UNIDAD 7 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. DEFINICIONES

Un ***sistema de*** m ***ecuaciones lineales con*** n ***incógnitas*** es una expresión de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \text{ siendo } \begin{cases} a_{ij} \to Coeficientes & i \in \{1,2,\ldots,m\} \\ b_i \to Términos\ independientes & j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ x_j \to Incógnitas\ (por\ determinar) & \end{cases}$$

Asociadas a este sistema hay dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Matriz asociada al sistema (o matriz de coeficientes) ***Matriz ampliada asociada al sistema (o matriz ampliada con los términos independientes)***

Por tanto, un SEL se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Más abreviadamente como $A \cdot X = b$, siendo:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{Matriz\ de\ coeficientes} \qquad X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{Matriz\ de \\ incógnitas}} \qquad b = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\textbf{Matriz de} \\ \textbf{términos} \\ \textbf{independientes}}}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_3 + 5x_4 = -2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -1 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} m = 3 \to 3\ ecuaciones \\ n = 4 \to 4\ incógnitas \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 4 & -5 & 6 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Forma matricial: $A \cdot X = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución de un sistema: Conjunto de valores $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ de las incógnitas, que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Resolver un sistema: Encontrar sus soluciones (si las hay).

Sistema homogéneo: Es un SEL en el que todos los términos independientes $b_i = 0$.

Todo sistema homogéneo admite, al menos, la solución trivial $(0, 0, \ldots, 0)$.

2. CLASIFICACIÓN DE UN SISTEMA POR EL NÚMERO DE SOLUCIONES

$$SEL\begin{cases} \underset{(\text{Algún } b_i\neq 0)}{\text{NO HOMOGÉNEO}}\begin{cases} \underset{(\text{Tiene solución})}{\text{COMPATIBLE}}\begin{cases} \underset{(\text{Solución única})}{\text{DETERMINADO}} \\ \underset{(\text{Infinitas soluciones})}{\text{INDETERMINADO}} \end{cases} \\ \underset{(\text{No tiene solución})}{\text{INCOMPATIBLE}} \end{cases} \\ \underset{(\text{Todos } b_i=0)}{\text{HOMOGÉNEO}} \rightarrow \text{COMPATIBLE}\begin{cases} \underset{(\text{Solo tiene la solución trivial } (0,0,\ldots 0))}{\text{DETERMINADO}} \\ \underset{(\text{Infinitas soluciones})}{\text{INDETERMINADO}} \end{cases} \end{cases}$$

3. EQUIVALENCIA DE SISTEMAS

Dos SEL son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Para ***resolver un sistema*** es útil convertirlo en otro equivalente de más fácil solución.

Se obtienen sistemas equivalentes:

a) Si cambiamos de orden las ecuaciones (las intercambiamos).
b) Si multiplicamos los dos miembros de una ecuación por un número real distinto de cero.
c) Si sumamos a una ecuación otra multiplicada por un número real (o una combinación lineal de las demás).
d) Si suprimimos una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

4. RESOLUCIÓN DE S.E.L.: MÉTODO DE REDUCCIÓN DE GAUSS

Un SEL es escalonado si cada ecuación contiene una incógnita menos que la anterior.

Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-z &= 3 \\ y-2z &= -1 \\ 3z &= 6 \end{aligned}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{La matriz de coeficientes es escalonada.}$$

Método de reducción de Gauss: Consiste en aplicar las propiedades de los sistemas equivalentes para ir obteniendo, de modo progresivo, sistemas equivalentes hasta que quede reducido a un sistema escalonado. Para ello:

a) Se elegirá el elemento ***pivote***, esto es, un coeficiente no nulo que, en general, será a_{11} (en caso contrario cambiamos el orden de las ecuaciones) y que procuraremos que sea 1.
b) Simplificaremos la escritura utilizando la matriz ampliada del sistema.

Ejemplo 1: *Resolver el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{aligned} x+3y+2z &= 1 \\ 2x-y-2z &= -2 \\ -x+2y+z &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{e_2-2e_1 \\ e_3+e_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{7e_3+5e_2}{\rightarrow} \underset{\text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+2z = 1 \\ -7y-6z = -4 \\ -9z=-27 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} -9z=-27 \Rightarrow z=\frac{-27}{-9}=3 \\ -7y-6\cdot 3=-4 \Rightarrow -7y=14 \Rightarrow y=-2 \\ x+3\cdot(-2)+2\cdot 3=1 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

