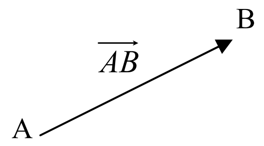
UNIDAD 8 VECTORES EN EL ESPACIO

1. VECTORES FIJOS EN EL ESPACIO

Sea E_3 el conjunto de puntos del espacio que notaremos por $A, B, C, \ldots$

Dados dos puntos A, B de E_3, se llama **vector fijo de origen *A* y extremo *B*** al par ordenado (A, B). Se representa por $\overrightarrow{AB}$.

Un vector fijo queda determinado por su módulo, dirección y sentido, junto con su origen o punto de aplicación.



Recuerda que:

Módulo de $\overrightarrow{AB}$ *:* longitud del segmento $\overline{AB}$.

Dirección de $\overrightarrow{AB}$ *:* la de la recta que pasa por *A* y *B*.

Sentido de $\overrightarrow{AB}$ *:* sentido del recorrido que se define cuando nos trasladamos de *A* a *B*.

Vector fijo nulo $\vec{0}$: Si $A = B$ y, por tanto, su módulo es cero y carece de dirección y sentido.
Vector unitario: todo vector que tenga módulo 1.

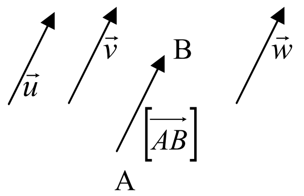
2. VECTORES LIBRES EN EL ESPACIO

Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ ***son equipolentes*** si tienen la misma dirección, mismo módulo y mismo sentido. Se representa por $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

La relación de equipolencia permite clasificar el conjunto de vectores fijos del espacio en "colecciones" de vectores. Cada colección va a ser denominada "vector libre".

Vector libre: Conjunto de vectores fijos equipolentes a uno dado.

Se llama "vector libre" porque se puede representar en cualquier punto del espacio, con la única condición de no alterar su módulo, su dirección y su sentido.

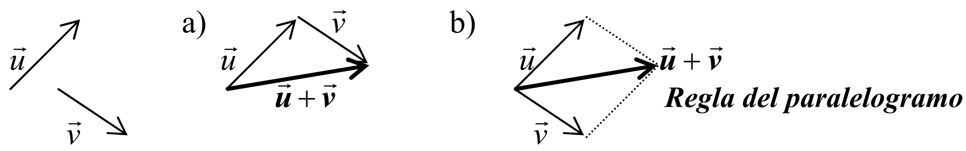


Un vector libre se representa por letras minúsculas $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$, o bien, escribiendo el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ entre corchetes $\left[\overrightarrow{AB}\right]$.

Dado un vector libre del espacio y un punto *O,* existe un único representante de este vector que tiene su origen en el punto *O.*

Representamos por $\boldsymbol{V_3}$ al conjunto de los vectores libres del espacio.

- ***OPERACIONES CON VECTORES LIBRES:***
  - ***a) Suma de vectores libres:*** Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ (vectores libres) se define $\vec{u} + \vec{v}$ como el vector libre que se obtiene del siguiente modo:



Propiedades:

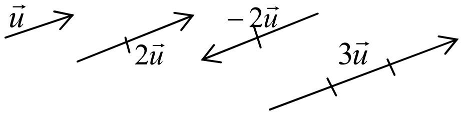
- Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Elemento neutro: $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- Vector opuesto: $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$

b) Producto de un vector por un número real: Dado $k \in \Re$ y $\vec{u} \in V_3$, se define $k\vec{u}$ como el vector libre que tiene:

Dirección: misma que $\vec{u}$.

