LENGUAJE NATURAL Y LENGUAJE ARTIFICIAL

El lenguaje natural

El castellano, el francés, el euskera, el italiano, el catalán, el ruso, el gallego, el inglés, etc., son lenguas naturales. Por lengua natural (también llamado lenguaje ordinario) se entiende la lengua utilizada normalmente en una comunidad de individuos para la comunicación de éstos entre sí. (El griego antiguo y el latín—que hoy se estudian pero no se hablan- fueron utilizados también en el pasado por las comunidades griega y latina. En su día fueron, pues, lenguas naturales para griegos y romanos, respectivamente.)

El lenguaje natural se caracteriza, en primer lugar, por su enorme capacidad y riqueza comunicativa. Ningún otro medio es capaz de expresar tal variedad de sentimientos, situaciones, deseos, etc., y de adaptarse a las necesidades más dispares de comunicación. El lenguaje natural es flexible, permite jugar con las palabras y con las expresiones produciendo metáforas de inigualable fuerza expresiva: «por las gradas sube Ignacio con toda su muerte a cuestas» (García Lorca), «tengo alegre la tristeza y triste el vino» (Bécquer), «a las aladas almas de las rosas del almendro de nata te requiero» (Miguel Hernández), etc. Son conocidos ejemplos de expresividad conseguida gracias a la manipulación que permite una lengua natural.

Frente a su **riqueza expresiva** y su **plasticidad** (de las cuales se sienten seguramente muy satisfechos los poetas), el lenguaje natural tiene algunas características de las cuales no se sienten francamente muy satisfechos los científicos. Así,

a) Muchas palabras de la lengua ordinaria son **ambiguas**, poseen más de un significado. Esto puede dar lugar a equívocos que dificultan la exactitud de las informaciones y la corrección de los razonamientos. En los temas ya estudiados nos hemos encontrado con ejemplos de palabras ambiguas. La palabra «inteligencia» es ambigua ya que a veces se utiliza para designar una característica exclusiva del hombre mientras que otras veces se utiliza para designar una característica que poseen también los. La palabra «memoria» es ambigua; en unos casos se utiliza para referirse a conductas aprendidas (montar en bicicleta, etc.) y en otros casos se refiere exclusivamente al recuerdo, es decir, a la memoria representativa. La palabra «libertad» también lo es, etc.

Por supuesto, las distintas lenguas de uso ordinario no poseen el mismo porcentaje de palabras ambiguas en todas las zonas de su vocabulario. En el campo de las palabras que se refieren a la experiencia humana (vivencias, sentimientos, etc.) abundan más las palabras ambiguas que en otros campos, de ahí que la claridad y la exactitud sea mucho más difícil en filosofía o en psicología (ambas se exponen en lenguaje ordinario) que en el caso de las ciencias naturales, por ejemplo. A pesar de estas diferencias, la ambigüedad es un rasgo general del lenguaje natural.

b) En el lenguaje natural pueden producirse extremas situaciones, como la siguiente. Supongamos que alguien escribe dentro de un recuadro las siguientes palabras

Soy un mentiroso

A pesar de que este mensaje está escrito en castellano correcto, nuestra sorpresa ante el mismo se torna en perplejidad. El mensaje ha de ser a la vez verdadero y falso o más exactamente: sólo puede ser verdadero sí es falso y viceversa. En efecto, solamente puede ser verdadero si el que lo ha escrito es efectivamente un mentiroso y miente; pero si el que lo ha escrito es efectivamente un mentiroso y miente, entonces el mensaje es falso. Esta extraña situación se denomina **paradoja**. Una paradoja se produce cuando dos proposiciones contradictorias (en nuestro ejemplo, «soy un mentiroso» y «no soy un mentiroso») se implican mutuamente. No se trata, como es obvio, de que en el lenguaje natural andemos tropezándonos a cada paso con paradojas (en tal caso ya estaríamos locos todos) sino de que en él pueden darse paradojas y esto basta para sospechar de él como instrumento científico riguroso.

c) El lenguaje natural es, en fin, muy **poco operativo**. Utilizando el castellano (o cualquier otra lengua ordinaria) y ateniéndonos a las reglas de su sintaxis es muy difícil operar, razonar con rapidez y eficacia. Supongamos que nos presentan el siguiente razonamiento: El Coruña gana y no pierde el Castellón; pierde el Castellón o no pierde el Osasuna; si gana el Málaga entonces pierde el Osasuna; conclusión*:* luego no gana el Málaga y el Coruña gana. Supongamos que al presentárnoslo, nos preguntan: ¿es correcto el razonamiento, es decir, la conclusión se deriva de las afirmaciones precedentes? Con las reglas sintácticas de la lengua castellana no resulta fácil responder. En el tema próximo -una vez que hayamos estudiado el lenguaje de la lógica proposicío-nal- comprobará el alumno lo sencillo que es, en realidad, este problema.

De todo lo anterior se deduce que si bien el lenguaje natural es un instrumento idóneo para ciertos propósitos, no es igualmente apropiado para otros menesteres como la ciencia, en que se desea un máximo de exactitud y operatividad.

El lenguaje artificial

Consideraciones como las anteriores han empujado a la construcción de lenguas artificiales para ciertos propósitos, lenguas no naturales sino artificiales en que sea posible operar con exactitud y eficacia. Sobre el lenguaje artificial han de tenerse en cuenta las dos observaciones siguientes.

a) En primer lugar, que no se trata de suplantar totalmente el lenguaje

natural: el lenguaje natural es insustituible en la inmensa mayoría de las circunstancias en que el hombre se encuentra y en la inmensa mayoría de las actividades para las cuales el hombre utiliza el lenguaje. En efecto, el hombre utiliza el lenguaje no solamente para transmitir informacíón científica y para razonar a niveles complicados sino también para rogar, para condenar o alabar, para mandar, para preguntar, para contar chistes, para expresar sus sentimientos, etc., y en todos estos casos el lenguaje natural parece insustituible.

b) En segundo lugar, téngase en cuenta que cuando hablamos ahora de lenguaje artificial (teoría de conjuntos, álgebra, lógica) no nos referimos a nada parecido a cierto tipo de idiomas artificiales como el esperanto. Como es sabido, el esperanto (y otras lenguas parecidas) no se inventan con el fin de suplir las deficiencias que hemos señalado en el lenguaje natural, sino porque existen tantas lenguas distintas sobre la tierra que la comunicación entre hablantes de distintas áreas lingüísticas resulta imposible (un chino y un francés no podrían entenderse, suponiendo que cada uno sólo sea capaz de expresarse en su propia lengua). Obsérvese que si todos los hombres habláramos la misma lengua (el francés, el castellano, la que fuera), no haría falta el esperanto y sin embargo, esa lengua única (el francés, el castellano, la que fuera) seguiría aquejada de las insuficiencias del lenguaje natural a que anteriormente nos hemos referido (falta de exactitud y escasa operatividad).

