10}{9}\right)$$

**SEGUNDO MÉTODO: Más fácil y rápido**

Basta aplicar la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \leftarrow \text{Distancia de un punto } P \text{ a un plano } \pi$$

siendo  $P(p_1, p_2, p_3)$  y  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ .

**Inconvenientes:** No se obtiene la proyección ortogonal de  $P$  sobre  $\pi$  ( $P'$ ) ni la recta perpendicular a  $r$  que contiene a  $P$ .

**Ejemplo 1:** Calcula la distancia del punto  $P(-2, 0, 3)$  al plano  $\pi : 4x + 2y - 4z + 3 = 0$ .

Solución:  $d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{6} u.$

**Ejemplo 2:** Calcular la distancia del punto  $P(1, 5, 0)$  al plano

$$\pi : (x, y, z) = (3, 0, 2) + \lambda(1, 3, 2) + \mu(5, 1, -2).$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 5 \\ y & 3 & 1 \\ z-2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 4x - 6y + 7z - 26 = 0$$

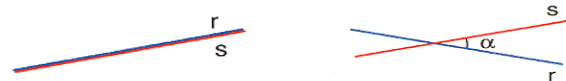
$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 1 - 6 \cdot 5 + 7 \cdot 0 - 26|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 7^2}} = \frac{52}{\sqrt{101}} = \frac{52\sqrt{101}}{101} \approx 5.17 u.$$

**2.4. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS**

La **distancia entre dos rectas**  $r$  y  $s$  es la mínima distancia entre un punto cualquiera de  $r$  y un punto cualquiera de  $s$ . Se escribe  $d(r, s)$ .

**Caso 1º: Rectas coincidentes o secantes**

En este caso es claro que  $d(r, s) = 0$ .



**Ejemplo:** Calcula la distancia entre la recta  $r : (x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, -1, 1)$  y la recta  $s : (x, y, z) = (-1, -1, 4) + \mu(1, 3, -2)$ .

Solución:

En primer lugar determinamos su posición relativa

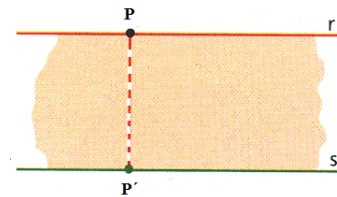
$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_r(2, -1, 1) \\ \vec{v}_s(1, 3, -2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan o se cruzan.}$$

Sean  $A(2, 1, 3) \in r$  y  $B(-1, -1, 4) \in s \Rightarrow \vec{AB}(-3, -2, 1)$

$$\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}) = 2 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan} \Rightarrow d(r, s) = 0.$$

**Caso 2<sup>a</sup>: Rectas paralelas**

Si  $r/s$ , tomamos un punto de una de ellas y calculamos su distancia a la otra (distancia de un punto a una recta).



**Ejemplo:** Hallar la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ , siendo:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

En primer lugar determinamos su posición relativa:

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_r(1,2,-1) \\ \vec{v}_s(1,2,-1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son paralelas o coincidentes.}$$

Sea  $A(1,0,1) \in r$ . Veamos si  $A$  verifica la ecuación de  $s$ .

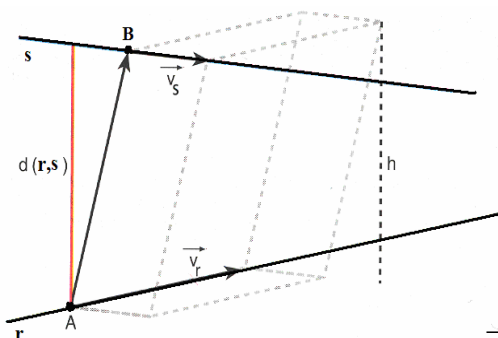
$$\frac{1-1}{1} \neq \frac{0-1}{2} \neq \frac{1-1}{-1} \Rightarrow A \notin s \Rightarrow r \text{ y } s \text{ son paralelas.}$$

Calculamos la distancia del punto  $B$  a la recta  $r$ . Sea  $B(1,1,1) \in s \quad \vec{AB}(0,1,0)$

$$\vec{AB} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{v}_r(-1,0,-1)$$

$$d(r,s) = d(B,r) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{1+0+1}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u$$

