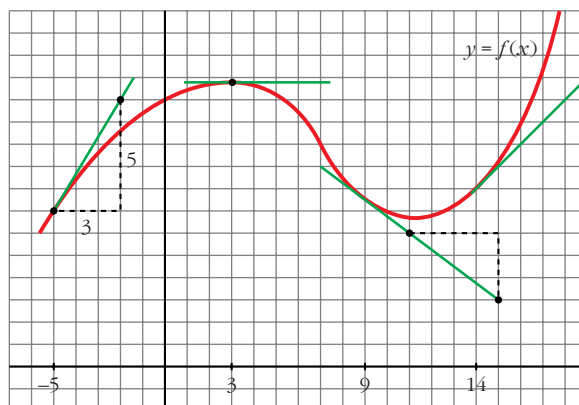


## 9

# DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Página 250

*Tangentes a una curva*



- Halla, mirando la gráfica y las rectas trazadas,  $f'(3)$ ,  $f'(9)$  y  $f'(14)$ .

$$f'(3) = 0; f'(9) = \frac{-3}{4}; f'(14) = 1$$

- Di otros tres puntos en los que la derivada sea positiva.

La derivada también es positiva en  $x = -4$ ,  $x = -2$ ,  $x = 0 \dots$

- Di otro punto en el que la derivada sea cero.

La derivada también es cero en  $x = 11$ .

- Di otros dos puntos en los que la derivada sea negativa.

La derivada también es negativa en  $x = 4$ ,  $x = 5 \dots$

- Di un intervalo  $[a, b]$  en el que se cumpla que “si  $x \in [a, b]$ , entonces  $f'(x) > 0$ ”.

Por ejemplo, en el intervalo  $[-5, 2]$  se cumple que, si  $x \in [-5, 2]$ , entonces  $f'(x) > 0$ .

**Función derivada**

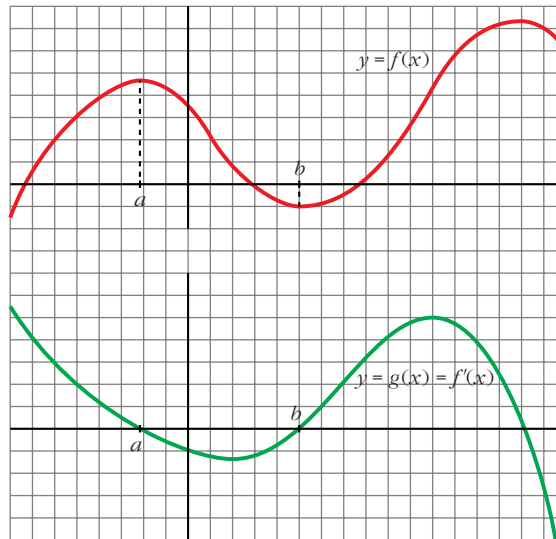
■ Continúa escribiendo las razones por las cuales  $g(x)$  es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de  $f(x)$ .

- En el intervalo  $(a, b)$ ,  $f(x)$  es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a  $g(x)$  en  $(a, b)$ .
- La derivada de  $f$  en  $b$  es 0:  $f'(b) = 0$ . Y también es  $g(b) = 0$ .
- En general:

$g(x) = f'(x) = 0$  donde  $f(x)$  tiene tangente horizontal.

$g(x) = f'(x) > 0$  donde  $f(x)$  es creciente.

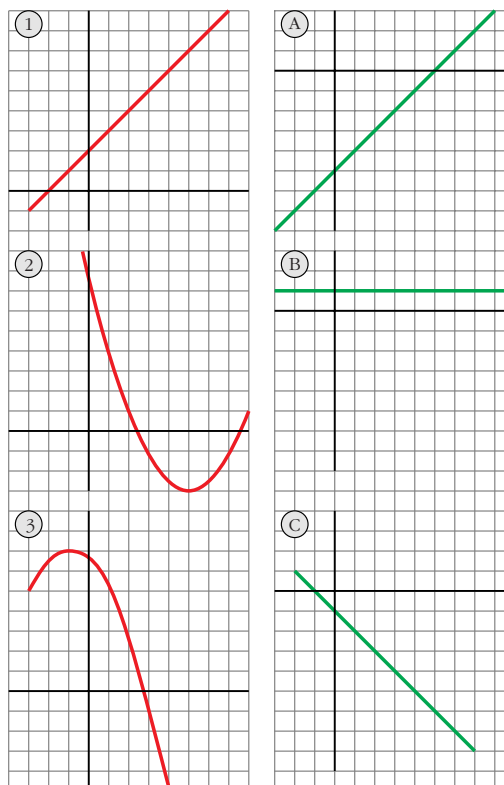
$g(x) = f'(x) < 0$  donde  $f(x)$  es decreciente.



■ Las tres gráficas de abajo, A, B, y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2, y 3, pero en otro orden. Responde razonadamente cuál es la de cada cual.

- 1) B
- 2) A
- 3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.



## Página 257

1. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\text{c) } f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$$

$$\text{e) } f(x) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}}$$

$$\text{f) } f(x) = \ln \sqrt{e^{\operatorname{tg} x}}$$

$$\text{g) } f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$$

$$\text{h) } f(x) = \log(\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2$$

$$\text{i) } f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + x$$

$$\text{j) } f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x+1} \cdot \cos \sqrt{x-1}$$

$$\text{k) } f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x}$$

$$\text{l) } f(x) = \operatorname{sen}(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$$

$$\text{m) } f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + x^2 + 1}$$

$$\text{n) } f(x) = \cos^2 \sqrt[3]{x + (3-x)^2}$$

$$\text{a) } f'(x) = \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

**De otra forma:** Si tomamos logaritmos previamente:

$$f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x). \text{ Derivamos:}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{-(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg} x) - (1-\operatorname{tg} x) \cdot (1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1+\operatorname{tg} x)^2} =$$

$$= \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)[-1-\operatorname{tg} x-1+\operatorname{tg} x]}{(1+\operatorname{tg} x)^2} = \frac{-2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$$

**De otra forma:** Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+\operatorname{tg} x)^2} \cdot D[\operatorname{tg} x] = \frac{-2}{(1+\operatorname{tg} x)^2} \cdot (1+\operatorname{tg}^2 x) = \frac{-2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta lo obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-tg\ x}{1+tg\ x}}} \cdot \frac{-2(1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2} = \frac{-(1+tg^2\ x)}{\sqrt{(1-tg\ x)(1+tg\ x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando lo obtenido en b).

f)  $f(x) = \ln \sqrt{e^{tg\ x}} = \ln e^{(tg\ x)/2} = \frac{tg\ x}{2}$

$$f'(x) = \frac{1+tg^2\ x}{2}$$

g)  $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 3 = \frac{\ln 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$$

h)  $f(x) = \log(\sen\ x \cdot \cos\ x)^2 = 2[\log(\sen\ x) + \log(\cos\ x)]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \left[ \frac{\cos\ x}{\sen\ x} \cdot \frac{1}{\ln 10} + \frac{-\sen\ x}{\cos\ x} \cdot \frac{1}{\ln 10} \right] = \frac{2}{\ln 10} \cdot \frac{\cos^2\ x - \sen^2\ x}{\sen\ x \cdot \cos\ x} = \\ &= \frac{4}{\ln 10} \cdot \frac{\cos^2\ x - \sen^2\ x}{2\sen\ x \cdot \cos\ x} = \frac{4}{\ln 10} \cdot \frac{\cos 2x}{\sen 2x} = \frac{4}{\ln 10 \cdot \tg 2x} \end{aligned}$$