LENGUAJE FORMAL

Noción de lenguaje formal

Hoy día la lógica cuenta con un sistema de símbolos especialmente inventado y construido para lograr la precisión y la operatividad. La lógica se expresa, pues, en un lenguaje artificial. El lenguaje de la lógica es, además, un lenguaje formal. Trataremos de aclarar a continuación qué es un lenguaje formal. Para ello, comenzamos con un ejemplo.

Supongamos que se nos plantea el siguiente problema: «Pedro tiene cuatro manzanas más que Juan y entre ambos tienen veinte. ¿Cuántas tiene cada uno?» El problema es fácil y el ejemplo es absolutamente trivial, pero nos serviremos de él para observar cómo actuamos al intentar resolverlo.

El primer paso para resolver nuestro problema consistirá seguramente *en* plantearlo de modo correcto. Para ello puede recurriese a un sistema de ecuaciones:

$x-y = 4$
$x + y = 20$

Una vez planteado se realizan una serie de operaciones encaminadas a hallar el valor de una de las dos incógnitas. Por ejemplo,

a) Se halla el valor de x en la primera ecuación:

$x = 4 + y$

b) Se sustituye x en la segunda ecuación por su valor obtenido en la primera

$4 + y + y = 20$

c) Se halla ahora el valor de y en la primera ecuación una vez hecha la sustitución de x llevada a cabo en el paso anterior.

$4 + y + y = 20$

- 2 y = 20 - 4
- 2 y = 16

16
y = 16 / 2 = 8

De este modo se ha obtenido el valor de y.

Conocido ya el valor de y (y = 8) se procede a encontrar el valor de x:
x + 8 = *20*
x = 20 - 8 = 12

Si volvemos ahora atentamente la mirada al sencillo proceso que hemos seguido para la solución de este problema, observaremos lo siguiente:

1) En primer lugar, **hemos recurrido a un lenguaje artificial** que posee unos **signos** peculiares: x, y, números, signos como +, -, =, etc., posee también unas **reglas** para manejar estos signos: así, hemos utilizado una regla según la cual la fórmula 2 y = 16, es equivalente a la fórmula y = 16 / 2

2) En segundo lugar, en este lenguaje **se prescinde del significado** de los símbolos*.* Una vez introducidos en el lenguaje con el que hemos operado, no importa lo más mínimo si x o y son manzanas, pesetas, peras o kilos de café. Obsérvese que el razonamiento habría sido el mismo si se nos hubiera dicho que «en una caja hay cuatro pesetas más que en otra y entre las dos hay veinte, etc.»

3) Al prescindir del significado, nos hemos atenido únicamente a los **símbolos y a las reglas** según las cuales se opera con ellos.

Estas tres observaciones pueden resumiese diciendo que hemos utilizado un lenguaje formal. Un lenguaje formal es, pues, un lenguaje artificial que: 1) está construido eligiendo arbitrariamente ciertos símbolos y reglas; 2) en él se prescinde del significado, y 3) se atiende exclusivamente a los símbolos y a las reglas establecidas.
La lógica, como las matemáticas, es un lenguaje formal.

Componentes de un lenguaje formal
Un lenguaje formal está compuesto por los siguientes elementos:
a) Un conjunto de **símbolos** que constituyen su vocabulario.

Estos símbolos suelen denominarse **símbolos primitivos** y el vocabulario que forman, vocabulario primitivo.

La posesión de un vocabulario es algo esencial a todo tipo de lenguaje. También el lenguaje natural ha de poseer, por fuerza, un vocabulario. La lengua castellana, por ejemplo, consta de un número considerable de miles de palabras que aparecen recogidas una tras otra en el diccionario. Lo mismo ocurre con el lenguaje formal, si bien existe una doble diferencia entre ambos casos. En primer lugar, en el lenguaje formal el vocabulario es mucho más reducido que en el lenguaje natural y es razonable que sea así: si las matemáticas constaran de miles de símbolos, su efectividad desaparecería; su operatívidad depende en gran parte de que el número de símbolos que utiliza es muy reducido. En segundo lugar, los símbolos (palabras, lexemas) que utiliza el castellano poseen significado (ésta es la razón de que haya tantas palabras en una lengua) mientras que los símbolos en un lenguaje formal carecen de significado: las letras x e y del problema que planteábamos más arriba no significan nada, carecen de significado.

El ‘vocabulario primitivo en los sistemas formales -especialmente en la lógica- suele estar constituido por **letras del abecedario**.

b) Un conjunto de **operadores**

Evidentemente, una lengua no es meramente una lista de palabras (símbolos), aisladas unas de otras. Las palabras, los símbolos que forman el vocabulario han de combinarse unos con otros. En toda lengua existen unos símbolos especiales que sirven precisamente para enlazar, para relacionar entre sí los símbolos que forman el vocabulario. En el ejemplo que proponíamos al comienzo del apartado anterior, los símbolos = + y - cumplían la función de enlazar entre sí las letras (x, y) y los números utilizados; al enlazar estos símbolos por medio de aquéllos obteníamos fórmulas como x + y = 20, etc. Esta función de enlace existe también -¿cómo no?- en el lenguaje natural: en castellano, por ejemplo, tal función es desempeñada por conjunciones, preposiciones, etc. (morfemas).

En el lenguaje formal los símbolos de enlace se denominan operadores.

c) **Reglas de formación** de fórmulas,

Además del vocabulario y de los operadores, todo lenguaje consta de un conjunto de reglas para la formación de fórmulas. Expresiones como «Antonio es y», «Juan tiene aunque», etc., no son frases bien construidas en castellano ya que violan ciertas reglas sintácticas (una conjunción no puede ser ni predicado nominal ni objeto de un verbo transitivo). En matemáticas tampoco son frases bien construidas las siguientes:

10 = *V- ;* 8 - ; x + = : etc.