**Caso 3<sup>a</sup>: Rectas que se cruzan**



Sabemos que:

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{Paralelepipedo}} &= |[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]| \\ V_{\text{Paralelepipedo}} &= A_{\text{base}} \times \text{Altura} = |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot d(r,s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot d(r,s) = |[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]| \Rightarrow$$

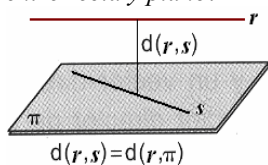
$$\Rightarrow d(r,s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} \leftarrow \text{Distancia entre dos rectas que se cruzan}$$

**Caso 3: Otra forma**

Dadas  $r$  y  $s$  que se cruzan:

1. Se calcula el plano  $\pi$  paralelo a  $r$  que contiene a  $s$ .
2. Se calcula  $d(r,\pi)$ .
3.  $d(r,s) = d(r,\pi)$

**Nota:** Para aplicar este método es necesario el apartado 2.6. Distancia entre recta y plano.



**Ejemplo:** Calcula la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ :

$$r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases}$$

Solución:

En primer lugar determinamos su posición relativa:

$$\left. \begin{matrix} \vec{v}_r(1,0,2) \\ \vec{v}_s(3,-1,4) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{2}{4} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan o se cruzan.}$$

Sean  $A(5,-1,8) \in r$  y  $B(4,3,5) \in s \Rightarrow \vec{AB}(-1,4,-3)$

$$\det(\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = 3 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

Calculamos la distancia entre las rectas:

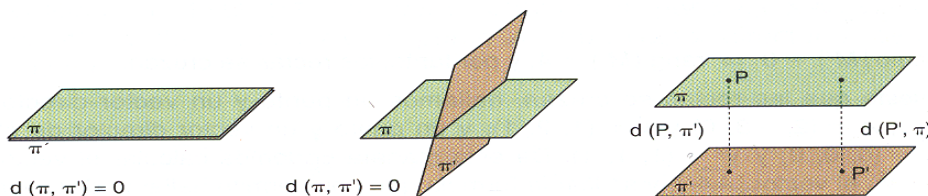
$$[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \quad (\text{Es el "mismo" determinante de antes pero con los vectores puestos por filas})$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{v}_s (2, 2, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{[\vec{AB}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{9}{\sqrt{4+4+1}} = 3u$$

### 2.5. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

Si los planos son coincidentes o secantes, su **distancia** es cero,  $d(\pi, \pi') = 0$ .



Si los planos son paralelos, su **distancia** se calcula tomando un punto de uno de los planos y hallando su distancia al otro plano:

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi'), \text{ con } P \in \pi$$

utilizando cualquiera de los dos métodos que se han estudiado.

**Ejemplo:** Halla la distancia entre los planos  $\pi : 2x - 4y + 4z + 3 = 0$  y  $\pi' : x - 2y + 2z - 1 = 0$ .

Solución:

Como  $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow$  Los planos  $\pi$  y  $\pi'$  son paralelos.

Tomamos un punto del plano  $\pi$ . Si  $y = 0, z = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ .

Por tanto,  $P(-\frac{3}{2}, 0, 0) \in \pi$

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi') = \frac{|-\frac{3}{2} - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{6} u$$

**Nota:** No obstante, existe otro sencillo método de calcular la distancia entre dos planos paralelos **siempre que sus coeficientes A, B y C COINCIDAN**. En caso contrario debemos igualarlos previamente:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{o bien} \quad d(\pi, \pi') = \frac{|D - D'|}{|\vec{n}|}$$

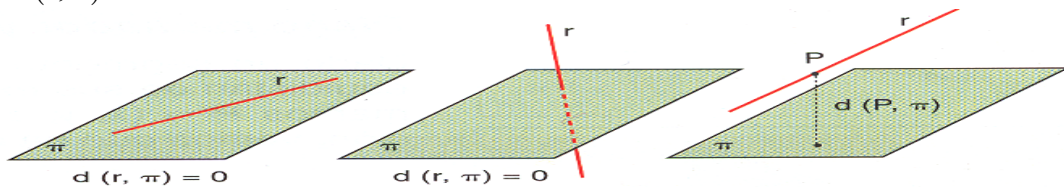
**Ejemplo:** Halla la distancia entre los planos  $\pi : x + 3y - \sqrt{6}z - 4 = 0$  y