Módulo: el módulo de $\vec{u}$ multiplicado por k: $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$

Sentido: $\begin{cases} Si \ \ k > 0 \ \ el\ mismo\ de\ \vec{u} \\ Si \ \ k < 0 \ \ opuesto\ al\ de\ \vec{u} \end{cases}$

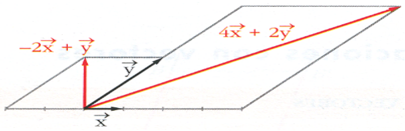


Propiedades:
- Asociativa: $(k_1 k_2)\vec{u} = k_1(k_2\vec{u})$
- Distributiva I: $(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$
- Distributiva II: $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- Neutro: $1\vec{u} = \vec{u}$

A $(V_3, +, \cdot_{\Re})$ se le llama ***espacio vectorial de los vectores libres del espacio.***

- ***COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES***

Dados $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in V_3$, decimos que el vector $\vec{u}$ es una combinación lineal de ellos si existen $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \Re$ tales que $\vec{u} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \ldots + k_n\vec{u}_n$



Ejemplo: Los vectores $\vec{u} = 4\vec{x} + 2\vec{y}$ y $\vec{v} = -2\vec{x} + \vec{y}$ son combinaciones lineales de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

- ***DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES***

Un conjunto de vectores de V_3, son ***linealmente independientes*** si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás. En caso contrario, diremos que son ***linealmente dependientes***.

Observaciones:

1. En V_3 tendremos a lo sumo tres vectores linealmente independientes.
2. Dos vectores alineados o paralelos (igual dirección) son linealmente dependientes. Dos vectores NO alineados son linealmente independientes.
3. Tres vectores coplanarios (están en el mismo plano), son linealmente dependientes. Tres vectores NO coplanarios son linealmente independientes.

Dado un conjunto de vectores, podemos determinar el máximo número de vectores linealmente independientes que contiene. Este número se denomina ***rango*** y se denota por ***rang***.

- ***BASES DE V_3***

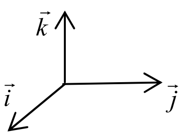
Decimos que tres vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in V_3$ forman una ***base*** de V_3 si:

a) *Forman un sistema de generadores de V_3:* Cualquier vector de V_3 se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

b) $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ son linealmente independientes.

Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in V_3$ forman una base escribiremos $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Propiedad: Tres vectores de V_3 linealmente independientes forman una base



Base ortogonal: Base en la que los tres vectores son perpendiculares (ortogonales) entre sí.

Base ortonormal: Base ortogonal en la que los tres vectores tienen el mismo módulo que tomamos como unidad. Se representa por $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ o bien por $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Toda base de V_3 vendrá dada siempre por <u>tres</u> vectores.

Decimos que V_3 ***es un espacio vectorial de dimensión*** 3.

- ***COORDENADAS (COMPONENTES) DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE***

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de V_3 y $\vec{v} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3$, siendo $v_1, v_2, v_3 \in \Re$.

A v_1, v_2, v_3 se les llama ***coordenadas o componentes*** del vector $\vec{v}$ respecto de la base $\mathcal{B}$, y se expresa $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

Las coordenadas de los vectores que forman la base son $\vec{u}_1(1,0,0)$, $\vec{u}_2(0,1,0)$, $\vec{u}_3(0,0,1)$.

Operaciones con coordenadas

Si $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, y $k \in \Re \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}+\vec{v}(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) \\ k\vec{u}(ku_1, ku_2, ku_3) \end{cases}$

Ejemplo: Si $\vec{u}(2,-3,5)$, $\vec{v}(4,6,-2) \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}+\vec{v}(6,3,3) \\ 2\vec{u}(4,-6,10) \end{cases}$

Propiedad:

Tres vectores de V_3 $\begin{cases} \vec{u}(u_1,u_2,u_3) \\ \vec{v}(v_1,v_2,v_3) \\ \vec{w}(w_1,w_2,w_3) \end{cases}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$

Es decir, $rang(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 3$

Observación: En el determinante anterior los vectores también se pueden poner como filas.

