UNIDAD 8: VECTORES EN EL ESPACIO

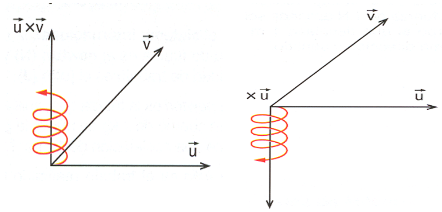
- ***Puntos alineados:*** **Tres puntos A, B, C, están alineados si** $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{BC}$ **son proporcionales, es decir,** $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$
- ***Punto medio de un segmento:*** $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$ **siendo** $A(a_1, a_2, a_3)$ *y* $B(b_1, b_2, b_3)$
- ***Simétrico de P con respecto a Q:*** **Es el punto P´(x, y, z) que verifica** $\frac{p_1+x}{2} = q_1,\ \frac{p_2+y}{2} = q_2,\ \frac{p_3+z}{2} = q_3$

PRODUCTO ESCALAR

- ***Definición:*** $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- ***Interpretación geométrica:*** $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}\,'|$ **siendo** $\vec{v}\,'$ **la proyección de** $\vec{v}$ **sobre** $\vec{u}$**.**
- ***Expresión analítica:*** $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ **siendo** $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ **respecto a** $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ **base ortonormal de** V_3
- ***Aplicaciones***
  - ***Módulo de un vector:*** $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
  - ***Ángulo formado por dos vectores:*** $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$
  - ***Condición de perpendicularidad:*** $\vec{u}\perp\vec{v}$ *si* $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
  - ***Condición de paralelismo:*** $\vec{u}\,//\,\vec{v}$ si $\vec{u}, \vec{v}$ **son proporcionales.**
  - ***Vector perpendicular a otro:***
    - *1º) Se cambian de lugar dos coordenadas y una de signo*
    - *2º) La otra coordenada se hace cero*
  - ***Vector unitario a uno dado*** $\vec{v}$ ***, o de módulo k:***
    - ***Unitario :*** $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
    - ***De módulo k :*** $\vec{w} = \frac{k\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

PRODUCTO VECTORIAL

- *Definición:* Es un vector $\vec{u}\times\vec{v}$ tal que
  - *1º) Módulo :* $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \text{sen}\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
  - *2º) Dirección :* Perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
  - *3º) Sentido :* Avance de un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$



- *Expresión analítica:* $\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$ *o bien* $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$

  Siendo $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ respecto a $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ base ortonormal de V_3

- *Aplicaciones*
  - *Interpretación geométrica:* $A_{paralelogramo} = |\vec{u}\times\vec{v}|$
  - *Área de un triángulo:* $A_{triángulo} = \frac{1}{2}A_{paralelogramo}$
  - *Vector perpendicular* $\vec{w}$ *a dos vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *dados:* $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$

PRODUCTO MIXTO

- *Definición:* $\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}$
- *Expresión analítica:* $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ siendo $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$ respecto a $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ base ortonormal de V_3
- *Aplicaciones*
  - *Interpretación geométrica:* $V_{paralelepípedo} = |[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$
  - *Volumen de un tetraedro:* $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}V_{paralelepípedo}$
  - *Puntos y vectores coplanarios:*
    - *Cuatro puntos A, B, C, D son coplanarios si* $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = 0$
    - *Tres vectores* $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ *son coplanarios o lin. depend. si* $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ *o bien* $det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$

Nota: Recuerda además el concepto de vector libre, operaciones con vectores, combinación lineal de vectores, dependencia e independencia lineal, rango de un conjunto de vectores, bases…

PROPIEDADES

DEL PRODUCTO ESCALAR

$$\begin{cases} 1^a)\ \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\ \text{(Conmutativa)} \\ 2^a)\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\ \text{(Distributiva)} \\ 3^a)\ \vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0 \\ 4^a)\ k(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\vec{u})\vec{v}=\vec{u}(k\vec{v}) \end{cases}$$

No asociativa: $\underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{n^o}\cdot\underbrace{\vec{w}}_{vector}\neq\underbrace{\vec{u}}_{vector}\cdot\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{w})}_{n^o}$

En general, es un vector distinto en cada caso

DEL PRODUCTO VECTORIAL

$$\begin{cases} 1^a)\ \vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})\ \text{(Anticonnmutativa)} \\ 2^a)\ \vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}\ \text{(Linealmente dependientes)} \\ 3^a)\ \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})\ \text{(Distributiva)} \\ 4^a)\ k(\vec{u}\times\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(k\vec{v}),\quad con\ \ k\in\Re \end{cases}$$

No cumple, en general, la asociativa

DEL PRODUCTO MIXTO

$$\begin{cases} 1^a)\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}] \\ 2^a)\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] \\ 3^a)\ [\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}] \\ 4^a)\ k[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[k\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},k\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v},k\vec{w}],\quad \text{con } k\in\Re \end{cases}$$