**De otra forma:**

$$f(x) = \log(\sen\ x \cdot \cos\ x)^2 = 2 \log\left(\frac{\sen 2x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{\cos 2x}{\frac{\sen 2x}{2}} = \frac{4}{\ln 10 \cdot \tg 2x}$$

i)  $f(x) = \sen^2\ x + \cos^2\ x + x = 1 + x$

$$f'(x) = 1$$

j)  $f'(x) = \frac{\cos\sqrt{x+1} \cdot \cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sen\sqrt{x+1} \cdot (-\sen\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$

$$= \frac{\cos\sqrt{x+1} \cdot \cos\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \frac{\sen\sqrt{x+1} \cdot \sen\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$$

k)  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

$$l) f'(x) = \cos(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}) \cdot \left(15x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$m) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x + x^2 + 1}} \cdot (\cos x + 2x) = \frac{\cos x + 2x}{2\sqrt{\sin x + x^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} n) f'(x) &= 2\cos \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-\sin \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \frac{1 + 2(3-x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} = \\ &= \frac{-2 \cos \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \sin \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} = \\ &= \frac{(5 - 2x) \cdot \sin(2\sqrt[3]{x + (3-x)^2})}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}} \end{aligned}$$

**2. Halla las derivadas 1ª, 2ª y 3ª de las siguientes funciones:**

a)  $y = x^5$

b)  $y = x \cos x$

c)  $y = \sin^2 x + \cos^2 x + x$

a)  $y = x^5$

$$y' = 5x^4; \quad y'' = 20x^3; \quad y''' = 60x^2$$

b)  $y = x \cos x$

$$y' = \cos x - x \sin x$$

$$y'' = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2\sin x - x \cos x$$

$$y''' = -2\cos x - \cos x + x \sin x = -3\cos x + x \sin x$$

c)  $y = \sin^2 x + \cos^2 x + x = 1 + x$

$$y' = 1; \quad y'' = 0; \quad y''' = 0$$

**3. Calcula  $f'(1)$  siendo:  $f(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30} x^{-17/30} = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60} \sqrt[30]{x^{17}}$$

$$\text{Por tanto: } f'(1) = \frac{13\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$$

**4. Calcula  $f'(\pi/6)$  siendo:  $f(x) = (\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x) \cdot \operatorname{sen} 6x$**

$$f(x) = (\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x) \cdot \operatorname{sen} 6x = \cos 6x \cdot \operatorname{sen} 6x = \frac{\operatorname{sen} 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12 \cos 12x}{2} = 6 \cos 12x$$

$$\text{Por tanto: } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot \cos \frac{12\pi}{6} = 6 \cdot \cos(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$$

**5. Calcula  $f'(0)$  siendo:  $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$**

$$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\ &= \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2 + 4x + 1}{3}} = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3 + 4x^2 + 4x + 1} = \\ &= \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{2}{4x^2 + 4x + 4} = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2x^2 + 2x + 2} = \\ &= \frac{2x}{2x^2 + 2x + 2} = \frac{x}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } f'(0) = 0$$

## Página 258

**1. Estudia la derivabilidad en  $x_0 = 3$  de la función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \leq 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$**

- Continuidad en  $x_0 = 3$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 9) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= f(3) = 0 \\ \text{Por tanto, } f(x) &\text{ es continua en } x_0 = 3. \end{aligned}$$

- Derivabilidad en  $x_0 = 3$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3) = 3 = f'(3^+) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Las derivadas laterales existen} \\ \text{y coinciden.} \end{aligned}$$

Por tanto,  $f(x)$  es derivable en  $x_0 = 3$ . Además,  $f'(3) = 3$ .

2. Calcula  $m$  y  $n$  para que  $f(x)$  sea derivable en  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \leq 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$

- Si  $x \neq 0$ , la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.
- Continuidad en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array} \right\} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 0, \text{ ha de ser: } n = 5$$

- Derivabilidad en  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x) = 0 = f'(0^+) \end{array} \right\} \text{Para que sea derivable en } x = 0, \text{ ha de ser: } -m = 0 \rightarrow m = 0$$

Por tanto,  $f(x)$  es derivable en  $\mathbb{R}$  para  $m = 0$  y  $n = 5$ .

## Página 259

1. Sabemos que la derivada de la función  $f(x) = x^3$  es  $f'(x) = 3x^2$ .

Teniendo en cuenta este resultado, halla la derivada de su función inversa:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

## Página 260

1. Comprueba que  $\operatorname{sen}(x^2 y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16}$  pasa por el punto  $(2, \frac{\pi}{4})$  y halla la ecuación de la recta tangente en ese punto.

Sustituimos  $x = 2$ ,  $y = \frac{\pi}{4}$  en la expresión:

$$\operatorname{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} + 2 = 0 + 2 - \frac{\pi^2}{16} = 2 - \frac{\pi^2}{16}$$

Se cumple la igualdad. Luego la curva dada pasa por el punto  $(2, \frac{\pi}{4})$ .

Necesitamos obtener el valor de  $y'(2, \frac{\pi}{4})$ . Hallamos previamente  $y'(x, y)$ :

Derivamos  $\operatorname{sen}(x^2y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16}$ :

$$\cos(x^2y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') - 2y \cdot y' + 1 = 0$$

$$2xy \cos(x^2y) + y' \cdot x^2 \cdot \cos(x^2y) - 2yy' + 1 = 0$$

$$y'(x^2 \cdot \cos(x^2y) - 2y) = -1 - 2xy \cos(x^2y)$$

$$y' = \frac{-1 - 2xy \cos(x^2y)}{x^2 \cdot \cos(x^2y) - 2y}$$

Por tanto:

$$y' \left( 2, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 - \pi \cdot \cos \pi}{4 \cos \pi - \pi/2} = \frac{-1 + \pi}{-4 - \pi/2} = \frac{-2 + 2\pi}{-8 - \pi} = \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi}$$

La ecuación de la recta tangente es:  $y = \frac{\pi}{4} + \frac{2 - 2\pi}{8 + \pi} (x - 2)$

## 2. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$$

$$g(x) = x^{\operatorname{sen} x}$$

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^x \rightarrow \ln f(x) = x \ln (\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (\operatorname{sen} x) + x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \rightarrow f'(x) = (\operatorname{sen} x)^x \left[ \ln (\operatorname{sen} x) + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} \right]$$

$$g(x) = x^{\operatorname{sen} x} \rightarrow \ln g(x) = \operatorname{sen} x \cdot \ln x$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \cos x \cdot \ln x + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^{\operatorname{sen} x} \cdot \left[ \cos x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right]$$

## Página 269

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PARA PRACTICAR

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1 a)  $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

b)  $y = \sqrt[3]{3x^2}$

$$a) y' = \frac{2x(x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$b) y' = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}}$$

$$2 \quad \text{a) } y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2/3} \qquad \text{b) } y = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{2}{3} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1/3} \cdot \frac{-1 \cdot (1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/3} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{-2}{(1-x)^{1/3} \cdot (1+x)^{5/3}} = \frac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^5}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } y' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2x = -\frac{2}{x^2} + x$$

$$3 \quad \text{a) } y = \frac{\ln x}{x} \qquad \text{b) } y = 7e^{-x}$$

$$\text{a) } y' = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \qquad \text{b) } y' = -7e^{-x}$$

$$4 \quad \text{a) } y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{b) } y = \text{sen } x \cos x$$

$$\text{a) } y' = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\text{b) } y' = \cos x \cdot \cos x + (-\text{sen } x) \cdot \text{sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x$$

$$5 \quad \text{a) } y = \frac{1}{\text{sen } x} \qquad \text{b) } y = \ln(x^2 + 1)$$

$$\text{a) } y' = \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x} \qquad \text{b) } y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$6 \quad \text{a) } y = \text{arc tg } \frac{x}{3} \qquad \text{b) } y = \cos^2(2x - \pi)$$

$$\text{a) } y' = \frac{1}{1 + (x/3)^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1/3}{1 + x^2/9} = \frac{3}{9 + x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= 2\cos(2x - \pi) \cdot (-\text{sen}(2x - \pi)) \cdot 2 = -4\cos(2x - \pi) \cdot \text{sen}(2x - \pi) = \\ &= -2\cos(4x - 4\pi) \end{aligned}$$

$$7 \quad \text{a) } y = \text{sen}^2 x \qquad \text{b) } y = \sqrt{\text{tg } x}$$

$$\text{a) } y' = 2\text{sen } x \cdot \cos x = \text{sen } 2x \qquad \text{b) } y' = \frac{1}{2\sqrt{\text{tg } x}} \cdot (1 + \text{tg}^2 x) = \frac{1 + \text{tg}^2 x}{2\sqrt{\text{tg } x}}$$