$\pi' : x + 3y - \sqrt{6}z + 1 = 0$ .

$$\text{Solución: } d(\pi, \pi') = \frac{|-4 - 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (\sqrt{6})^2}} = \frac{5}{4} u$$

**2.6. DISTANCIA ENTRE RECTA Y PLANO**

Si la recta está incluida en el plano o si la recta y el plano son secantes, su **distancia** es cero,  $d(r, \pi) = 0$ .



Si la recta y el plano son paralelos, su **distancia** se calcula tomando un punto cualquiera de la recta y hallando su distancia al plano.

$$d(r, \pi) = d(P, \pi), \text{ con } P \in r$$

**Ejemplo 1:** Calcula la distancia de la recta  $r: \frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$  al plano  $\pi: x-3y-z+6=0$ .

Solución:

Estudiamos la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ . Sean  $\vec{v}_r(5, 2, -1)$  y  $\vec{n}(1, -3, -1)$ .

¿ $\vec{v}_r \perp \vec{n}$ ?  $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (5, 2, -1) \cdot (1, -3, -1) = 5 - 6 + 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n} \Rightarrow r // \pi$  o bien  $r \subset \pi$ .

El punto  $P(3, 1, -2) \in r \Rightarrow 3 - 3 \cdot 1 - (-2) + 6 = 8 \neq 0 \Rightarrow P \notin \pi \Rightarrow r // \pi$ .

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3 - 3 \cdot 1 - (-2) + 6|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = \frac{8\sqrt{11}}{11} \approx 2.41 u \text{ y } r // \pi.$$

**Fíjate:** Si  $r$  hubiese estado contenida en el plano  $\pi$  entonces  $d(r, \pi) = 0$ .

**Ejemplo 2:** Halla la distancia entre la recta  $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(1, 4, -3)$  y el plano  $\pi: x + y + 2z - 1 = 0$ .

Solución:

Sean  $\vec{v}_r(1, 4, -3)$  y  $\vec{n}(1, 1, 2)$ .

Por tanto,  $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 4, -3) \cdot (1, 1, 2) = 1 + 4 - 6 = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_r \not\perp \vec{n} \Rightarrow$  La recta y el plano se cortan en un punto, por tanto,  $d(r, \pi) = 0$ .

**Ejemplo 3:** Halla la distancia entre la recta  $r: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 3 = 0 \end{cases}$  y el plano  $\pi: x + y - 2z + 3 = 0$ .

Solución:

$$\text{Tomó } x = \lambda \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \text{ Por tanto } \Rightarrow \begin{cases} P(0, -2, -3) \\ \vec{v}_r(1, 1, 1) \end{cases}$$

¿ $\vec{v}_r \perp \vec{n}$ ?  $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, -2) = 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n} \Rightarrow r // \pi$  o bien  $r \subset \pi$ .

El punto  $P(0, -2, -3) \in r \Rightarrow 0 - 2 - 2 \cdot (-3) + 3 = 7 \neq 0 \Rightarrow P \notin \pi \Rightarrow r // \pi$ .

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|0 - 2 - 2 \cdot (-3) + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6} \approx 2.86 u$$

**Otra forma. Posición relativa:** Sistema formado por las ecuaciones de  $r$  y  $\pi$ :

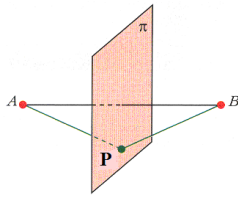
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 3 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (M|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rang}(M) = 2 \\ \text{rang}(M|b) = 3 \end{matrix} \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ son paralelos.}$$

Se calcula un punto de la recta. Tomó  $x = 0 \Rightarrow y = -2; z = -3 \Rightarrow P(0, -2, -3)$ .