Ejemplo 1: *Calcula los valores del parámetro k para que los vectores* $\vec{u}(1,1,k)$, $\vec{v}(k,3,1)$ *y* $\vec{w}(1,1,1)$, *expresados en una cierta base, sean linealmente dependientes.*

$$rang(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) < 3 \Rightarrow \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$$

Ejemplo 2: *Las coordenadas de los vectores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{x}$ *en una cierta base son* $\vec{u}(1,2,1)$, $\vec{v}(2,1,0)$, $\vec{w}(0,1,3)$ *y* $\vec{x}(-3,3,10)$.

a) Comprueba que $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ *forman una base.*

b) Expresa el vector $\vec{x}$ *como combinación lineal de* $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Solución:

a) $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow rang(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 3 \Rightarrow \vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores linealmente independientes $\Rightarrow$ Forman una base.

b) $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \Rightarrow (-3,3,10) = a(1,2,1) + b(2,1,0) + c(0,1,3) \Rightarrow$

Operando e igualando coordenada a coordenada, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b = -3 \\ 2a + b + c = 3 \\ a + 3c = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1,\ b = -2,\ c = 3$$

Por tanto: $\vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$. Es decir, en esta nueva base $\vec{x}(1,-2,3)$

En coordenadas: $(-3,3,10) = (1,2,1) - 2(2,1,0) + 3(0,1,3)$

3. SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL ESPACIO

3.1. SISTEMA DE REFERENCIA EN EL ESPACIO

Los vectores nos van a permitir asignar coordenadas a los puntos del espacio.

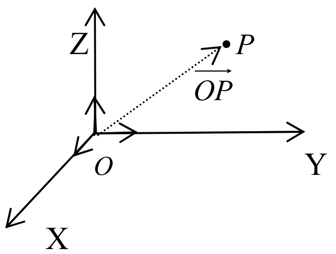
Un ***sistema de referencia en el espacio*** está formado por un punto ***O*** $\in E_3$ llamado ***origen*** y una base $\mathcal{B}=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ de V_3. Lo representamos por $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$.

Nos va a permitir determinar la posición de cualquier punto del espacio asignándole unas coordenadas.

Vamos a considerar en lo que sigue un ***sistema de referencia ortonormal*** $R=\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, es decir, los vectores que forman la base $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ son unitarios y ortogonales (perpendiculares) dos a dos.

3.2. VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO P. COORDENADAS DE UN PUNTO P RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA

Un punto ***P*** del espacio $(P\in E_3)$ determina un vector $\overrightarrow{OP}$ llamado ***vector de posición del punto P***.



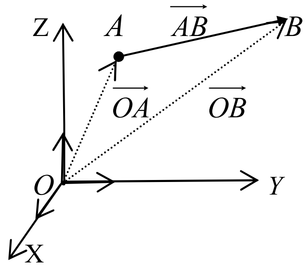
Como $\overrightarrow{OP}=p_1\vec{i}+p_2\vec{j}+p_3\vec{k}$, las coordenadas de $\overrightarrow{OP}$ en la base $\mathcal{B}$ son $\overrightarrow{OP}(p_1,p_2,p_3)$.

Por tanto:
Se definen las ***coordenadas de un punto P*** respecto al sistema de referencia $R=\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ como las coordenadas de su vector de posición $\overrightarrow{OP}$. Se escribe $\boldsymbol{P(p_1,p_2,p_3)}$.

Fíjate: Hemos hecho corresponder a cada punto del espacio ***P*** un vector de posición $\overrightarrow{OP}$ y una terna de números (p_1,p_2,p_3) de $\Re^3$ que nos permite situarlo en el espacio. Es decir:

$$E_3 \longrightarrow V_3 \longrightarrow \Re^3$$
$$P \longrightarrow \overrightarrow{OP} \longrightarrow (p_1,p_2,p_3)$$

3.3. COORDENADAS (COMPONENTES) DE UN VECTOR DETERMINADO POR DOS PUNTOS



Si $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ son las coordenadas de dos puntos *A* y *B entonces:*

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

Por tanto las coordenadas (componentes) de $\overrightarrow{AB}$ son:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)}$$

Ejemplo: Si $A(1,-1,4)$, $B(0,2,3)$ entonces $\overrightarrow{AB}(-1,3,-1)$ y $\overrightarrow{BA}(1,-3,1)$.

3.4. PUNTOS ALINEADOS

Sean $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$.

A,B y C están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales (linealmente dependientes), es decir, $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$.