**8 a)  $y = \text{sen } x^2$**

**b)  $y = \text{arc tg } (x^2 + 1)$**

a)  $y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

b)  $y' = \frac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

**9 a)  $y = (2\sqrt{x} - 3)^7$**

**b)  $y = \log_2 \sqrt{x}$**

a)  $y' = 7(2\sqrt{x} - 3)^6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{\sqrt{x}} (2\sqrt{x} - 3)^6$

b)  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x \ln 2}$

**10 a)  $y = \text{sen}^2 x^2$**

**b)  $y = \text{arc tg } \frac{1}{x}$**

a)  $y' = 2\text{sen } x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 4x \text{sen } x^2 \cos x^2 = 2x \text{sen } (2x^2)$

b)  $y' = \frac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = -\frac{1}{x^2 + 1}$

**11 a)  $y = \cos^5 (7x^2)$**

**b)  $y = 3^x + 1$**

a)  $y' = 5\cos^4 (7x^2) \cdot (-\text{sen } (7x^2)) \cdot 14x = -70x \cos^4 (7x^2) \text{sen } (7x^2)$

b)  $y' = 3^x \ln 3$

**12 a)  $y = \sqrt[3]{(5x - 3)^2}$**

**b)  $y = \text{arc sen } \frac{x^2}{3}$**

a)  $y' = \frac{2}{3}(5x - 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x - 3}}$

b)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{3}\right)^2}} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2x/3}{\frac{\sqrt{9 - x^4}}{3}} = \frac{2x}{\sqrt{9 - x^4}}$

**13 a)  $y = \ln(2x - 1)$**

**b)  $y = \text{tg } \frac{x^2}{2}$**

a)  $y' = \frac{2}{2x - 1}$

b)  $y' = \left(1 + \text{tg}^2 \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{2x}{2} = x + x \text{tg}^2 \frac{x^2}{2}$

**14 a)  $y = \ln(x^2 - 1)$                       b)  $y = \arccos \sqrt{2x}$**

a)  $y' = \frac{2x}{x^2 - 1}$

b)  $y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{2x})^2}} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{-1}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 - 2x}} = -\frac{1}{\sqrt{2x - 4x^2}}$

**15 a)  $y = \ln \sqrt{1-x}$                       b)  $y = (\arctg x)^2$**

a)  $y = \ln \sqrt{1-x} = \ln (1-x)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln (1-x)$

$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(1-x)} = \frac{-1}{2-2x}$

b)  $y' = 2(\arctg x) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2 \arctg x}{1+x^2}$

**16 a)  $y = \log_3(7x+2)$                       b)  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{3}{x}$**

a)  $y' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{7}{(7x+2)} = \frac{7}{(7x+2) \ln 3}$

b)  $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} 3/x} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{3}{x}\right) \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right) = -\frac{3(1 + \operatorname{tg}^2 3/x)}{x^2 \operatorname{tg} 3/x}$

**17 a)  $y = e^{4x}$                       b)  $y = \ln \left(\ln \frac{1}{x}\right)$**

a)  $y' = 4e^{4x}$

b)  $y' = \frac{1}{\ln 1/x} \cdot \frac{1}{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x \ln 1/x}$

**18 a)  $y = 2^x$                       b)  $y = \arcsen \frac{x+1}{x-1}$**

a)  $y' = 2^x \cdot \ln 2$

b)  $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{(x-1)^2 - (x+1)^2}}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} =$   
 $= -\frac{2/(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 - (x+1)^2}} = \frac{2}{(x-1)\sqrt{x^2 + 1 - 2x - x^2 - 1 - 2x}} = -\frac{2}{(x-1)\sqrt{-4x}}$

19 a)  $y = 5 \operatorname{tg}^3(3x^2 + 1)$       b)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a)  $y' = 15 \operatorname{tg}^2(3x^2 + 1) \cdot [1 + \operatorname{tg}^2(3x^2 + 1)] \cdot 6x = 90x [\operatorname{tg}^2(3x^2 + 1) + \operatorname{tg}^4(3x^2 + 1)]$

b)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

20 a)  $y = \sqrt{\operatorname{tg} x^2}$       b)  $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}$

a)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^2}} (1 + \operatorname{tg}^2 x^2) \cdot 2x = \frac{x(1 + \operatorname{tg}^2 x^2)}{\sqrt{\operatorname{tg} x^2}}$

b)  $y' = \frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-2/3} \cdot \frac{x+2 - (x-2)}{(x+2)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2}} \cdot \frac{4}{(x+2)^2} =$   
 $= \frac{4}{3 \cdot (x+2)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{(x+2)^{2/3}}} = \frac{4}{3(x+2)^{4/3} \cdot \sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{(x+2)^4(x-2)^2}} =$   
 $= \frac{4}{3(x+2)\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}$

21 a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla  $f'(0)$ ,  $f'(3)$  y  $f'(1)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple  $f'(x) = 5$ ?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Si  $x \neq 1$ , la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

**Continuidad en  $x = 1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

**Derivabilidad en  $x = 1$ :**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Las derivadas laterales existen} \\ \text{y coinciden.} \end{array}$$

Luego,  $f(x)$  es derivable en  $x = 1$ . Además,  $f'(1) = 3$ .

Así  $f(x)$  es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

$$f'(0) = 3$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

c) Si  $f'(x) = 5$ , entonces  $x \geq 1$ . Es decir:

$$f'(x) = 2x + 1 = 5 \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2 > 1$$

$$f'(2) = 5$$

**22 Comprueba que  $f(x)$  es continua pero no derivable en  $x = 2$ :**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si  $x \neq 2$ , la función es continua y derivable.
- Continuidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x-6) = 0 \\ f(2) &= 0 \end{aligned} \right\} f \text{ es continua en } x = 2.$$

- Derivabilidad en  $x = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 = 3 = f'(2^+) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Las derivadas laterales existen pero no} \\ \text{coinciden.} \end{array}$$

$f(x)$  no es derivable en  $x = 2$ .

**23** Estudia la continuidad y derivabilidad de estas funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 3$ , la función es continua y derivable.

**Continuidad en  $x = 0$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

**Continuidad en  $x = 3$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array} \right\} \text{ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en } x = 3.$$

**Derivabilidad en  $x = 0$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array} \right\} \text{ Las derivadas laterales existen, pero no coinciden.}$$

$f(x)$  no es derivable en  $x = 0$ .

**Derivabilidad en  $x = 3$ :**

Como  $f(x)$  no es continua en  $x = 3$ ,  $f(x)$  no es derivable en  $x = 3$ .

b) Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 2$ ,  $f(x)$  es continua y derivable.

**Continuidad en  $x = -1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1.$$

**Continuidad en  $x = 2$ :**

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 8x) = 12$$

$$f(2) = 12$$

Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden.

$f(x)$  no es continua en  $x = 2$ .

**Derivabilidad en  $x = -1$ :**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 2 = 2 = f'(2^+)$$

Las derivadas laterales existen pero no coinciden.

$f(x)$  no es derivable en  $x = -1$ .