En el lenguaje formal las frases bien construidas se denominan **fórmulas**. Las expresiones anteriormente citadas (10 = *V- ;* 8 - ; x + =) no son fórmulas porque no están bien construidas pero sí que son fórmulas las siguientes expresiones: 10 = *V-100 ;* 8 - 3 ; x + y. Las reglas de formación de fórmulas son aquellas reglas que especifican qué frases están bien construidas y qué frases no están bien construidas.

d) Las **reglas de transformación**

Con el vocabulario primitivo, los operadores y las reglas de formación de fórmulas (que determinan qué frases están bien construidas y cuáles no), tenemos ya un lenguaje formal. Ahora bien, éste se utiliza fundamentalmente para operar. En el ejemplo de las ecuaciones que más arriba propusimos no nos limitábamos a utilizar símbolos y operadores en fórmulas (frases bien construidas) como:

$x - y = 4$; $x + y = 20$; $x = 12$; $y = 8$, etcétera,

sino que operábamos: partiendo de las dos primeras fórmulas (es decir, los datos del problema: $x - y = 4$; $x + y = 20$) y a través de varias operaciones llegábamos a las dos últimas fórmulas (es decir, a la solución del problema: $x = 12$; $y = 8$*)*. Para operar se necesitan unas reglas que se denominan reglas de transformación.

Las reglas de transformación permiten pasar de unas fórmulas a otras.

Al pasar de $x - y = 4$ a $x = 4 + y$, al pasar de $x + y = 20$ a $4 + y + y = 20$, etc., estamos aplicando reglas de transformación (transformamos unas fórmulas en otras). Este tipo de reglas existe también en el lenguaje natural, por ejemplo, es posible pasar de la voz activa a la voz pasiva: la frase o fórmula «Antonio golpeó a Juan» puede transformarse en la frase «Juan fue golpeado por Antonio».

Las reglas que permiten pasar de unas fórmulas a otras se denominan reglas de transformación.

Verdad y validez o corrección

A veces se dice que un razonamiento es verdadero cuando es correcto, válido, e igualmente que es falso, cuando es incorrecto, inválido. Hablando con precisión, sería mejor no decir de un razonamiento que es verdadero o falso sino decir que es correcto o incorrecto, válido o inválido.

Hay razones para no hablar en lógica de verdad y de falsedad. Atiéndase a los dos razonamientos siguientes:

1) Si la Tierra es un planeta, entonces la Tierra gira alrededor del Sol;
la Tierra es un planeta,
luego: la Tierra gira alrededor del Sol.

2) Si la Tierra es un satélite, entonces la Tierra gira alrededor de un planeta;
la Tierra es un satélite,
luego: la Tierra gira alrededor de un planeta.

Si atendemos a la verdad, entre los dos razonamientos existe una notable diferencia: en el primero de ellos, tanto las premisas como la conclusión son verdaderas; en el segundo, al contrario, son falsas una premisa («la Tierra es un satélite») y la conclusión (la Tierra gira alrededor de un planeta).

Si atendemos a la validez o corrección, entre ambos razonamientos no existe diferencia ninguna: ambos son válidos, correctos, ya que las premisas de que parten uno y otro permiten extraer sus respectivas conclusiones. Se trata del mismo razonamiento en ambos casos.

Anteriormente hemos afirmado que el lenguaje lógico es formal, que en él se prescinde del significado. Aunque aún no hemos estudiado (lo haremos a partir del tema próximo) los símbolos de la lógica, vamos a tratar de expresar estos razonamientos en lenguaje formal. En el primer razonamiento intervienen dos enunciados («la Tierra es un planeta», «la Tierra gira alrededor del Sol»): simbolicémoslos respectivamente con las letras p y q. En la primera premisa aparecen ambos enunciados conectados entre sí, formando un enunciado condicional *(«si* la Tierra es un planeta, *entonces la* Tierra gira alrededor del Sol»): la condicional (si... entonces) se simboliza en lógica con una flecha $\rightarrow$ situada entre ambos enunciados. En el último de los enunciados aparece el término «luego», que en castellano indica que se trata de la conclusión: esto se simboliza en lógica con el signo $\vdash$. Siguiendo estas elementales indicaciones, el primer razonamiento puede formalizarse (es decir, expresarse formalmente) del siguiente modo:

1. $p \rightarrow q$ (si p, entonces q) (primera premisa)
2. p (p) (segunda premisa)

$\vdash$ q (luego q) (conclusión) ,

Sí se observa el segundo de los razonamientos propuestos, se caerá fácilmente en la cuenta de que su expresión lógica, formal es exactamente la misma que la del primero. Se trata, pues, de la misma forma de razonamiento que es válida, como veremos en el tema próximo. Una vez que nos hemos situado en este lenguaje formal, se prescinde en absoluto de a qué enunciados aplicará cada cual esta fórmula. Ocurre exactamente lo mismo que con el sistema de ecuaciones que proponíamos más arriba: una vez que nos adentramos en las fórmulas $x - y = 4$, $x + y = 20$, no importa si Juan y Pedro tienen manzanas o no las tienen.

La lógica no puede decidir acerca de la verdad de los enunciados. No puede pronunciarse acerca de si es verdad o no que la Tierra es un satélite o si es verdad o no que los satélites giran alrededor de planetas. Eso le corresponde decirlo a un astrónomo.

La lógica se limita a establecer cuándo unas determinadas premisas -sean verdaderas o no- permiten extraer una determinada conclusión. Si es así, el razonamiento será válido, correcto. Si no es así, el razonamiento será inválido, incorrecto.

Lógica proposicional

La lógica proposicional toma en cuenta las proposiciones (recordemos: enunciados que pueden ser verdaderos o falsos y que, por lo tanto, tienen dos posibilidades de verdad, o son verdaderos o falsos, pero no ambos).

El significado de una proposición es algún hecho que ocurre en el mundo, por lo que si se da el hecho afirmado por una proposición, ésta es verdadera y en caso contrario, falsa.

Las proposiciones que se refieren a hechos simples del mundo se llaman proposiciones **atómicas**. Varias proposiciones atómicas pueden relacionarse en entre ellas dando lugar a proposiciones **moleculares**.

Para formalizar una proposición atómica simplemente le asignamos una letra que, por convención, puede ser cualquiera a partir de la letra «p». Para establecer relaciones entre las proposiciones atómicas se utilizan los **operadores lógicos**.

Los operadores lógicos son

La **negación**, que se lee «no» y se escribe «˥». Ejemplo: ˥p («no p», «no es el caso que p» o «no es cierto p»).

La **conjunción**, que se lee «y» y se escribe «**∧**».Ejemplo: p **∧** q («p y q»).

La **disyunción**, que se lee «o» y se escribe «**∨**». Ejemplo: p **∨** q («p o q»).

El **condicional**, que se lee «si… entonces…» y se escribe «**→**». Ejemplo: p → q («si p entonces q».

El **biconcional**, que se lee «si y solo si… entonces…» y se escribe «**↔**». Ejemplo: p ↔ q («si y solo si p entonces q»).