Ejemplo: *Averigua los valores de m y n para que* $A(4,-1,3)$, $B(3,5,1)$ *y* $C(0,m,n)$ *estén alineados.*

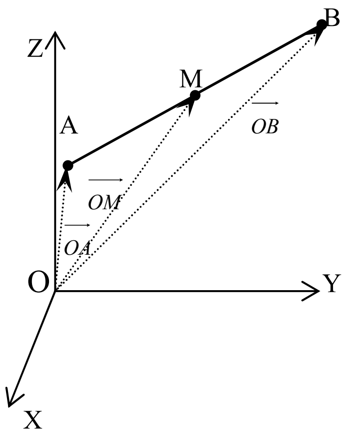
Solución: $\overrightarrow{AB}(-1,6,-2)$, $\overrightarrow{BC}(-3,m-5,n-1)$

$$A, B, C \text{ están alineados } \Rightarrow \frac{-3}{-1} = \frac{m-5}{6} = \frac{n-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-5}{6} = 3 \Rightarrow m-5 = 18 \Rightarrow m = 23 \\ \frac{n-1}{-2} = 3 \Rightarrow n-1 = -6 \Rightarrow n = -5 \end{cases}$$

3.5. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Sean $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $M(x, y, z)$ el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Queremos obtener las coordenadas del punto medio M de $\overline{AB}$.



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) =$$

$$= \left(a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2}, a_2 + \frac{b_2 - a_2}{2}, a_3 + \frac{b_3 - a_3}{2} \right) =$$

$$= \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)}}$$

Coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$

Ejemplo: *Halla las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(1,5,-3)$ y $B(1,3,-1)$.*

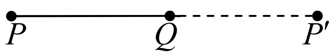
Solución:

$$M\left(\frac{1+1}{2}, \frac{5+3}{2}, \frac{-3+(-1)}{2} \right) \Rightarrow M(1,4,-2)$$

3.6. SIMÉTRICO DE UN PUNTO P RESPECTO DE OTRO Q

El simétrico de un punto P respecto de otro Q es un punto P' de modo que Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Si $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$, $P'(x, y, z)$ las coordenadas de $P'(x, y, z)$ se obtienen fácilmente teniendo en cuenta la fórmula del punto medio:



$$\boxed{\frac{p_1 + x}{2} = q_1, \quad \frac{p_2 + y}{2} = q_2, \quad \frac{p_3 + z}{2} = q_3} \leftarrow \begin{cases} \text{Despejando } x, y, z, \\ \text{se obtienen las} \\ \text{coordenadas de } P' \end{cases}$$

Ejemplo: *Halla el simétrico, P', del punto $P(7,4,-2)$ respecto de $Q(3,-11,7)$.*

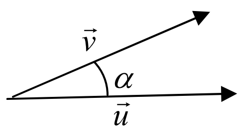
Solución:

$$\frac{7+x}{2} = 3; \quad \frac{4+y}{2} = -11; \quad \frac{-2+z}{2} = 7 \Rightarrow x = -1; \ y = -26; \ z = 16 \Rightarrow P'(-1,-26,16)$$

4. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Se define el ***producto escalar*** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V_3$, y se expresa $\vec{u} \cdot \vec{v}$ como:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)}$$

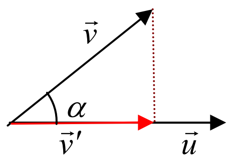


$\alpha = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

Observa que el producto escalar de dos vectores es ***un número real***.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$. Sea $\vec{v}'$ la proyección del vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}'|}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\frac{|\vec{v}'|}{|\vec{v}|} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}'|$$

Por tanto: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}'|}$

"El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por el módulo de la proyección del segundo sobre el primero"

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

1ª) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (Conmutativa)

2ª) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ (Distributiva)

3ª) $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$

4ª) $k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(k\vec{v})$

No cumple la propiedad asociativa $\underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{n^o}\cdot \underbrace{\vec{w}}_{vector} \neq \underbrace{\vec{u}}_{vector}\cdot\underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{w})}_{n^o}$. Fíjate: el resultado es un vector.