**Derivabilidad en  $x = 2$ :**

$f(x)$  no es continua en  $x = 2 \rightarrow f(x)$  no es derivable en  $x = 2$ .

**24** **Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:**

**a)**  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

**b)**  $y = \ln(x \operatorname{tg} x)^2$

**c)**  $y = \ln\left(\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2-1}\right)$

**d)**  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^2}}$

a)  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} \right] = \frac{-1}{1-x^2} = \frac{1}{x^2-1}$$

b)  $y = \ln(x \operatorname{tg} x)^2 = 2[\ln x + \ln(\operatorname{tg} x)]$

$$y' = 2 \left[ \frac{1}{x} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \right] = 2 \left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x \right] = \frac{2}{x} + 2 \operatorname{cotg} x + 2 \operatorname{tg} x$$

c)  $y = \ln\left(\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2-1}\right) = -2 \ln x + \frac{1}{3} \ln(x^2-1)$

$$y' = \frac{-2}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{3x^2-3} = \frac{-6x^2+6+2x^2}{3x^3-3x} = \frac{-4x^2+6}{3x^3-3x}$$

$$d) y = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{1}{3} [\ln 1 - \ln (1+x)^2] = \frac{-2}{3} \ln (1+x)$$

$$y' = \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)} = \frac{-2}{3+3x}$$

**25** Calcula la derivada de estas funciones implícitas:

a)  $x^2 + y^2 = 9$

b)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

c)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

d)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

e)  $x^3 + y^3 + 2xy = 0$

f)  $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{14} = 1$

a)  $2x + 2y \cdot y' = 0$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

b)  $2x + 2yy' - 4 - 6y' = 0$

$$y'(2y - 6) = 4 - 2x$$

$$y' = \frac{4-2x}{2y-6} = \frac{2-x}{y-3}$$

c)  $\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0$

$$\frac{x}{8} + \frac{2yy'}{9} = 0$$

$$\frac{2yy'}{9} = -\frac{x}{8} \rightarrow 2yy' = \frac{-9x}{8} \rightarrow y' = \frac{-9x}{16y}$$

d)  $\frac{2x}{9} - \frac{2yy'}{25} = 0 \rightarrow \frac{2yy'}{25} = \frac{2x}{9}$

$$y' = \frac{25x}{9y}$$

e)  $3x^2 + 3y^2y' + 2y + 2xy' = 0$

$$y'(3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$$

$$f) \frac{2(x-1)}{8} + \frac{2(y+3)y'}{14} = 0$$

$$\frac{(x-1)}{4} + \frac{(y+3)y'}{7} = 0$$

$$\frac{(y+3)y'}{7} = -\frac{(x-1)}{4} \rightarrow (y+3)y' = \frac{7(1-x)}{4}$$

$$y' = \frac{7-7x}{4y+12}$$

## Página 270

**26** Aplica la derivación logarítmica para derivar:

a)  $y = x^{3x}$

b)  $y = x^{x+1}$

c)  $y = x^{e^x}$

d)  $y = (\ln x)^{x+1}$

e)  $y = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^x$

f)  $y = x^{tg x}$

a)  $y = x^{3x} \rightarrow \ln y = 3x \ln x$

$$\frac{y'}{y} = 3 \ln x + 3x \cdot \frac{1}{x} = 3 \ln x + 3$$

$$y' = x^{3x} (3 \ln x + 3)$$

b)  $y = x^{x+1} \rightarrow \ln y = (x+1) \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{x+1} \left( \ln x + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

c)  $y = x^{e^x} \rightarrow \ln y = e^x \cdot \ln x$

$$\frac{y'}{y} = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = x^{e^x} \cdot e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

d)  $y = (\ln x)^{x+1} \rightarrow \ln y = (x+1) \cdot \ln (\ln x)$

$$\frac{y'}{y} = \ln (\ln x) + (x+1) \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \ln (\ln x) + \frac{x+1}{x \ln x}$$

$$y' = (\ln x)^{x+1} \cdot \left[ \ln (\ln x) + \frac{x+1}{x \ln x} \right]$$

$$e) y = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^x \rightarrow \ln y = x \ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = x (\ln (\operatorname{sen} x) - \ln x)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln (\operatorname{sen} x) - \ln x + x \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} - 1$$

$$y' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^x \cdot \left[\ln \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} - 1\right]$$

$$f) y = x^{\operatorname{tg} x} \rightarrow \ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{\operatorname{tg} x} \cdot \left[(1 + \operatorname{tg}^2 x) \ln x + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right]$$

**27** Obtén la derivada de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado:

**I) Utilizando las reglas de derivación que conoces.**

**II) Aplicando la derivación logarítmica.**

a)  $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3$

b)  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

c)  $y = \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x$

d)  $y = \sqrt{x^2 + 1} \sqrt[3]{x^2}$

a) I)  $y' = 3 \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{3 \cdot (x^2 + 1)^2 (x^2 - 1)}{x^4}$

II)  $\ln y = 3(\ln(x^2 + 1) - \ln x)$

$$\frac{y'}{y} = 3 \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}\right) = 3 \left(\frac{2x^2 - x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}\right) = \frac{3(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)}$$

$$y' = \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{3 \cdot (x^2 + 1)^2 (x^2 - 1)}{x^4}$$

b) I)  $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$

II)  $\ln y = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right] = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) I) } y' &= 3\text{sen}^2 x \cos x \cdot \cos^2 x + \text{sen}^3 x \cdot 2\cos x (-\text{sen} x) = \\ &= 3\text{sen}^2 x \cos^3 x - 2\cos x \text{sen}^4 x \end{aligned}$$

$$\text{II) } \ln y = 3\ln(\text{sen} x) + 2\ln(\cos x)$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \frac{\cos x}{\text{sen} x} + 2 \cdot \frac{-\text{sen} x}{\cos x} = \frac{3\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x}{\text{sen} x \cos x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \text{sen}^3 x \cos^2 x \cdot \frac{3\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x}{\text{sen} x \cos x} = \text{sen}^2 x \cos x (3\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x) = \\ &= 3\text{sen}^2 x \cos^3 x - 2\cos x \text{sen}^4 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) I) } y' &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{x}} = \\ &= \frac{3x^2 + 2(x^2+1)}{3\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x}} = \frac{5x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

$$\text{II) } \ln y = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{2}{3} \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{3x} = \frac{3x^2 + 2x^2 + 2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2 + 2}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{5x^2 + 2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2 + 2}{3\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x}}$$

**28** Utilizando la definición de derivada, calcula:  $f'(-2)$ , siendo  $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(-2+b) - f(-2)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-2+b} - \frac{1}{-2}}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{2-2+b}{-4+2b}}{b} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{b(-4+2b)} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{-4+2b} = \frac{-1}{4} = f'(-2) \end{aligned}$$

**29** Halla la función derivada de  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  aplicando la definición de derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(x+b) - f(x)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\frac{x+b-1}{x+b+1} - \frac{x-1}{x+1}}{b} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(x+1)(x+b-1) - (x-1)(x+b+1)}{b(x+b+1)(x+1)} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + \cancel{x}b - \cancel{x} - \cancel{x} + b - \cancel{x^2} - \cancel{x}b - \cancel{x} + \cancel{x} + b + \cancel{1}}{b(x+b+1)(x+1)} = \\ &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b}{b(x+b+1)(x+1)} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2}{(x+b+1)(x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

**30** Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{x}{(x+3)^2}$                       b)  $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$

c)  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$                       d)  $y = e^x(x-1)$

e)  $y = x^2 e^x$                       f)  $y = \text{sen } x + \cos x$

a)  $y' = \frac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \frac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \frac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \rightarrow 3-x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \frac{1}{12}$

Se anula en el punto  $\left(3, \frac{1}{12}\right)$ .

b)  $y = \frac{16}{x^3 - 4x^2} \rightarrow y' = \frac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = \frac{8}{3} \rightarrow y = \frac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$  no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto  $\left(\frac{8}{3}, \frac{-27}{16}\right)$ .

c)  $y' = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

$y' = 0 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{3} \\ x = -1 \rightarrow y = 3 \end{cases}$

Se anula en los puntos  $(-1, 3)$  y  $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ .

d)  $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$y' = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1$

Se anula en el punto  $(0, -1)$ .

e)  $y' = 2x e^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$

$y' = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x(2+x) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = -2 \rightarrow y = 4e^{-2} \end{cases}$

Se anula en los puntos  $(0, 0)$  y  $(-2, 4e^{-2})$ .

f)  $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

$$y' = 0 \rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow y = \sqrt{2} \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \rightarrow y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Se anula en los puntos  $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

**31 Comprueba que la función  $y = |x - 2|$  no es derivable en  $x = 2$ .**

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua, pues:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = f(2) = 0$

Las derivadas laterales son:  $f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 1$ . Por tanto, no es derivable en  $x = 2$ .