Cada uno con su respectiva tabla de verdad:

Negación	Conjunción	Disyunción	Condicional	Bicondicional
˥ p	p **∧** q	p **∨** q	p → q	p ↔ q
0 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
1 0	1 0 0	1 1 0	1 0 0	1 0 0
	0 0 1	0 1 1	0 1 1	0 0 1
	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 1 0

Reglas de inferencia

Supóngase que los dos enunciados siguientes son verdaderos:

1. Amo a Isabel o amo a María
2. Si amo a Isabel, entonces amo a María

¿Se sigue necesariamente que amo a Isabel? ¿se sigue necesariamente que amo a María?

Supóngase que alguien me ~~pregunta: “Es realmente~~ verdadero que si amas a Isabel entonces también amas a María?” Y yo respondo: “Si eso es verdadero, entonces amo a Isabel”,

¿Se sigue que amo a Isabel? ¿Se sigue que amo a María?

Esta vez tenemos dos chicas~~, Eva y Margarita. Alguien~~ me pregunta: “¿Es realmente verdadero que si amas a Eva entonces amas también a Margarita?” Yo respondo: “Si eso es verdadero, entonces amo a Eva, y si amo a Eva, entonces eso es verdadero”

¿A qué chica amo necesariamente?

Ahora se trata de tres chicas: Ana, Luisa y Diana. Supóngase que se dan los siguientes hechos:

1. Amo al menos a una de las tres chicas.
2. Si amo a Ana pero no a Diana, entonces amo también a Luisa.
3. 0 bien amo a Diana y a Luisa o bien no amo a ninguna.
4. Si amo a Diana, entonces amo también a Ana.

¿A cuál de las chicas amo?

En el primer caso, se sigue que amo a María (y no se sigue nada respecto de mis sentimientos por Isabel). En el segundo caso, se sigue que amo a Isabel (y no se sigue nada respecto demis sentimientos hacia María). En el tercero, se sigue que amo a las dos. En el cuarto, que amo a las tres. Pero la cuestión es probar que es exactamente así. (Y esta cuestión conduce a otra más general: la de garantizar por qué es así.)

Intenta empezar a contestar a esos dos órdenes de problemas. Primero tendrás que emplear ciertas **reglas de inferencia,** ciertos modos para pasar de verdades (supuestas o sabidas) a otras verdades que dependen de las primeras. Observarás que esas reglas las tomas de tu modo de discurrir a diario; que las has dado por buenas, por así decir, desde siempre y sin pararte a pensar si de verdad y por qué lo eran.

Notarás en seguida que, en algunos de estos ejemplos, el camino más útil es comenzar suponiendo la negación de una de las posibles conclusiones. Así, en el segundo problema puedes empezar diciéndote: «Supongamos que no amo a Isabel». Aceptas, entonces, como provisionalmente verdadera la negación de la conclusión posible: «Amo a Isabel». Luego razonas así: «He afirmado que, si era verdadero que si amaba a Isabel entonces también amaba a María, era verdadero que amaba a Isabel. Pero si no amo a Isabel -según he empezado suponiendo-, es que no es verdadero que, si amaba a Isabel, amaba también a María. (Más adelante llamaremos a la regla aquí usada *modus tollens.)* ¿Qué significa esto de “No es verdad que, si amo a Isabel, entonces amo a María”? Veo que equivale a decir: “Amo a Isabel, pero no amo a María”. (Después analizaremos cómo entender los juicios condicionales.) Amo a Isabel y no amo a María; por consiguiente, amo a Isabel *(regla de simplificación de una conjunción).* Luego resulta que, si supongo que no amo a Isabel, se deduce que sí la amo. Si no la amo, entonces la amo y no la amo. Del supuesto se sigue una cosa absurda (una **contradicción,** o sea: *la afirmación simultánea de un juicio y su negación).* Pues entonces el supuesto no es verdadero. Y, si no es verdadero, es que su negación sí es verdadera. El supuesto era que no amo a Isabel; su negación es que no es verdad que no la ame. Pero esto equivale a que sí la amo *(regla de doble negación). De* modo que se sigue que amo a Isabel.»

Escribe, unos debajo de otros, los pasos dados. A la derecha de cada uno, y dejando un espacio, consignarás la regla que te permite ir avanzando y el paso o la premísa, o el supuesto, sobre el que la aplicas. El resultado será:

1. Si es verdad que si amo a Isabel entonces también amo a María, entonces es que amo a Isabel. *(Premisa.)*

2. No amo a Isabel. *(Supuesto.)*

3. No es verdad que si amo a Isabel entonces ame también a Maria. *(Modus tollens,* comparando 1 y 2.)

4. Amo a Isabel y no amo a María. (Equivale a 3.)

5. Amo a Isabel. *(Simplificación* de 4.)

6. Amo a Isabel y no amo a Isabel. *(Conjunción* de 5 y 2.)

7. Luego amo a Isabel. *(Conclusión.)*

La justificación de la conclusión la aporta una regla especial, a la que se llama regla de **reducción al absurdo.** En general, sí de un juicio se sigue una contradicción, es que el juicio en cuestión es falso, y, por consiguiente, que su negación es verdadera. Veremos esto con detalle más adelante.

Las reglas principales

Introducción del condicional **IC**

$$\begin{array}{l} p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q \\ \hline p \rightarrow q \end{array}$$

Modus Ponens **MP** (Eliminación condicional)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Modus Tollens **MT**

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Introducción de la Conjunción **I conj**

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

Regla de Simplificación **S**
Eliminación conjunción

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline q \end{array}$$

Regla de Adición **Ad.**
Introducción disyunción

$$\begin{array}{l} p \\ \hline p \vee q \end{array} \qquad \begin{array}{l} q \\ \hline p \vee q \end{array}$$

Regla de la
Doble Negación **DN**

$$\begin{array}{l} \neg\neg p \\ \hline p \end{array}$$

Regla de la
prueba por casos **Cas**

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \\ p \\ \cdot \\ \cdot \\ r \\ \\ q \\ \cdot \\ \cdot \\ r \\ \hline r \end{array}$$

Regla de la reducción
al absurdo **Abs**

$$\begin{array}{l} p \\ \cdot \\ \cdot \\ q \wedge \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Regla de introducción
del bicondicional **IB**

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ \hline p \leftrightarrow q \end{array}$$

Reglas derivadas

Silogismo disyuntivo

$$\frac{p \vee q \qquad \neg p}{q}$$

Transitividad

$$\frac{p \rightarrow q \qquad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

Eliminación del bicondicional

$$\frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$$

Dilema

$$\frac{p \vee q \qquad p \rightarrow r \qquad q \rightarrow s}{r \vee s}$$

Asociativa

$$\frac{p \wedge (q \wedge r)}{(p \wedge q) \wedge r} \qquad \frac{p \vee (q \vee r)}{(p \vee q) \vee r}$$