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR

Dada una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de V_3 y los vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ entonces

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})\cdot(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) = u_1v_1\vec{i}\cdot\vec{i} + u_1v_2\vec{i}\cdot\vec{j} + u_1v_3\vec{i}\cdot\vec{k} +$$
$$+ u_2v_1\vec{j}\cdot\vec{i} + u_2v_2\vec{j}\cdot\vec{j} + u_2v_3\vec{j}\cdot\vec{k} + u_3v_1\vec{k}\cdot\vec{i} + u_3v_2\vec{k}\cdot\vec{j} + u_3v_3\vec{k}\cdot\vec{k}$$

Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal, los vectores $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ son ortogonales dos a dos y de módulo 1:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0,\ \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0,\ \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$$
$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

Por tanto:

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$ ← ***Expresión analítica del producto escalar respecto a una base ortonormal.***

Ejemplo: *Dados los vectores $\vec{u}(3,-2,0)$ y $\vec{v}(2,1,-4)$ en una base ortonormal. Calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$.*

Solución: Aplicamos la expresión analítica del producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (3,-2,0)\cdot(2,1,-4) = 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 0\cdot(-4) = 6 - 2 - 0 = 4$$

APLICACIONES

a) Módulo de un vector $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$ ya que $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 \cos\underbrace{(\widehat{\vec{u},\vec{u}})}_{0^o} = |\vec{u}|^2$

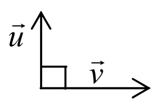
b) Ángulo formado por dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \quad \text{si } \vec{u}\neq\vec{0}, \vec{v}\neq\vec{0}}$ ← ***Permite obtener el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$***

c) Condición de perpendicularidad y paralelismo

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$, $\vec{u}\neq\vec{0}, \vec{v}\neq\vec{0}$. Entonces $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0}$



Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ (son ***perpendiculares*** u ***ortogonales***) $\Rightarrow \alpha = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 90^o \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 90^o = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^o \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$.

Forma rápida de obtener un vector $\vec{v}$ perpendicular a otro $\vec{u}$:
Se cambian de lugar dos coordenadas y una de ellas, además, de signo. La otra coordenada se hace cero.

Ejemplos: $a)\ \vec{u}(2,3,6) \Rightarrow \vec{v}(-3,2,0) \quad b)\ \vec{u}(5,-8,4) \Rightarrow \vec{v}(8,5,0)$

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ***paralelos*** $\vec{u}\,//\,\vec{v}$ si sus coordenadas son proporcionales

Ejemplo: *Las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $\vec{u}(1,2,-2)$ y $\vec{v}(2,3,1)$. Calcula:*
a) Su producto escalar, el módulo de cada vector y el ángulo que forman.
b) El valor de a para que el vector $\vec{w}(2,3,a)$ sea ortogonal al vector $\vec{u}$.
c) Un vector unitario en la dirección de $\vec{u}$.
Solución:
a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,2,-2)\cdot(2,3,1) = 2+6-2 = 6$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14} \approx 3.74$

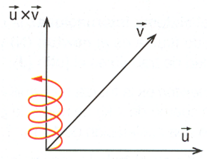
$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7} \Rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 57^{\circ}\, 41'\, 18''$$

b) $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow (1,2,-2)\cdot(2,3,a) = 0 \Rightarrow 2+6-2a = 0 \Rightarrow 8 = 2a \Rightarrow a = 4$

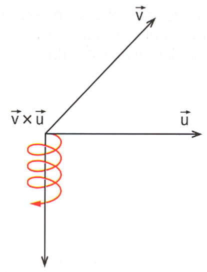
c) Vector pedido: $\vec{u}' = \frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u} = \frac{1}{3}\cdot(1,2,-2) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$. Comprueba que $|\vec{u}'| = 1$.

5. *PRODUCTO VECTORIAL*

Se define el ***producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$*** como un nuevo vector $\vec{u}\times\vec{v}$ que verifica:



- *Módulo:* $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- *Dirección:* perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
- *Sentido:* el de avance de un "sacacorchos" que gira de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$.