Por tanto, tiene solución única (SCD): $\boxed{x=1;\ y=-2;\ z=3}$

Ejemplo 2: *Resolver el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y=-3 \\ x+2y-5z=4 \\ 3x-2y+z=4 \end{array}\right\}.$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[e_1\leftrightarrow e_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e_2+2e_1 \\ e_3-3e_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e_2\div 5 \\ e_3\div 8}]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[e_3+e_2]{} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\substack{\text{SISTEMA COMPATIBLE} \\ \text{INDETERMINADO}}} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-5z=4 \\ y-2z=1 \end{array}\right\}$$

Llamamos $z=\lambda$

$$y-2\lambda=1 \Rightarrow y=1+2\lambda$$

$$x+2\cdot(1+2\lambda)-5\lambda=4 \Rightarrow x+2-\lambda=4 \Rightarrow x=\lambda+2$$

Luego es un SCI dependiente de un parámetro: $\boxed{x=\lambda+2;\ y=1+2\lambda;\ z=\lambda}$ $\lambda\in\Re$

Ejemplo 3: *Resolver el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x+5y-z=5 \\ 2x+3y-4z=1 \\ x-2y-3z=2 \end{array}\right\}.$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\substack{e_2-2e_1 \\ e_3-e_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & -2 & -9 \\ 0 & -7 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[e_3-e_2]{} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)}_{\text{SISTEMA INCOMPATIBLE}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+5y-z=5 \\ -7y-2z=-9 \\ 0z=6 \end{array}\right\} \rightarrow 0=6 \ \textit{Contradicción} \Rightarrow \text{Por tanto es un SI}$$

5. *RESOLUCIÓN DE S.E.L.: MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA*

Dado un SEL $A\cdot X=b$, con A una matriz cuadrada y $\det(A)\neq 0$, entonces su solución viene dada por: $\boxed{X=A^{-1}\cdot b}$

Los sistemas que se resuelven por este método siempre son SCD

Ejemplo: *Resuelve el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} 2y=6 \\ -x+y-z=3 \\ 2x+2y+z=7 \end{array}\right\}$ *con el método de la matriz inversa.*

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&1&-1\\2&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A)=-2\Rightarrow A\ \ tiene\ \ inversa.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-1&0&0\\-4&4&2\end{pmatrix};\quad X=A^{-1}b\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-1&0&0\\-4&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{matrix}x=1\\y=3\\z=-1\end{matrix}}$$

Ejercicio: *Resuelve el siguiente sistema* $\left.\begin{matrix}3x+5y+2z=1\\x-y-z=0\\2x+3y+4z=2\end{matrix}\right\}$. *Solución:* $\boxed{\begin{matrix}x=\frac{7}{23}\\y=\frac{-4}{23}\\z=\frac{11}{23}\end{matrix}}$

6. RESOLUCIÓN DE S.E.L.: REGLA DE CRAMER

Dado un SEL $A\cdot X=b$, con A una matriz cuadrada y $\det(A)\neq 0$, entonces su solución viene dada por:

$$x_1=\frac{|A_{x_1}|}{|A|};\quad x_2=\frac{|A_{x_2}|}{|A|};\quad \ldots\quad ;x_n=\frac{|A_{x_n}|}{|A|}$$

Siendo A_{x_i} $\rightarrow$Matriz obtenida a partir de la matriz de coeficientes A, en la cual se sustituye la columna i por la columna formada por los términos independientes.

Ejemplo: *Resuelve el siguiente sistema* $\left.\begin{matrix}3x+5y+2z=1\\x-y-z=0\\2x+3y+4z=2\end{matrix}\right\}$ *usando la regla de Cramer.*

$$A=\begin{pmatrix}3&5&2\\1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\quad \det(A)=-23\neq 0\Rightarrow A\ \ tiene\ \ inversa.$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1&5&2\\0&-1&-1\\2&3&4\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-7}{-23}=\frac{7}{23};\qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3&1&2\\1&0&-1\\2&2&4\end{vmatrix}}{-23}=\frac{4}{-23}=-\frac{4}{23};$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3&5&1\\1&-1&0\\2&3&2\end{vmatrix}}{-23}=\frac{-11}{-23}=\frac{11}{23}\qquad \text{Por tanto: }\boxed{\begin{matrix}x=\frac{7}{23}\\y=\frac{-4}{23}\\z=\frac{11}{23}\end{matrix}}$$

Ejercicio: *Resuelve el siguiente sistema* $\left.\begin{matrix}2x+3y-4z=2\\x-y-z=1\\x+2y+z=0\end{matrix}\right\}$ *usando la regla de Cramer.*

Solución: $\boxed{x=\frac{9}{16};\ y=\frac{-1}{8};\ z=\frac{-5}{16}}$

Observación: También se puede usar la *Regla de Cramer* en el cálculo de la solución de un sistema con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas (A no necesariamente cuadrada), que sea compatible indeterminado.