Distributiva

$$\frac{p \wedge (q \vee r)}{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)} \qquad \frac{p \vee (q \wedge r)}{(p \vee q) \wedge (p \vee r)}$$

De Morgan

$p \vee q$
$\neg(\neg p \wedge \neg q)$

$p \wedge q$
$\neg(\neg p \vee \neg q)$

$\neg(p \wedge q)$
$\neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q)$
$\neg p \wedge \neg q$

Ejercicios:

Tablas de verdad

1.- $(p \land q) \lor p$
2.- $(q \lor s) \rightarrow s$
3.- $t \leftrightarrow (r \land t)$
4.- $(p \land q) \rightarrow (q \land p)$
5.- $(r \land \neg r) \land q$
6.- $\neg\ [p \rightarrow (p \lor q)]$
7.- $[(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
8.- $(s \rightarrow t) \land (p \land t)$

Cálculo de deducción natural

Ejercicios **Soluciones**

1. $\neg q$ 2. $t \rightarrow q$ 3. $\neg p \rightarrow t$ ――――― $\vdash p$	4. $\neg t$ MT (1,2) 5. $\neg\neg p$ MT (3,4) 6. p DN (5)	
1. $\neg(p \lor t)$ 2. $s \lor t$ ――――― $\vdash \neg p \land s$	3. $\neg p \land \neg t$ DM (1) 4. $\neg p$ EC (3) 5. $\neg t$ EC (3) 6. s SD (2,5) 7. $\neg p \land s$ IC (4,6)	
1. Hoy es domingo y estamos alegres. 2. Si hoy es domingo entonces iremos a bailar. 3. Si estamos alegres entonces lo pasaremos muy bien. 4. Luego iremos a bailar y lo pasaremos muy bien	1. $p \land q$ 2. $p \rightarrow r$ 3. $q \rightarrow s$ ――――― $\vdash r \land s$	4. p EC (1) 5. q EC (1) 6. r MP (2,4) 7. sMP (3,5) 8. $r \land s$ IC (6,7)
1. $p \lor q$ 2. $p \rightarrow r$ 3. $q \rightarrow s$ 4. $\neg s$ ――――― $\vdash r$	5. $\neg q$ MT (3,4) 6. p ED (1, 5) 7. r MP (2,6)	

1. No es el caso que o Bush apoya el viaje o Aaron no hace concesiones. 2. Arafat viaja a Israel si y sólo si Aaron hace concesiones. 3. Si Bin Laden se mantiene neutral Arafat no viaja a Israel Luego Bin Laden no se mantiene neutral.	Bush apoya el viaje: p Aaron hace concesiones: q Arafat viaja a Israel: r Bin Laden se mantiene neutral: s	1. $\neg(p \vee \neg q)$ 2. $r \leftrightarrow q$ 3. $s \rightarrow \neg r$ 4. $\neg p \wedge q$ DM (1) 5. q EC (4) 6. $q \rightarrow r$ EB (2) 7. r MP (5,6) 8. $\neg\neg r$ DN (7) 9. $\neg s$ MT (3,8) ——— $\vdash \neg s$
1. $s \wedge t$ 2. $s \rightarrow q$ 3. $q \rightarrow r$ ——— $\vdash r \wedge t$		4. t EC (1) 5. r Tr. (2,3) 6. $r \wedge t$ IC (4,5)
1. $p \vee q$ 2. $p \rightarrow r$ 3. $q \rightarrow s$ 4. $\neg s$ ——— $\vdash r$		5. $r \vee s$ Dil (1,2,3) 6. r ED (4,5)
1. $p \rightarrow q$ 2. $\neg q \vee r$ 3. $\neg(s \vee r)$ ——— $\vdash \neg p$		4. $\neg s \wedge \neg r$ DM (3) 5. $\neg r$ EC (4) 6. $\neg q$ ED (2,5) 7. $\neg p$ MT (1,6)
1. $p \leftrightarrow \neg q$ 2. $q \rightarrow r$ 3. $r \rightarrow s$ 4. $\neg s$ ——— $\vdash p \vee t$		5. $\neg q \rightarrow p$ EB (1) 6. $\neg r$ MT (2,4) 7. $\neg q$ MT (2,6) 8 $\neg p$ MP (5,7)
1. $p \rightarrow q$ 2. $s \vee p$ 3. $\neg q \wedge r$ 4. $(s \wedge r) \rightarrow t$ ——— $\vdash t$		5. $\neg q$ EC (3) 6. $\neg p$ MT (1,5) 7. s ED (2,6) 8. r EC (3) 9. $s \wedge r$ IC (7,8) 10. t MP (4,9)

Si la contracción del corazón coincide con la dilatación de las arterias, entonces o bien la contracción del corazón impele la sangra a las arterias o bien la dilatación de las arterias aspira sangre del corazón. Por otra parte, si la punción de una arteria no irrumpe la circulación de la sangre por la misma, entonces no puede ocurrir que la dilatación de las arterias aspire sangre del corazón.	1. (p Λ q) → [(p → r) V (q →r)] 2. (s→ r) → ┐(q → r) 3. p Λ q 4. s → r ___________ ⊢ p → r	5. ┐(q → r) MP (2,4) 6. (p → r) V (q → r) MP (1,3) 7. p → r ED (5,6)
SOLUCIÓN		EJERCICIO
4. ┐r v ┐s DM (3) 5. ┐r 6. ┐p ED (4,5) 7. ┐s 8. ┐q ED (4,7) 9. ┐r → ┐p IC (5-6) 10.┐s → ┐q IC (7-8) 11.┐p v ┐q Dil. (4,9,10)		1. p → r 2. q → s 3. ┐(r Λ s) ___________ ⊢ ┐p v ┐q
4. ┐p 5. ┐q MT (1,4) 6. ┐r MT (3,4) 7. ┐q Λ ┐r IC (5,6) 8. ┐(q V r) DM (7) 9. (q V r) Λ ┐(q V r) IC (2,8) 10. ┐┐p Abs (4-9) 11. p DN (10)		1. q → p 2. q V r 3. r → p ___________ ⊢ p
3. r 4. ┐q MP (2,3) 5. ┐p MT (1,5) 6. r → ┐p IC (3-5)		1. p → q 2. r → ┐q ___________ ⊢ (r → ┐p)
4. s 5. q MP (3,4) 6 ┐┐q DN (5) 7 ┐p MT (1,6) 8. ┐r MP (2,7) 9. s → ┐r IC (4-8)		1. p → ┐q 2. ┐p → ┐r 3. s → q ___________ ⊢ s → ┐r

4. (p Λ s) v s Dil (1,2,3) 5. [p Λ s 6. s EC (5) 7. [s 8. s Ident. (7) 9. (p v s) → s IC (5-6) 10.s → s IC (7-8) 11. s v s Dil (4,9,10) 12 s Id (11)		1. p v q 2. p → (p Λ s) 3. q → s ――――― ⊢ s

“Abrió la próxima puerta, los dos casi sin atreverse a ver lo que seguía... Pero no había nada terrorífico allí, sólo una mesa con siete botellas de diferente tamaño puestas en fila.