Fíjate: Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, entonces $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$.

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

Dada una base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ de V_3 y los vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ entonces su producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ viene dado por:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Para recordarlo mejor podemos escribir simbólicamente:

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}}$$

aunque no tenga sentido hablar de un determinante formado por vectores y números.

Ejemplo: *Hallar el producto vectorial de los vectores de coordenadas $\vec{u}(1,-2,5)$ y $\vec{v}(2,-1,3)$ respecto a una base ortonormal.*

Solución:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}(-1,7,3)$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

1ª) $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$ (Anticonmutativa)

2ª) $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$ (Son linealmente dependientes)

3ª) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$ (Distributiva)

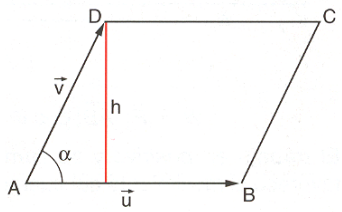
4ª) $k(\vec{u}\times\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(k\vec{v}),\quad con\ \ k\in\Re$

No cumple, en general, la propiedad asociativa.

APLICACIONES

a) Interpretación geométrica: Área de un paralelogramo

Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, construimos el paralelogramo $ABCD$.



$A_{paralelogramo}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$

$Área=|\vec{u}|\cdot h$ (base$\times$altura)

Pero $sen\ \alpha=\dfrac{h}{|\vec{v}|}\Rightarrow h=|\vec{v}|sen\ \alpha$

Con lo cual: $Área=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\ \alpha=|\vec{u}\times\vec{v}|$

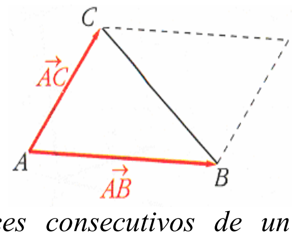
Es decir:

$$\boxed{\boldsymbol{A_{paralelogramo}=|\vec{u}\times\vec{v}|}}$$

"El módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el área del paralelogramo construido sobre ellos"

b) Área de un triángulo

Sean A,B,C los vértices de un triángulo.



$$\boxed{A_{triángulo}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.\quad \text{Es decir: } A_{triángulo}=\frac{1}{2}A_{paralelogramo}}$$

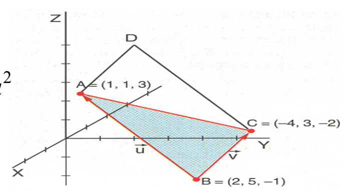
Ejemplo: *Sean $A(1,1,3)$, $B(2,5,-1)$ y $C(-4,3,-2)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo.*

a)Halla el área del paralelogramo ABCD y la del triángulo ABC.

b)Obtén las coordenadas del vértice D.

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BA}=(-1,-4,4)\\ \overrightarrow{BC}=(-6,-2,-1)\end{array}\right\}\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 4\\ -6 & -2 & -1\end{vmatrix}=12\vec{i}-25\vec{j}-22\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(12,-25,-22)$



$A_p=|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{12^2+(-25)^2+(-22)^2}=\sqrt{1253}\approx 35.4\,u^2$

$A_t=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1253}\approx 17.7\,u^2$

b) $\overrightarrow{AD}\sim\overrightarrow{BC}\Rightarrow(x-1,y-1,z-3)=(-6,-2,-1)\Rightarrow x=-5;\ y=-1;\ z=2\Rightarrow D(-5,-1,2)$.

c) Obtención de un vector perpendicular a dos vectores dados

Ejemplo: *Las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormal son $\vec{u}(0,3,4)$ y $\vec{v}(1,3,8)$. Halla un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Halla otro vector perpendicular de módulo 5.*

Solución:

Por definición de producto vectorial, $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ es un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 8\end{vmatrix}=12\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow \vec{w}(12,4,-3) \text{ es perpendicular a } \vec{u} \text{ y } \vec{v}.$$

Calculemos ahora un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de módulo 5.