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|0 - 2 - 2 \cdot (-3) + 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6} \approx 2.86 u$$

### 3. PLANO MEDIADOR Y PLANO BISECTOR

#### 3.1. PLANO MEDIADOR



Se llama **plano mediador** de un segmento, al plano perpendicular a éste en su punto medio. Es el **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento:

$$d(A, P) = d(B, P)$$

**Otra forma:**

Calcular el plano  $\pi$  que pasa por el punto medio de  $AB$ , y que tiene como vector normal  $\vec{n} = \vec{AB}$ .

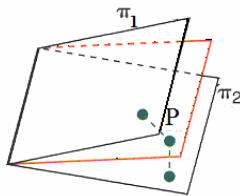
**Ejercicio:** El mismo por este método

**Ejemplo:** Determina el plano mediador del segmento  $AB$  cuyos extremos son los puntos  $A(-3, 1, 0)$  y  $B(2, 0, 3)$ .

Solución: Sea  $P(x, y, z)$  un punto cualquiera del plano mediador  $\pi \Rightarrow d(A, P) = d(B, P)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\vec{AP}| &= |\vec{BP}| \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-3)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pi : 10x - 2y + 6z - 3 = 0. \end{aligned}$$

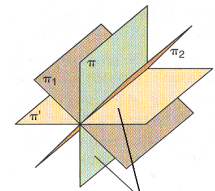
#### 3.2. PLANO BISECTOR.



Se llama **plano bisector** de dos planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  al **lugar geométrico** de los puntos del espacio que equidistan de ambos planos:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$$

**Fíjate:** En realidad existen dos planos bisectores que dividen a los distintos ángulos diedros en dos partes iguales.



**Ejemplo:** Considera los planos  $\pi_1 : 2x + 2y - z + 3 = 0$  y  $\pi_2 : 3x - 4y - 5 = 0$ , y determina la ecuación de sus planos bisectores.

Solución:

$$\begin{aligned} d(P, \pi_1) &= d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|2x + 2y - z + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3x - 4y - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{|2x + 2y - z + 3|}{3} = \frac{|3x - 4y - 5|}{5} \Rightarrow 5 \cdot |2x + 2y - z + 3| = 3 \cdot |3x - 4y - 5| \end{aligned}$$

$$|a| = |b| \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{o bien} \\ a = -b \end{cases}$$

De aquí obtenemos dos planos:

$$10x + 10y - 5z + 15 = \pm(9x - 12y - 15) \Rightarrow \begin{cases} \pi : x + 22y - 5z + 30 = 0 \\ \pi' : 19x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

### 4. PERPENDICULAR COMÚN

Se llama **perpendicular común** de dos rectas que se cruzan a otra recta secante a éstas y perpendicular a ambas.

**Fíjate:** Hay infinitas rectas perpendiculares a dos rectas que se cruzan pero sólo una recta  $t$  que las corta.

**Procedimiento para obtener la perpendicular común  $t$ :**

adas dos rectas que se cruzan  $r(A, \vec{v}_r)$  y  $s(B, \vec{v}_s)$ .

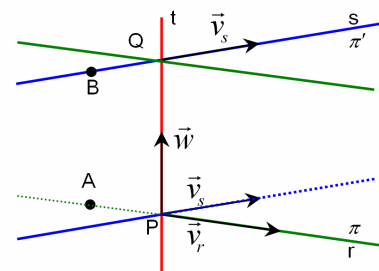
1º) Calculamos  $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$  vector ortogonal a  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$ .

2º) Hallamos los planos  $\pi(A, \vec{v}_r, \vec{w})$  y  $\pi'(B, \vec{v}_s, \vec{w})$ .

3º) La perpendicular común viene dada por la intersección de  $\pi$  y  $\pi'$ .

Por tanto, expresamos ésta con sus ecuaciones implícitas, a partir de las ecuaciones de  $\pi$  y  $\pi'$ .

**Fíjate:**  $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$  es un vector director de la perpendicular común  $t$ .



**Ejemplo 1:** Halla la perpendicular común a las rectas  $r : (x, y, z) = (2, 3, 1) + \lambda(1, 2, -1)$  y  $s : (x, y, z) = (2, 1, 1) + \mu(-13, -2, 5)$ .

Solución:

1º) Calculamos  $\vec{w}$  vector ortogonal a  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$ .