**32 ¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?**

$$y = |x^2 + 6x + 8|$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \quad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

$$\text{En } x = -4 \rightarrow y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$$

$$\text{En } x = -2 \rightarrow y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$$

La función no es derivable en  $x = -4$  ni en  $x = -2$ ; es decir, en  $(-4, 0)$  y en  $(-2, 0)$ . Son dos puntos "angulosos".

**33 Dada la función  $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ , halla:  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  y  $f'''(x)$ .**

S

$$f'(x) = \cos x e^{\operatorname{sen} x}$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x e^{\operatorname{sen} x} = (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) e^{\operatorname{sen} x}$$

$$f'''(x) = (2\cos x(-\operatorname{sen} x) - \cos x) e^{\operatorname{sen} x} + (\cos^2 x - \operatorname{sen} x) \cos x e^{\operatorname{sen} x} =$$

$$= (-2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \cos^3 x - \operatorname{sen} x \cos x) e^{\operatorname{sen} x} =$$

$$= (\cos^3 x - 3\operatorname{sen} x \cos x - \cos x) e^{\operatorname{sen} x}$$

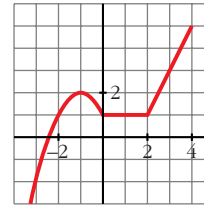
34

Esta es la gráfica de una función  $y = f(x)$ . Calcula, observándola:  $f'(-1)$ ,  $f'(1)$  y  $f'(3)$

¿En qué puntos no es derivable?

$$f'(-1) = 0; f'(1) = 0; f'(3) = 2$$

No es derivable en  $x = 0$  ni en  $x = 2$ .

35  
S

Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Continuidad:**

• Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$   $\rightarrow$  Es continua, pues está formada por funciones continuas.

• En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 0.$$

• En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 1.$$

La función es continua en  $\mathbb{R}$ .

**Derivabilidad:**

• Si  $x \neq 0$  y  $x \neq 1$   $\rightarrow$  La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• En  $x = 0$ :

$$f'(0^-) = 0 = f'(0^+). \text{ Por tanto, } f(x) \text{ es derivable en } x = 0; \text{ y } f'(0) = 0.$$

• En  $x = 1$ :

$$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1. \text{ Por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = 1.$$

La función es derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**36** Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función  $f(x) = 4 \ln x - x^3 + 1$  en el punto  $x = 1$ .

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 3x^2 = \frac{4}{x} - 3x^2 \rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-4}{x^2} - 6x \rightarrow f''(1) = -10$$

$$f'''(x) = \frac{8}{x^3} - 6 \rightarrow f'''(1) = 2$$

### PARA RESOLVER

**37** **S** Considera la función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcula  $m$  y  $n$  para que  $f$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

b) ¿En qué puntos es  $f'(x) = 0$ ?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

- Si  $x \neq 1$ , la función es continua, pues está formada por dos polinomios.

- En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) &= -4 + m \end{aligned} \right\}$$

Para que sea continua en  $x = 1$ , ha de ser:  $-4 + m = -1 + n$ ; es decir:  $m = n + 3$ .

**Derivabilidad:**

- Si  $x \neq 1$ , la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= -3 \\ f'(1^+) &= -2 + n \end{aligned} \right\} \text{ Para que sea derivable en } x = 1, \text{ ha de ser } -3 = -2 + n, \text{ es decir, } n = -1.$$

Por tanto, la función será derivable en todo  $\mathbb{R}$  si  $m = 2$  y  $n = -1$ . En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b)  $f'(x) = 2x - 5$  si  $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ pero } \frac{5}{2} > 1$$

$$f'(x) = -2x - 1 \text{ si } x \geq 1$$

$$-2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}; \text{ pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto,  $f'(x)$  no se anula en ningún punto.

**38 Prueba que la función  $f(x) = x + |x - 3|$  no es derivable en  $x = 3$ .**

$$f(x) = \begin{cases} x - x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x + x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$f'(3^-) = 0 \neq f'(3^+) = 2$ . Por tanto, la función no es derivable en  $x = 3$ .

**39 S** Determina el valor de  $k$  que hace que la función  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$  tenga un único punto de tangente horizontal.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + k) - 2xe^x}{(x^2 + k)^2} = \frac{(x^2 - 2x + k)e^x}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x + k = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Para que haya una sola ecuación, ha de ser  $4 - 4k = 0$ ; es decir,  $k = 1$ .

**40 S** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$  estudia si es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

**Continuidad:**

- En  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

• **En  $x = 0$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ Por tanto, la funci3n es continua en } x = 0.$$

La funci3n es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

**Derivabilidad:**

• **Si  $x \neq 0$**   $\rightarrow$  La funci3n es derivable. Adem3s:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En  $x = 0$ :**

$$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$$

Por tanto,  $f(x)$  es derivable en  $x = 0$  y  $f'(0) = -1$ . La funci3n es derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Su derivada ser3a:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**41** **S** **Calcula  $a$  y  $b$  para que la siguiente funci3n sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ :**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

• **Si  $x \neq 2$**   $\rightarrow$  La funci3n es continua, pues est3 formada por dos polinomios.

• **En  $x = 2$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array} \right\}$$

Para que sea continua, ha de ser  $4a + 6 = -2b$ , es decir,  $2a + 3 = b$ ; o bien  $b = -2a - 3$ .

**Derivabilidad:**

• **Si  $x \neq 2$**   $\rightarrow$  la funci3n es derivable. Adem3s:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

• En  $x = 2$ :

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array} \right\} \text{ Para que sea derivable ha de ser } 4a + 3 = 4 - b, \text{ es decir, } b = -4a + 1.$$

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left. \begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array} \right\} -2a - 3 = -4a + 1 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

Por tanto, para que  $f(x)$  sea derivable en todo  $\mathbb{R}$ , ha de ser  $a = 2$  y  $b = -7$ .

## Página 271

**42** **S** Sea la función:  $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Halla  $f'(x)$ .

b) Halla  $f''(x)$ .

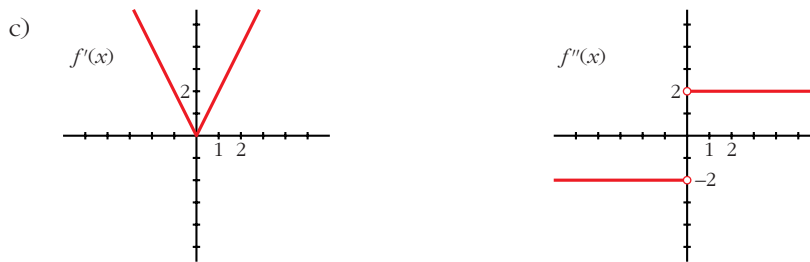
c) Representa  $f'$  y  $f''$ .

$$a) f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En  $x = 0$  existe la derivada, pues  $f(x)$  es continua, y, además,  $f'(0^-) = f'(0^+)$ .

$$b) f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En  $x = 0$  no existe la segunda derivada, pues  $f''(0^-) \neq f''(0^+)$ .