$$|\vec{w}|=\sqrt{12^2+4^2+(-3)^2}=13;\quad \vec{w}'=\frac{5}{|\vec{w}|}\cdot\vec{w}=\frac{5}{13}\cdot(12,4,-3)=\left(\frac{60}{13},\frac{20}{13},-\frac{15}{13}\right)$$

6. PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

Se define el ***producto mixto de tres vectores*** $\vec{u},\vec{v}$ ***y*** $\vec{w}$, y se expresa $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, como el número real:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}$$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO MIXTO

Si $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$ son tres vectores dados por sus coordenadas respecto a una base ortonormal $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ de V_3 entonces:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$

Ejemplo: *Las coordenadas de* $\vec{u},\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *en una base ortonormal son* $\vec{u}(3,-1,2)$, $\vec{v}(-2,5,1)$ *y* $\vec{w}(1,1,2)$. *Calcula* $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

a) Utilizando la definición de producto mixto.

b) Usando la expresión analítica del producto mixto.

Solución:

a) $\underbrace{\vec{v}\times\vec{w}(9,5,-7)}_{Hacerlo}\Rightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(3,-1,2)\cdot(9,5,-7)=27-5-14=8$

b) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ -2 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=8$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO MIXTO

1ª) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]$

2ª) $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$

3ª) $[\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}]+[\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]$

4ª) $k[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[k\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},k\vec{v},\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v},k\vec{w}]$, con $k\in\Re$

APLICACIONES

a) Interpretación geométrica: Volumen de un paralelepípedo

$$\boxed{V_{paralelepípedo}=|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}$$

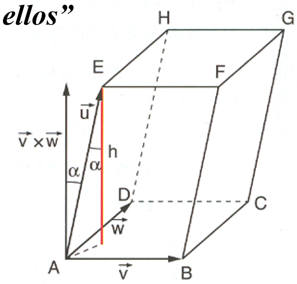
"El valor absoluto del producto mixto de $\vec{u},\vec{v}$ ***y*** $\vec{w}$ ***coincide con el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos"***

Demostración: $V_p=A_{base}\cdot h=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot h=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cos\alpha$

$$\cos\alpha=\frac{h}{|\vec{u}|}\Rightarrow h=|\vec{u}|\cos\alpha$$

Pero $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}\times\vec{w}|\cos\alpha$

$\Rightarrow V_{paralelepípedo}=|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$



Ejemplo 1: *Halla el volumen del paralelepípedo definido por los vectores* $\vec{u}(-5,1,7)$, $\vec{v}(4,7,3)$ *y* $\vec{w}(1,0,4)$.

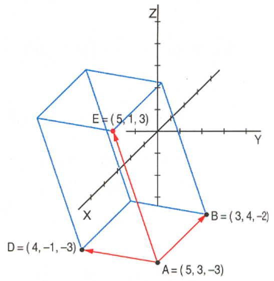
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-5 & 1 & 7\\ 4 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}=-202\Rightarrow V_p=202\,u^3$$

Ejemplo 2: *Halla el volumen del paralelepípedo ABCDEFGH sabiendo que las coordenadas de los vértices A, B, D y E son* $A(5,3,-3)$, $B(3,4,-2)$, $D(4,-1,-3)$ *y* $E(5,1,3)$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}(-2,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AD}(-1,-4,0)\\ \vec{w}=\overrightarrow{AE}(0,-2,6)\end{array}\right\}\quad [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & -4 & 0\\ 0 & -2 & 6\end{vmatrix}=56$$

$$\Rightarrow V_p=56\,u^3$$



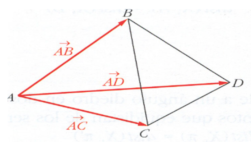
b) ***Volumen de un tetraedro***

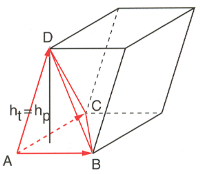
Si A,B,C,D son los vértices de un tetraedro, entonces:

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}V_{paralelepípedo}$$

Es decir:

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$





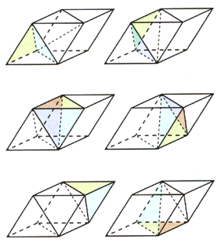
$V_t=\frac{1}{3}A_{bt}\cdot h_t$

$\left.\begin{array}{l}A_{bt}=\frac{1}{2}A_{bp}\\ h_t=h_p\end{array}\right\}$

$V_t=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_{bp}\cdot h_p$

$\boldsymbol{V_t=\frac{1}{6}V_p}$

Un paralelepípedo se descompone en 6 tetraedros con idéntico volumen.