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -13 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 8\vec{j} + 24\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_r \times \vec{v}_s (8, 8, 24)$$

En lugar de este vector, tomamos  $\vec{w}(1, 1, 3)$  proporcional a  $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ .

2º) Calculamos  $\underbrace{\pi(A, \vec{v}_r, \vec{w})}_{\text{contiene a } r}$  y  $\underbrace{\pi'(B, \vec{v}_s, \vec{w})}_{\text{contiene a } s}$ .

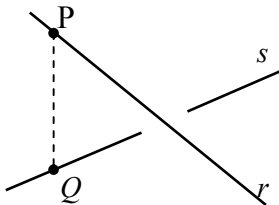
$$\left. \begin{array}{l} \pi : \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ y-3 & 2 & 1 \\ z-1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : 7x - 4y - z - 1 = 0 \\ \pi' : \begin{vmatrix} x-2 & -13 & 1 \\ y-1 & -2 & 1 \\ z-1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' : x - 4y + z + 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3^\circ \text{ Perpendicular común } t: \\ \Rightarrow t : \begin{cases} 7x - 4y - z - 1 = 0 \\ x - 4y + z + 1 = 0 \end{cases} \\ \uparrow \\ \text{Perpendicular común a } r \text{ y } s \end{array}$$

**Otra forma:** El siguiente ejemplo nos muestra una variante del anterior, que va a permitir abordar el problema del cálculo de la perpendicular común desde otro punto de vista:

**Ejemplo 2:** Sabiendo que las rectas  $r : x = y = z$  y  $s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$  se cruzan, halla los

puntos  $P$  y  $Q$ , de  $r$  y  $s$  respectivamente, que están a mínima distancia.

Solución:



Como  $r : x = y = z \Rightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0, 0, 0) \\ \vec{v}_r(1, 1, 1) \end{cases}$ ;  $s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(1, 3, 0) \\ \vec{v}_s(1, 1, -1) \end{cases}$

Punto genérico de  $r : P(\lambda, \lambda, \lambda)$

Punto genérico de  $s : Q(1 + \mu, 3 + \mu, -\mu)$

Sea  $t$  la perpendicular común a  $r$  y  $s$ .  $P$  y  $Q$  están situados en  $t$ , es decir,  $P = r \cap t$  y  $Q = s \cap t$ .

Por tanto un vector director de  $t$ ,  $\overrightarrow{PQ}(1 + \mu - \lambda, 3 + \mu - \lambda, -\mu - \lambda)$ , verifica:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_s \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (1 + \mu - \lambda, 3 + \mu - \lambda, -\mu - \lambda) \cdot (1, 1, 1) = 0 \\ (1 + \mu - \lambda, 3 + \mu - \lambda, -\mu - \lambda) \cdot (1, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \mu - \lambda + 3 + \mu - \lambda - \mu - \lambda = 0 \\ 1 + \mu - \lambda + 3 + \mu - \lambda + \mu + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + \mu = -4 \\ -\lambda + 3\mu = -4 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1; \mu = -1.$$

Con lo que los puntos buscados son  $P(1, 1, 1)$ ;  $Q(0, 2, 1)$ . Además  $\overrightarrow{PQ}(-1, 1, 0)$ .

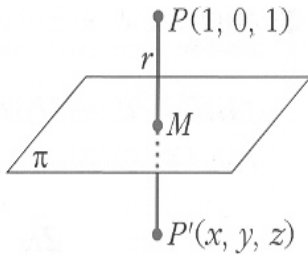
La perpendicular común  $t$ , a  $r$  y  $s$ , viene dada por  $t : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha(-1, 1, 0)$ .

**Fíjate:**  $d(r, s) = d(P, Q)$ , por tanto este método permite calcular fácilmente la distancia entre dos rectas que se cruzan:  $d(r, s) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} u$ .

### 5. SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UN PLANO

**Ejemplo:** Halla el punto simétrico de  $P(1,0,1)$  respecto del plano  $\pi : x - y + z = 1$ .

1º) Se halla la recta  $r$  que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $\pi$ .



$$\text{Tomó } \vec{v}_r = \vec{n}(1, -1, 1) \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

2º) Se obtiene el punto de corte  $M$  de  $\pi$  y  $r$ .