7. DISCUSIÓN DE UN S.E.L. POR DETERMINANTES: TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Dado un SEL $A\cdot X=b$, con $\dim(A)=m\times n$ $\begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \textit{ecuaciones} \\ \boldsymbol{n} & \textit{incógnitas}\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} Si\ \ rang(A)=rang(A|b)\Rightarrow \underset{\text{Tiene solución}}{\textit{SISTEMA COMPATIBLE}} \begin{cases} Si\ \ rang(A)=rang(A|b)=n\Rightarrow \underset{\text{Solución única}}{\textit{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD)}} \\ Si\ \ rang(A)=rang(A|b)=k<n\Rightarrow \underset{\text{Infinitas soluciones. Depende de } n-k \text{ parámetros}}{\textit{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI)}} \end{cases} \\ Si\ \ rang(A)\neq rang(A|b)\Rightarrow \underset{\text{No tiene solución}}{\textit{SISTEMA INCOMPATIBLE (SI)}} \end{cases}$$

Este método permite conocer de antemano, **sin tener que resolverlo**, el tipo de sistema.

Ejemplo 1: *Clasifica el siguiente sistema* $\left.\begin{aligned} 2x-5y+3z&=1 \\ x+3y-z&=0 \\ 3x-2y+2z&=1 \end{aligned}\right\}$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \left.\begin{aligned} rang(A)&=2 \\ rang(A|b)&=2 \end{aligned}\right\} \underset{\text{Rouché-Fr.}}{\overset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow}} SCI$$

Infinitas soluciones dependientes de 3-2=1 parámetro.

Ejemplo 2: *Clasifica el siguiente sistema* $\left.\begin{aligned} 3x+5y-8z&=2 \\ 5x+3y-8z&=2 \\ -8x+5y+3z&=2 \end{aligned}\right\}$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -8 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -8 & 2 \\ 5 & 3 & -8 & 2 \\ -8 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \left.\begin{aligned} rang(A)&=2 \\ rang(A|b)&=3 \end{aligned}\right\} \underset{\text{Rouché-Fr.}}{\overset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow}} SI$$

No tiene solución.

Ejemplo 3: *Clasifica el siguiente sistema* $\left.\begin{aligned} x+3y+2z&=1 \\ 2x-y-2z&=-2 \\ -x+2y+z&=-2 \end{aligned}\right\}$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \det(A)=9\neq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} rang(A)&=3 \\ rang(A|b)&=3 \end{aligned}\right\} \underset{\text{Rouché-Fr.}}{\overset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow}} SCD \text{ Solución única.}$$

8. DISCUSIÓN DE SISTEMAS DEPENDIENTES DE UN PARÁMETRO

Ejemplo 1: *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro* m.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ x-2y+3z=1 \\ 3x-y+mz=3 \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & m \end{pmatrix} \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & m & 3 \end{array}\right) \quad \det(A)=20-5m.$$

$$\det(A)=0 \Rightarrow 20-5m=0 \Rightarrow m=4$$

- Si $m \neq 4 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=rang(A|b) \underset{Rouché-Fr.}{\overset{Teorema}{\Rightarrow}} SCD$
- Si $m=4 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rang(A)<3$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5 \neq 0 \Rightarrow rang(A)=2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rang(A|b)=2 \end{array}\right\} \underset{Rouché-Fr.}{\overset{Teorema}{\Rightarrow}} SCI \text{ Infinitas soluciones.}$$

Depende de $3-2=1$ parámetro.

Ejemplo 2: *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro* λ.

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x-y-z=2 \\ x+y+\lambda z=0 \\ x-y-z=\lambda \end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{array}\right) \quad \det(A)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$$

$$\det(A)=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$$

- Si $\lambda \neq 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=rang(A|b) \underset{Rouché-Fr.}{\overset{Teorema}{\Rightarrow}} SCD$
- Si $\lambda=1 \Rightarrow \det(A)=0 \Rightarrow rang(A)<3$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2 \neq 0 \Rightarrow rang(A)=2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2 \neq 0 \Rightarrow rang(A|b)=3 \end{array}\right\} \underset{Rouché-Fr.}{\overset{Teorema}{\Rightarrow}} SI \text{ No tiene solución.}$$