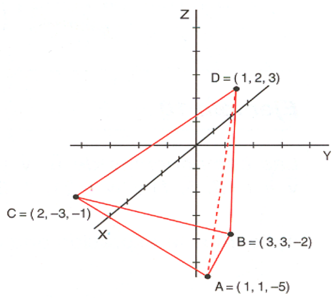


Ejemplo: *Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son* $A(1,1,-5)$, $B(3,3,-2)$, $C(2,-3,-1)$ *y* $D(1,2,3)$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}(2,2,3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}(1,-4,4)\\ \vec{w}=\overrightarrow{AD}(0,1,8)\end{array}\right\}\quad [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 8\end{vmatrix}=-85$$

$$\Rightarrow V_t=\frac{1}{6}V_p=\frac{1}{6}|-85|=\frac{85}{6}\,u^3$$



c) ***Cuatro puntos*** $\boldsymbol{A,B,C,D}$ ***son coplanarios si*** $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=0$ ***("No hay volumen")***

Tres vectores son coplanarios si su producto mixto es nulo.

Ejemplo: *Halla el valor de x para que los vectores* $\vec{u}(3,-5,1)$, $\vec{v}(7,4,2)$ *y* $\vec{w}(1,3,x)$ *sean coplanarios.*

Solución:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}3 & -5 & 1\\ 7 & 4 & 2\\ 1 & 3 & x\end{vmatrix}=12x-10+21-4-18+35x=47x-11=0\Rightarrow x=\frac{11}{47}$$

7. ANEXOS

7.1. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

Dada una base ortonormal $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ de V_3 y los vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ entonces su producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ viene dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\times\vec{v} &= \left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)\times\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}\right)=u_1v_1\vec{i}\times\vec{i}+u_1v_2\vec{i}\times\vec{j}+u_1v_3\vec{i}\times\vec{k}\\
&\quad +u_2v_1\vec{j}\times\vec{i}+u_2v_2\vec{j}\times\vec{j}+u_2v_3\vec{j}\times\vec{k}+u_3v_1\vec{k}\times\vec{i}+u_3v_2\vec{k}\times\vec{j}+u_3v_3\vec{k}\times\vec{k}\\
&=u_1v_2\vec{k}+u_1v_3\left(-\vec{j}\right)+u_2v_1\left(-\vec{k}\right)+u_2v_3\vec{i}+u_3v_1\vec{j}+u_3v_2\left(-\vec{i}\right)\\
&=\left(u_2v_3-u_3v_2\right)\vec{i}+\left(u_3v_1-u_1v_3\right)\vec{j}+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)\vec{k}\\
&=\left(u_2v_3-u_3v_2\right)\vec{i}-\left(u_1v_3-u_3v_1\right)\vec{j}+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)\vec{k}\\
&=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\vec{k}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Se ha tenido en cuenta que:

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$

7.2. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO MIXTO

Si $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$ son tres vectores dados por sus coordenadas respecto a una base ortonormal $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ de V_3 entonces:

$$\begin{aligned}
[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]&=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix}v_2&v_3\\w_2&w_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}v_1&v_3\\w_1&w_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}v_1&v_2\\w_1&w_2\end{vmatrix}\vec{k}\right)\\
&=u_1\begin{vmatrix}v_2&v_3\\w_2&w_3\end{vmatrix}-u_2\begin{vmatrix}v_1&v_3\\w_1&w_3\end{vmatrix}+u_3\begin{vmatrix}v_1&v_2\\w_1&w_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En la última igualdad se ha tenido en cuenta el desarrollo del determinante por los elementos de la primera fila.

También se ha usado que:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$