- Snape -dijo Harry-. ¿Qué tenemos que hacer?

Pasaron el umbral y de inmediato un fuego se encendió detrás de ellos. No era un fuego común, era púrpura. Al mismo tiempo, llamas negras se encendieron delante. Estaban atrapados.

- ¡Mira! -Hermione cogió un rollo de papel, que estaba cerca de las botellas. Harry miró por encima de su hombro para leerlo:

El peligro yace ante ti, mientras la seguridad está detrás,
dos queremos ayudarte, cualquiera que encuentres,
una entre nosotras siete te dejará adelantarte,
otra llevará al que lo beba para atrás,
dos contienen sólo vino de ortiga,
tres son mortales, esperando escondidos en la fila.

Elige, a menos que quieras quedarte para siempre,
para ayudarte en tu elección, te damos cuatro claves:

Primera, por más astucia que tenga el veneno para ocultarse siempre encontrarás alguno al lado izquierdo del vino de ortiga;

Segunda, son diferentes las que están en los extremos, pero si quieres moverte hacia delante, ninguna es tu amiga,

Tercera, como claramente ves, todas tenemos tamaños diferentes: Ni el enano ni el gigante guardan la muerte en su interior;

Cuarta, la segunda a la izquierda y la segunda a la derecha son gemelas una vez que las pruebes, aunque a primera vista sean diferentes.

Hermione dejó escapar un gran suspiro y Harry, sorprendido, vio que sonreía, lo último que había esperado que hiciera.

- Muy bueno -dijo Hermione-. Esto no es magia... es lógica... es un acertijo. Muchos de los más grandes magos no han tenido una gota de lógica y se quedarían aquí para siempre.
- Pero nosotros también, ¿no?
- Por supuesto que no -dijo Hermione-. Lo único que necesitamos está en este papel. Siete botellas: tres con veneno, dos con vino, una nos llevará a salvo a través del fuego negro y la otra hacia atrás, por el fuego púrpura.
- Pero ¿cómo sabremos cuál beber?
- Dame un minuto.

Hermione leyó el papel varías veces. Luego paseó de un lado al otro de la fila de botellas, murmurando y señalándolas. Al fin, se golpeó las manos.

- Lo tengo -dijo-. La más pequeña nos llevará por el fuego negro, hacia la Piedra.

Harry miró a la diminuta botella.

- Aquí hay sólo para uno de nosotros -dijo-. No hay más que un trago.

Se miraron.

- ¿Cuál nos hará volver por entre las llamas púrpura?

Hermione señaló una botella redonda del extremo derecho de la fila.

- Tú bebe de ésa -dijo Harry-. No: vuelve, busca a Ron y coge las escobas del cuarto de las llaves voladoras. Con ellas podréis salir por la trampilla sin que os vea *Fluffy.* Id directamente a la lechucería y enviad a *Hedwig a* Dumbledore, lo necesitamos. Puede ser que yo detenga un poco a Snape, pero la verdad es que no puedo igualarlo.
- Pero Harry... ¿y si Quien-tú-sabes está con él?
- Bueno, ya tuve suerte una vez, ¿no? -dijo Harry, señalando su cicatriz-. Puede ser que la tenga de nuevo.

Los labios de Hermione temblaron, y de pronto se lanzó sobre Harry y lo abrazó.

- ¡Hermione!
- Harry... Eres un gran mago, ya lo sabes.
- No soy tan bueno como tú -contestó muy incómodo, mientras ella lo soltaba.
- ¡Yo! -exclamó Hermione-. ¡libros! ¡Inteligencia! Hay cosas mucho más importantes, amistad y valentía y... íOh, Harry, ten cuidado!
- Bebe primero -dijo Harry-. Estás segura de cuál es cuál, ¿no?
- Totalmente -dijo Hermione. Se tomó de un trago el contenido de la botellita redondeada y se estremeció.”

J.R. Rowlin: Harry Potter y la piedra filosofal

1. Formaliza las siguientes proposiciones:

a. No es cierto que no me guste bailar

b. Me gusta bailar y leer libros de ciencia ficción.

c. Si los gatos de mi hermana no soltaran tanto pelo me gustaría acariciarlos.

d. Si y sólo si viera un marciano con mis propios ojos, creería que hay vida extraterrestre.

e. Una de dos: o salgo a dar un paseo, o me pongo a estudiar como un energúmeno.

f. Si los elefantes volaran o supieran tocar el acordeón, pensaría que estoy como una regadera y dejaría que me internaran en un psiquiátrico.

g. Prefiero ir de vacaciones o estar sin hacer nada si tengo tiempo para ello y no tengo que ir a trabajar.

2. Formaliza la siguientes proposición:

a. Si tuvieran que justificarse ciertos hechos por su enorme tradición entonces, si estos hechos son inofensivos y respetan a todo ser viviente y al medio ambiente, no habría ningún problema. Pero si los hechos son bárbaros o no respetuosos con los seres vivientes o el medio ambiente, entonces habría que dejar de justificarlos o no podríamos considerarnos dignos de nuestro tiempo.

SOLUCIÓN AL EJERCICIO 2

“p” justificar hechos por su tradición.
“q” ser inofensivo.
“r” ser respetuoso con los seres vivos.
“s” ser respetuoso con el medio ambiente.
“t” tener problemas.
“m” ser bárbaro.
“n” ser digno de nuestro tiempo.

$[p \rightarrow (q \wedge r \wedge s \rightarrow \neg t)] \wedge [(m \vee \neg r \vee \neg s) \rightarrow (\neg p \vee \neg n)]$

1. Formaliza las siguientes proposiciones y confecciona su tabla de verdad:

a) O estás seguro y lo que dices es cierto o mientes como un bellaco.

SOLUCIÓN

“p” estar seguro. **“q”** decir la verdad. “**r”** mentir como un bellaco.

$(p \wedge q) \vee r$

2. Formaliza la siguiente proposición

Si un animal fabuloso se enfada, te quedas paralizado del susto y si te quedas paralizado del susto, entonces no puedes sino apelar a su bondad y así no ser engullido. Por lo tanto, si un animal fabuloso se enfada, tendrás que apelar a su bondad o serás engullido.

¿Cuántas variables tiene la tabla? ¿Es una tautología?