**43** **S** Estudia la derivabilidad de la función:  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$  y calcula  $f'(1)$ .

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ .

$f(x)$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$  (en  $x = 0$  no existe la derivada).

$$f'(1) = \frac{-2}{3}$$

- 44** Halla el valor de la derivada de la función:  $\cos(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 0$  en el punto  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ .

Derivamos:

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen}(x + y) \cdot (1 + y') + \cos(x - y) \cdot (1 - y') &= 0 \\ -\operatorname{sen}(x + y) - y' \operatorname{sen}(x + y) + \cos(x - y) - y' \cos(x - y) &= 0 \\ -\operatorname{sen}(x + y) + \cos(x - y) &= y' (\operatorname{sen}(x + y) + \cos(x - y)) \\ y' &= \frac{-\operatorname{sen}(x + y) + \cos(x - y)}{\operatorname{sen}(x + y) + \cos(x - y)} \end{aligned}$$

Calculamos la derivada en el punto  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ :

$$y' \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

- 45** **S** Calcula la derivada de orden  $n$  de la función  $f(x) = e^{2x}$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} \\ f''(x) &= 4e^{2x} = 2^2 e^{2x} \\ f'''(x) &= 8e^{2x} = 2^3 e^{2x} \\ &\dots \\ f^n(x) &= 2^n e^{2x} \end{aligned}$$

Lo demostramos por inducción:

Para  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$ , vemos que se cumple.

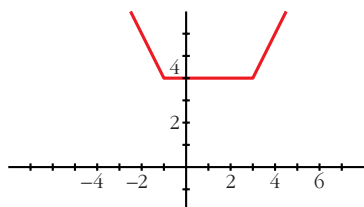
Supongamos que es cierto para  $n - 1$ ; es decir, que  $f^{n-1}(x) = 2^{n-1}e^{2x}$ ; entonces, derivando, tenemos que:  $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} = 2^n e^{2x}$ . Por tanto, la expresión obtenida es cierta para todo  $n$ .

- 46** a) Representa la función siguiente:  $f(x) = |x + 1| + |x - 3|$

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

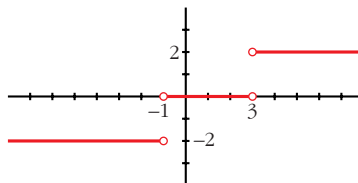
b) Representa  $f'(x)$ .

$$a) f(x) = \begin{cases} -x - 1 - x + 3 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 - x + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x + 1 + x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



No es derivable en  $x = -1$  ni en  $x = 3$ . (Son puntos "angulosos").

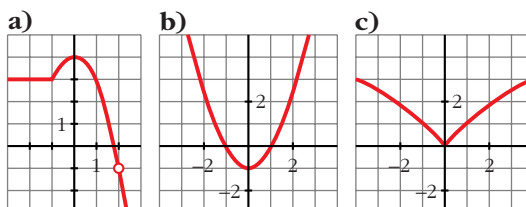
$$b) f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



47  
S

Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.

¿Alguna de ellas es derivable en todo  $\mathbb{R}$ ?



a) No es derivable en  $x = -1$  (tiene un punto “anguloso”) ni en  $x = 2$  (no está definida la función).

b) Es derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

c) No es derivable en  $x = 0$  (tiene un punto “anguloso”).

48  
S

La función  $f(x)$  está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea continua y derivable.

**Continuidad:**

• En  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es continua, pues está formada por dos polinomios.

• En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (ax + b) = b \\ f(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

**Derivabilidad:**

• Si  $x \neq 0 \rightarrow$  La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= -1 \\ f'(0^+) &= a \end{aligned} \right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto,  $f(x)$  será continua y derivable si  $a = -1$  y  $b = 0$ .

**49** Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:

S

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que  $f'(x) = 0$ ?

Representala gráficamente.

**Continuidad:**

- En  $x \neq 1$ : La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En  $x = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 1.$$

La función es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

**Derivabilidad:**

- Si  $x \neq 1$ : La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En  $x = 1$ :

$$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$$

La función no es derivable en  $x = 1$ .

Por tanto, la función es derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

**Puntos en los que  $f'(x) = 0$ :**

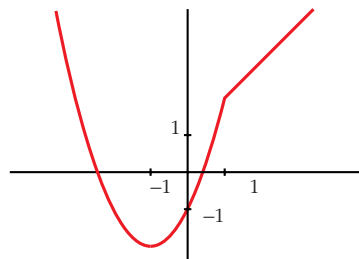
$$f'(x) = 2x + 2 \text{ si } x < 1$$

$$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f'(x) = 1 \text{ si } x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0 \text{ si } x > 1$$

Por tanto, la derivada se anula en  $x = -1$ .

**Gráfica de  $f(x)$ :**



Halla  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x)$  sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Para los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos, estudia la derivabilidad de  $f$ .

• Si  $x \neq -1$  y  $x \neq 0$ : La función es continua, pues está formada por polinomios.

• En  $x = -1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + a) = -2 + a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser} \\ -2 + a = -a + b, \text{ es decir: } b = 2a - 2. \end{array}$$

• En  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser } b = 2. \end{array}$$

Por tanto,  $f(x)$  será continua si  $a = 2$  y  $b = 2$ .

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x < 0; \text{ es decir:} \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Derivabilidad:**

• Si  $x \neq 0$ : Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

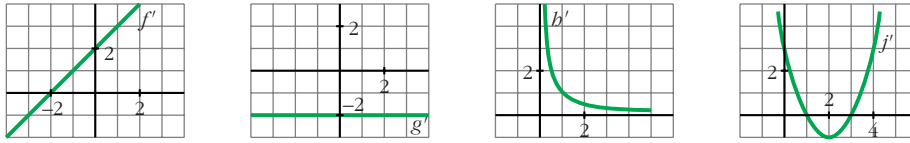
• En  $x = 0$ :

$$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$$

La función no es derivable en  $x = 0$ .

Por tanto, es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

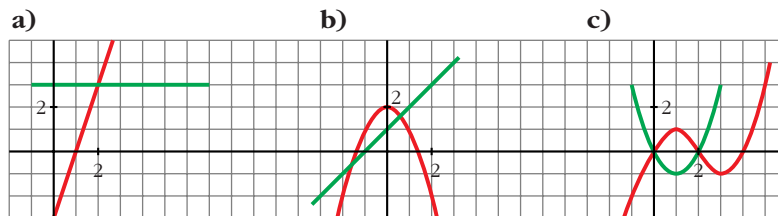
**51** Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $b$  y  $j$ :



- a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?  
 b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?  
 c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

- a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.  
 $f$  tiene un punto de tangente horizontal en  $x = -2$ , pues  $f'(-2) = 0$ .  
 $j$  tiene dos puntos de tangente horizontal en  $x = 1$  y en  $x = 3$ , pues  $j'(1) = j'(3) = 0$ .  
 $g$  y  $b$  no tienen ningún punto de tangente horizontal.
- b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es  $g'$ .
- c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es  $f'$ .

**52** ¿Cuál de estas gráficas representa la función  $f$  y cuál su derivada  $f'$ ? Justifica tu respuesta.



- a) La función es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es  $y = 3$ . Luego, estas gráficas *sí* representan a una función y su derivada.
- b) En  $x = 0$ , la función tiene un máximo; la derivada se anula. La recta tendría que pasar por  $(0, 0)$ .  
 No representan, por tanto, a una función y su derivada.
- c) En  $x = 1$ , la función tiene un máximo; la derivada se anula, y tendría que pasar por  $(1, 0)$ . Estas *tampoco* representan a una función y su derivada.  
 Por tanto, solo la primera es válida.