$M \in r \Rightarrow M(1 + \lambda, -\lambda, 1 + \lambda)$  punto genérico de  $r$ .

$$M \in \pi \Rightarrow 1 + \lambda - (-\lambda) + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow 3\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

3º)  $P'(x, y, z)$  es el simétrico de  $P$  respecto a  $M$  ( $M$  es el punto medio de  $\overline{PP'}$ ).

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow P'\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

### 6. SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA

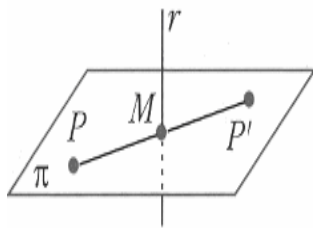
**Ejemplo:** Determina el punto simétrico de  $P(-3, 1, -7)$  respecto de la recta

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

1º) Se halla el plano  $\pi$  que contiene a  $P$  y es perpendicular a  $r$ .

$$\text{Tomó } \vec{n} = \vec{v}_r(1, 2, 2) \Rightarrow x + 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow -3 + 2 - 14 + D = 0 \Rightarrow D = 15$$

$$\text{Por tanto, } \pi : x + 2y + 2z + 15 = 0.$$



2º) Se obtiene el punto de corte  $M$  de  $r$  y  $\pi$ .

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \text{ Como } M \in r \Rightarrow M(-1 + \lambda, 3 + 2\lambda, -1 + 2\lambda)$$

Punto genérico de la recta  $r$

$$M \in \pi \Rightarrow -1 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda + 15 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 18 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow M(-3, -1, -5)$$

3º) El punto  $P'(x, y, z)$  es el simétrico de  $P$  respecto a  $M$ .

$$\left(\frac{x-3}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z-7}{2}\right) = (-3, -1, -5) \Rightarrow P'(-3, -3, -3)$$

### 7. RECTA QUE SE APOYA SOBRE OTRAS DOS

#### 7.1. RECTA QUE SE APOYA EN OTRAS DOS Y QUE PASA POR UN PUNTO

Para determinar la ecuación de la recta  $s$  que se apoya en otras dos  $r$  y  $s$  que pasa por un punto  $P$ :

1º) Se obtiene el plano  $\pi_1$  que contiene a  $r$  y a  $P$ .

2º) Se obtiene el plano  $\pi_2$  que contiene a  $s$  y a  $P$ .

3º) La recta buscada  $t$  viene dada por la intersección de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

#### 7.2. RECTA QUE SE APOYA EN OTRAS DOS Y QUE ES PARALELA A UNA DADA

Para determinar la ecuación de la recta  $s$  que se apoya en otras dos  $r_1$  y  $r_2$  y que es paralela a otra recta  $t$  ( $\vec{v}_t$  es un vector director de la recta  $t$ ):

1º) Se obtiene el plano  $\pi_1$  que contiene a  $r_1$  y a  $\vec{v}_t$  (paralelo a  $t$ ).

2º) Se obtiene el plano  $\pi_2$  que contiene a  $r_2$  y a  $\vec{v}_t$  (paralelo a  $t$ ).

3º) La recta buscada  $s$  viene dada por la intersección de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

**Ejemplo:** Determina la ecuación de la recta que pasa por  $P(1,-1,2)$  y se apoya en:

$$r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

Solución:

$$r: \begin{cases} A(1,0,-1) \\ \vec{v}_r(-2,1,3) \end{cases} \quad s: \begin{cases} B(0,2,2) \\ \vec{v}_s(2,-1,3) \end{cases}$$

1º) Plano  $\pi_1$  que contiene a  $r_1$  y a  $P$ .

$$\overrightarrow{AP}(0,-1,3) \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1: 3x+3y+z-2=0$$

2º) Plano  $\pi_2$  que contiene a  $r_2$  y a  $P$ .

$$\overrightarrow{BP}(1,-3,0) \Rightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2: 9x+3y-5z+4=0$$

3º) Ecuación de la recta buscada:

$$t: \begin{cases} 3x+3y+z-2=0 \\ 9x+3y-5z+4=0 \end{cases}$$