4. Formaliza las siguientes proposiciones y responde a las cuestiones

1. Amo a Isabel o amo a María
2. Si amo a Isabel, entonces amo a María

¿Se sigue necesariamente que amo a Isabel? ¿se sigue necesariamente que amo a María?

"p" amo a Isabel; "q" amo a María

$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow p$ $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

1. $p \vee q$
2. $p \rightarrow q$
3. p
4. q MP (2,3)
5. q
6. q Identidad?
7. $q \vee q$
8. q Idempotencia (7)

Supóngase que alguien me pregunta: "Es realmente verdadero que si amas a Isabel entonces también amas a María?" Y yo respondo: "Si eso es verdadero, entonces amo a Isabel",

¿Se sigue que amo a Isabel? ¿Se sigue que amo a María?

"p" amo a Isabel; "q" amo a María

$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$ $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow q$

Esta vez tenemos dos chicas~~, Eva y Margarita. Alguien~~ me pregunta: "¿Es realmente verdadero que si amas a Eva entonces amas también a Margarita?" Yo respondo: "Si eso es verdadero, entonces amo a Eva, y si amo a Eva, entonces eso es verdadero"

¿A qué chica amo necesariamente?

"p" amo a Eva; "q" amo a Margarita

1. $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \wedge [p \rightarrow (p \rightarrow q)]$
2.

Ahora se trata de tres chicas: Ana, Luisa y Diana. Supóngase que se dan los siguientes hechos:

1. Amo al menos a una de las tres chicas.
2. Si amo a Ana pero no a Diana, entonces amo también a Luisa.

3. 0 bien amo a Diana y a Luisa o bien no amo a ninguna.

4 . Si amo a Diana, entonces amo también a Ana.

¿A quién amo?

"p" amo a Ana; "q" amo a Diana; "r" amo a Luisa

1. $p \vee q \vee r$
2. $(p \wedge \neg q) \to r$
3. $(q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
4. $q \to p$

5. $(\neg q \wedge \neg r)$

6.	p	ED (1,5)
7.	$\neg q$	EC (5)
8	$p \wedge \neg q$	IC (6,7)
9.	r	MP (2,8)
10.	$\neg r$	EC (5)
11.	$r \wedge \neg r$	IC (9,10)

12. $\neg(\neg q \wedge \neg r)$ Abs (6-11)

13. $q \wedge r$ ED (5,12)

14. q ED (13)

15. p MP (4,14)

16. $p \wedge q \wedge r$ IC (13,15)

”Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro”.

CÓMO DEMOSTRAR CUALQUIER COSA:

Bertrand Russell estaba tratando sobre los enunciados condicionales y sosteniendo que un enunciado falso implica cualquier cosa, todo. Un filósofo escéptico le preguntó:

- ¿Quiere usted decir que si 2 + 2 = 5, entonces es usted el Papa? Russell contestó afirmativamente y dio la divertida “prueba” que sigue:
  - Si suponemos que 2 + 2 = 5, entonces seguramente estará usted de acuerdo en que si restamos 2 de cada lado de la ecuación, nos da 2 = 3. Invirtiendo los términos, tenemos que 3 = 2 y restando 1 de cada lado, nos da 2 = 1. De modo, que como el Papa y yo somos dos personas, y 2 = 1, entonces el Papa y yo somos uno. Luego, yo soy el Papa.

Un enorme botín ha sido robado de un almacén. El delincuente (o delincuentes) ha(n) transportado los géneros robados en un coche. Tres famosos delincuentes, A, B C, fueron conducidos a Scotland Yard para ser interrogados. Se establecieron los siguientes hechos:

(1) Ninguna otra persona distinta de A, B, C, estaba implicada en el robo.
(2) C no se embarca nunca en un asunto sin utilizar a A (y posiblemente a otros) como cómplice.
(3) B no sabe conducir.

¿Es A inocente o culpable?

1. $b \vee a \vee c$
2. $c \rightarrow a$
3. $b \rightarrow a \vee c$
4. $\neg(c \wedge \neg a)$
6. $\neg c \vee a$
7. $(c \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg a)$
8. $c \vee \neg c$
9. $\neg c$
   10. a ED (5,6)
11. c
   12. a MT (2,9)
   13. a Cas. (8…10)

Empecemos suponiendo que B es inocente. Si B es inocente, es obvio que A y/o C es culpable. Si B es culpable, entonces tiene que haber contado con un cómplice (ya que no sabe conducir), así nuevamente A o C han de ser culpables. Por tanto, A o C (o ambos) son culpables. Si C es inocente, entonces A ha de ser culpable. Por otraa parte, si C es culpable, entonces por (2), A también es culpable. Por consiguiente, A es culpable.

2.- Un robo fue cometido en Londres. La policia atrapó para su interrogatorio a tres delincuentes A, B, C. Ahora bien, sucedía que A y C eran gemelos idénticos y pocas personas podían distinguirlos. Se sabía que los gemelos eran bastante tímidos y nunca se embarcaban en una empresa sin contar con un cómplice. B, por otro lado, era bastante audaz y desdeñaba siempre el utilizar un cómplice. Asímismo, varios testigos manifestaron que en el momento del robo uno de los gemelos fue visto bebiendo en un bar de Dover, aunque no se sabía de cuál de ellos se trataba.
Nuevamente, asumiendo que nadie distinto de A, B, C, estaba implicado en el robo, ¿cuáles son los inocentes y cuáles los culpables?

2.- Supongamos que B era inocente. Entonces uno de los dos gemelos ha de ser culpable. Este gemelo tuvo que haber contado con un cómplice, que no podía ser B; de ahí que tuvo que haber sido el otro gemelo. Pero esto es imposible, puesto que uno de los gemelos estaba en Dover. Por tanto, B es culpable. Y como B trabaja siempre solo, los dos gemelos son inocentes.

3.- El Sr. McGregor, un comerciante londinense, telefoneó a Scotland Yard para decir que su tienda había sido robada. Se capturaron tres sospechosos, A, B, C para su interrogatorio y se establecieron los siguientes hechos:

(1) Cada uno de los tres hombres había estado en la tienda el día del robo, y nadie más había estado en la tienda ese día.
(2) Si A era culpable, entonces tenía un cómplice, y sólo uno.
(3) Si B es inocente, también lo es C.
(4) Si dos y sólo dos, son culpables, entonces A es uno de ellos.
(5) Si C es inocente, también lo es B.

¿A quién inculpó el inspector Craig?

3.- El inspector Craig acusó al Sr. McGregor de mantener falsamente que hubo un robo. Su razonamiento fue el siguiente:

Paso Uno: Supongamos que A fuera culpable. Entonces tenía solamente un cómplice -por (2). Por tanto uno de los dos, B o C, es culpable y el otro inocente. Esto contradice a (3) y a (5), que conjuntamente implican que B y C son o ambos inocentes o ambos culpables. Por lo tanto A debe ser inocente.