## Página 272

**53** Halla los puntos de derivada nula de la función  $y = (3x - 2x^2)e^x$ .

**S**

$$y' = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$$

$$y' = 0 \rightarrow -2x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

**54** Dada la función  $f(x) = e^x + \ln(1 - x)$ , comprueba que  $f'(0) = 0$  y  $f''(0) = 0$ .  
¿Será también  $f'''(0) = 0$ ?

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{1-x} \rightarrow f'(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow f''(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f'''(x) = e^x - \frac{2}{(1-x)^3} \rightarrow f'''(0) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

**55** Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2x(x-3)}{x^2-9} & \text{si } x \neq 0, x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} & \text{si } x \neq 0, x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2x}{x+3} & \text{si } x \neq 0, x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El dominio de la función es  $\mathbb{R} - \{-3\}$ . Por tanto, en  $x = -3$  no es continua (ni derivable), pues no está definida.

**Continuidad:**

• **En  $x \neq 0$ ,  $x \neq 3$  y  $x \neq -3$ :** Es continua, pues las funciones que la forman son continuas en este caso.

• **En  $x = 0$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x+3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array} \right\} \text{No es continua en } x = 0 \text{ (tiene una discontinuidad evitable).}$$

- **En  $x = 3$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3). \text{ La función es continua} \\ \text{en } x = 3.$$

- **En  $x = -3$ :** No es continua, pues no está definida.

Por tanto,  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$ .

#### Derivabilidad:

- **Si  $x \neq 0$ ,  $x \neq 3$  y  $x \neq -3$ :** Es derivable. Además:  $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$

- **En  $x = 0$  y en  $x = -3$ :** No es derivable, pues no es continua.

- **En  $x = 3$ :** Sí es derivable, pues  $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \frac{1}{6}$ .

Por tanto,  $f(x)$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$ . Además:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ y } x \neq -3$$

**56**  
S

**Determina, si es posible, el valor del parámetro  $a$  para que la función  $f$  sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que  $f(x)$  sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ :** La función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- **En  $x = 1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

#### Derivabilidad

- **Si  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ :** es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En  $x = 1$ :**

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array} \right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que  $f$  sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser  $a = 1$ .

**57** Estudia la derivabilidad en  $x = 0$  de la función:

S

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$ , la función es continua en  $x = 0$ .

Veamos si es derivable:

- Si  $x \neq 0$ , tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

No existen las derivadas laterales en  $x = 0$ . Por tanto,  $f(x)$  no es derivable en  $x = 0$ .

**58** Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

S

a)  $f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$                       b)  $f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}$

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Continuidad:**

- Si  $x \neq 0 \rightarrow$  Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Si  $x = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en  $\mathbb{R}$ .

**Derivabilidad:**

- Si  $x \neq 0$ : Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1 - x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{(1 + x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En  $x = 0$ :**

$$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1$$

No es derivable en  $x = 0$ .

Por tanto, es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es  $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ . Por tanto, en  $x = -1$  y en  $x = 1$ , la función no es continua (ni derivable).

**Continuidad:**

• **Si  $x \neq 0$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq 1$ :** La función es continua, pues está formada por funciones continuas (en estos puntos).

• **En  $x = -1$  y en  $x = 1$ :** No es continua, pues no está definida en estos puntos.

• **En  $x = 0$ :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2 - 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

Por tanto, es una función continua en  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

**Derivabilidad:**

• **Si  $x \neq 0$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq 1$ :** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• **En  $x = -1$  y en  $x = 1$ :** No es derivable, pues no está definida la función.

• **En  $x = 0$ :**

$$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1. \text{ No es derivable en } x = 0.$$

Por tanto, es derivable en  $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ .

59 Prueba que  $D\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

$$\begin{aligned} D\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] &= \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right) \cdot 2} = \\ &= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2) \cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot 2}{(e^x + e^{-x}) \cdot 2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

60 Demuestra que la derivada de la función  $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$  con  $0 \leq x \leq \pi$  es una constante.

• Recuerda la fórmula de  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

$$\text{Si } 0 \leq x \leq \pi \rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\text{Así: } y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

$$\text{Por tanto: } y' = \frac{1}{2}$$

61 Si  $f(x) = x^2|x|$ , halla  $f'$ ,  $f''$  y  $f'''$ .

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En  $x = 0$ , tenemos que  $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$ ).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En  $x = 0$ , tenemos que  $f''(0^-) = f''(0^+) = f''(0) = 0$ ).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En  $x = 0$  no existe  $f'''$ , puesto que  $f'''(0^-) = -6 \neq f'''(0^+) = 6$ ).

**62** Halla los puntos de derivada nula de la función  $y = \cos 2x - 2 \cos x$ .

$$y' = -\operatorname{sen} 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} x =$$

$$= -2 \cdot 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x (-2\cos x + 1)$$

$$y' = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen} x (-2\cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 + k \cdot \pi \\ -2\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} ; \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

### CUESTIONES TEÓRICAS

**63** Sabes que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ .

A partir de esta expresión, justifica la validez de esta otra:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Llamando  $h = x - x_0$ , tenemos que:

- Si  $h \rightarrow 0$ , entonces  $x \rightarrow x_0$ .
- Además,  $x_0 + h = x$

$$\text{Por tanto: } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**64** Relaciona los siguientes límites con la derivada de las funciones que aparecen en ellos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x} = \phi'(2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$$



**69** La función  $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ , ¿tiene algún punto de derivada nula?

¿Y la función  $y = \sqrt{4x - x^2}$ ?

$$y = \sqrt{x^2 - 4x} \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x}} = 0 \rightarrow x = 2$$

Pero  $x = 2$  no pertenece al dominio de definición de la función. Por tanto, no tiene ningún punto de derivada nula.

**Para la otra función:**

$$y = \sqrt{4x - x^2} \rightarrow \text{Dominio} = [0, 4]$$

$$y' = \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 0 \rightarrow x = 2 \text{ (Sí pertenece al dominio)}$$

La derivada se anula en  $x = 2$ .

## PARA PROFUNDIZAR

**70** Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función  $f(x) = \text{sen } 2x$  se anulan en el origen de coordenadas.

$$f^I(x) = 2\cos 2x$$

$$f^{II}(x) = -4\text{sen } 2x = -2^2 \cdot \text{sen } 2x$$

$$f^{III}(x) = -8\cos 2x = -2^3 \cdot \cos 2x$$

$$f^{IV}(x) = 16\text{sen } 2x = 2^4 \cdot \text{sen } 2x$$

...

En general, las derivadas de orden par son de la forma:  $f^{(n)}(x) = k \cdot \text{sen } 2x$ , donde  $k$  es constante.

Por tanto, se anulan todas en  $x = 0$ , puesto que  $\text{sen } 0 = 0$ . Como  $f(0) = 0$ , tenemos que todas las derivadas de orden par de  $f(x)$  se anulan en el origen de coordenadas.

## Página 273

**71** Dada  $y = \text{sen } x$ , halla un punto en el intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por  $(0, 0)$  y  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

La cuerda que pasa por  $(0, 0)$  y  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  tiene pendiente:  $m = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$ .

Tenemos que hallar un punto del intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  en el que la derivada de la función sea igual a  $\frac{2}{\pi}$ :

$$\left. \begin{array}{l} y' = \cos x = \frac{2}{\pi} \\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \rightarrow x = 0,88$$

**72 Prueba, utilizando la definición de derivada, que la función:**

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

**es derivable en  $x = 1$  y no lo es en  $x = -1$ .**

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h\sqrt{1-(1+h)^2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-\sqrt{1-(1+h)^2}) = 0 = f'(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( (2-h)\sqrt{\frac{2h-h^2}{h^2}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (2-h)\sqrt{\frac{(2-h)}{h}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{0} \rightarrow \text{no existe } f'(-1) \end{aligned}$$

**73 Sean  $f$  y  $g$  dos funciones derivables en  $\mathbb{R}$ , tales que:**

$$f(0) = 5; f'(0) = 6; f'(1) = 3$$

$$g(0) = 1; g'(0) = 4; \text{ y } g'(5) = 2$$

**Prueba que  $f \circ g$  y  $g \circ f$  tienen la misma derivada en  $x = 0$ .**

Aplicamos la regla de la cadena:

$$(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(1) \cdot g'(0) = 3 \cdot 4 = 12$$

$$(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(5) \cdot f'(0) = 2 \cdot 6 = 12$$

**74**  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**¿Hay algún valor de  $k$  para el cual  $f(x)$  sea continua en  $x = 0$ ?**

**Continuidad:** Debe cumplirse que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 \right) = 1 + 2 = 3 \\ f(0) &= k \end{aligned} \right\}$$

La función será continua en  $x = 0$  si  $k = 3$ .

**75** Halla la derivada  $n$ -ésima de las funciones siguientes:

a)  $y = e^{ax}$                       b)  $y = \frac{1}{x}$                       c)  $y = \ln(1+x)$

a)  $y' = a e^{ax}$ ;  $y'' = a^2 e^{ax}$ ;  $y''' = a^3 e^{ax}$ ; ...  $y^{(n)} = a^n e^{ax}$

Lo demostramos por inducción: (para  $n = 1, 2, 3$  se cumple).

Si  $y^{(n-1)} = a^{n-1} e^{ax}$ , derivando obtenemos:  $y^{(n)} = a \cdot a^{n-1} e^{ax} = a^n e^{ax}$ , como queríamos demostrar.

b)  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ;  $y'' = \frac{2}{x^3}$ ;  $y''' = -\frac{6}{x^4}$ ; ...  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Lo demostramos por inducción: (para  $n = 1, 2, 3$  se cumple).

Si  $y^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$ , derivando obtenemos:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \text{ como queríamos demostrar.}$$

c)  $y' = \frac{1}{1+x}$ ;  $y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$ ;  $y''' = \frac{2}{(1+x)^3}$ ; ...  $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}$

Lo probamos por inducción: (para  $n = 1, 2, 3$  se cumple).

Si  $y^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$ , derivando, obtenemos:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot (-1)(n-1)}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, \text{ como queríamos demostrar.}$$

**76** Considera la función:  $f(x) = \begin{cases} x^n \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  siendo  $n$  un número natural.

a) Demuestra que  $f$  es derivable en  $x = 0$  para  $n = 2$ .

b) Demuestra que  $f$  no es derivable en  $x = 0$  para  $n = 1$ .

a)  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)^{(*)} = 0$

(\*) Tenemos en cuenta que  $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \leq 1$ .

Por tanto,  $f$  es derivable en  $x = 0$  para  $n = 2$ .

$$b) f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \operatorname{sen}(1/h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

Este límite no existe (el valor de  $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$  va oscilando entre  $-1$  y  $1$ ).

Por tanto,  $f$  no es derivable en  $x = 0$  para  $n = 1$ .

**77 Prueba que existe un punto de la curva:  $f(x) = e^x + \operatorname{arc\,tg} x$  cuya tangente (en ese punto) es paralela a la recta  $y = 3x + 2$ .**

• *Aplica el teorema de Bolzano a la función  $f'(x) - 3$ .*

La pendiente de la recta  $y = 3x + 2$  es  $m = 3$ .

Tenemos que probar que existe un punto de la curva  $f(x)$  tal que  $f'(x) = 3$ .

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2} = 3$$

Consideramos la función  $G(x) = f'(x) - 3$ ; es decir:

$$G(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2} - 3$$

$$\text{Tenemos que: } \begin{cases} G(0) = -1 < 0 \\ G(1) = e - \frac{5}{2} \approx 0,22 > 0 \\ G(x) \text{ es una función continua en } [0, 1] \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Bolzano, sabemos que existe un punto  $c \in (0, 1)$  tal que  $G(c) = 0$ . Es decir,  $f'(c) - 3 = 0$ ; o bien  $f'(c) = 3$ , como queríamos probar.

**78 Comprueba en cada caso que  $f(x)$  verifica la ecuación indicada:**

a)  $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

b)  $f(x) = \ln \frac{1}{x+1}$

$$x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$$

a)  $f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$

$$f''(x) = \cancel{e^x \operatorname{sen} x} + e^x \cos x + e^x \cos x - \cancel{e^x \operatorname{sen} x} = 2e^x \cos x$$

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x - 2e^x \cos x + 2e^x \operatorname{sen} x = 0$$

Por tanto:  $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

De otra forma:

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = f(x) + e^x \cos x \\f''(x) &= f'(x) + e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x = \\&= f'(x) + e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x + e^x \operatorname{sen} x - e^x \operatorname{sen} x = \\&= f'(x) + (e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x) - 2(e^x \operatorname{sen} x) = \\&= f'(x) + f'(x) - 2f(x) = 2f'(x) - 2f(x)\end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

$$\text{b) } f(x) = \ln 1 - \ln(x+1) = -\ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x+1}$$

$$xf'(x) + 1 = \frac{-x}{x+1} + 1 = \frac{-x + x + 1}{x+1} = \frac{1}{x+1} = e^{\ln\left(\frac{1}{x+1}\right)} = e^{f(x)}$$

$$\text{Por tanto: } xf'(x) + 1 = e^{f(x)}$$

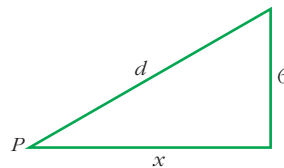
## PARA PENSAR UN POCO MÁS

- 79** Un avión vuela horizontalmente a 6 km de altura. La ruta del avión pasa por la vertical de un punto  $P$  y se sabe que, en el instante en que la distancia del avión a  $P$  es 10 km, dicha distancia aumenta a razón de 6 km/minuto.

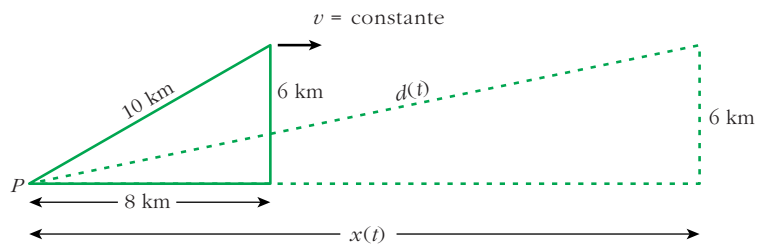
Halla la velocidad del avión, que supondremos constante.

Pasos:

- a) Expresa  $d$  en función de  $x$ :



- b) Obtén la expresión de la velocidad de alejamiento de  $P$ ,  $d'(t)$ , en función de  $x$  y de  $x'(t)$ .
- c) Despeja  $x'(t_0)$  siendo  $t_0$  el instante al que se refiere el enunciado y, por tanto, para el que conocemos algunos datos numéricos.  $x'(t_0)$  es la velocidad del avión en ese instante y, por tanto, su velocidad constante.



$$\text{a) } d = \sqrt{x^2 + 36}$$

$$\text{b) } d(t) = \sqrt{(x(t))^2 + 36}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t) \cdot x'(t)}{2\sqrt{(x(t))^2 + 36}} = \frac{x(t) \cdot x'(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + 36}}$$

$$\text{c) } x'(t_0) = \frac{d'(t_0)\sqrt{(x(t_0))^2 + 36}}{x(t_0)} = \frac{6\sqrt{8^2 + 36}}{8} = \frac{60}{8} = 7,5 \text{ km/min}$$

El avión va a 7,5 km/min; es decir, a 450 km/h.