Paso Dos: Sabemos que, por (3) y (5), B y C son ambos culpables o ambos inocentes. Si los dos fueran culpables, entonces serían los únicos culpables (puesto que A es inocente). Entonces habría exactamente dos culpables, lo cual, por (4) implicaría que A es culpable. Ello es una contradicción, puesto que A es inocente. Por tanto, B y C son inocentes.

Paso Tres: Queda establecido que A, B y C son inocentes. Como, por (1), nadie distinto de A, B, C, ha estado en la tienda el día del robo, el resultado es que no hubo robo y McGregor estaba mintiendo.

4.- En otro caso, estaban implicados cuatro acusados A, B, C, D, y fueron establecidos los siguientes hechos:

(1) Si tanto A como B son culpables, entonces C era cómplice.
(2) Si A es culpable, entonces al menos uno de los dos, B o C, era cómplice.
(3) Si C es culpable entonces D era cómplice.
(4) Si A es inocente entonces D es culpable.

¿Quienes son definitivamente culpables y cuáles son dudosos?

4.- Supóngase que A es culpable. Entonces, por (2), o B o C son culpables. Si B es inocente, entonces ha de ser C el culpable. Pero supongamos que B es culpable. Entonces A y B son ambos culpables, de ahí que por

(1) C sea culpable también. Esto prueba que si A es culpable, también lo es C. Por tanto, por (3), si C es culpable, también lo es D. Combinando estos dos hechos, vemos que si A es culpable, también lo es D. Pero, por (4), si A es inocente, D también es culpable. Por tanto, con independencia de que A sea culpable o inocente, D tiene que ser culpable. Así D es claramente culpable. Todos los demás son dudosos.

5.- De nuevo tenemos cuatro acusados A, B, C , D. Se establecieron los siguientes hechos:

(1) Si A es culpable, entonces B era cómplice.
(2) Si B es culpable, entonces o bien C era cómplice o bien A es inocente.
(3) Si D es inocente entonces A es culpable y C es inocente.
(4) Si D es culpable, también lo es A.

¿Quiénes son inocentes y quiénes culpables?

5.- La respuesta es que todos son culpables. Por (3), si D es inocente, entonces A es culpable. Por (4), si D es culpable, entonces A es culpable. Así, tanto si D es culpable o inocente, A debe ser culpable. De ahí que, por (1), B sea también culpable. Por tanto, por (2), o C es culpable o A es inocente. Pero sabemos ya que A no es inocente, por consiguiente, C debe ser culpable. Finalmente, por (3), si D es inocente entonces C es inocente. Pero ya se ha probado que C no es inocente, por lo tanto D debe ser culpable. Así todos ellos son culpables.

LA ISLA DE LOS CABALLEROS Y LOS ESCUDEROS

Hay una amplia variedad de acertijos lógicos relativos a una isla en la que ciertos habitantes llamados “caballeros” dicen siempre la verdad, y otros llamados “escuderos” mienten siempre. Se supone que todo habitante de la isla es o caballero o escudero.

1.- Un extranjero se encontró con tres habitantes de la isla - A, B y C. El extranjero le preguntó a A, “¿Eres caballero o escudero?”. A respondió de forma tan confusa, que el extranjero no pudo enterarse de lo que dijo. Entonces el extranjero le preguntó a B, “¿Qué ha dicho A?”. Y B respondió: “A ha dicho que es escudero.” Pero en aquel instante el tercer hombre, C, dijo: “¡No creas a B, que está mintiendo!”. ¿Qué son B y C?

1.- Es imposible que un caballero o un escudero digan: “Yo soy escudero”, porque el caballero mentiría (y los caballeros siempre dicen la verdad) y el escudero estaría diciendo la verdad (y los escuderos mienten siempre). Por lo tanto, A nunca diría que es escudero, de forma que B está mintiendo y, por tanto, es escudero. Puesto que C dijo que B mentía, C dijo la verdad, luego C es caballero.

2.- Supongamos dos habitantes de la isla, A y B. A dice: “Uno al menos de nosotros es escudero.” ¿Qué son A y B?

2.- Supóngase que A fuera escudero y, por tanto, su enunciado fuera falso, de donde se seguiría que ambos serían caballeros, ya que si no hay al menos uno que sea escudero, ambos tienen que ser caballeros. Así, si A fuera escudero, tendría que ser también caballero, lo cual es imposible. Por tanto, A tiene que ser caballero y su enunciado debe ser verdadero; así, al menos uno de ellos es realmente un escudero. Puesto que A es caballero, entonces B tiene que ser escudero.

3.- Supóngase que A dice: “Yo soy escudero, pero B no lo es.” ¿Qué son A y B?

3.- Para empezar, A no puede ser caballero pues entonces su enunciado sería verdadero, en cuyo caso él tendría que ser escudero. Por tanto, A es escudero. De aquí también que su enunciado sea falso. Si B fuera caballero, entonces el enunciado de A sería verdadero. De lo que que se sigue que B también es escudero.

4.- Volvemos a tener tres habitantes, A, B y C, cada uno de los cuales es o caballero o escudero. Se dice que dos personas son del *mismo tipo* si son ambos caballeros o ambos escuderos. A y B dicen lo siguiente:

A: B es un escudero

B: A y C son del mismo tipo

¿Qué es C?

4.- Supóngase que A es caballero. Entonces su afirmación de que B es escudero ha de ser verdadera. De lo que se sigue que la afirmación de B de que A y C son del mismo tipo es falsa, por tanto, A y C son de tipos diferentes y, si A es cabellero, C tiene que ser escudero.
Por otra parte, supóngase que A es escudero. Entonces su afirmación de que B es escudero es falsa, de aquí que B sea caballero. Y de ello se sigue que la afirmación de B de que A y C son del mismo tipo, es verdadera. Lo que significa que C tiene que ser escudero (puesto que A lo es).
En cualquier caso, C es escudero.

5.- Visitando la isla encontramos a dos habitantes recostados al sol. Le preguntamos a uno de ellos si el otro es un caballero, y obtenemos una respuesta del tipo si-o-no. Entonces le preguntamos al segundo si el primero es un caballero. Y obtenemos una respuesta del tipo si-o-no. ¿Son las dos respuestas necesariamente las mismas?

5.- Sí, lo son. Si los dos son caballeros, entonces ambos responderán “Sí”. Si los dos son escuderos, entonces nuevamente ambos responderán “Sí”. Si uno es caballero y el otro escudero, entonces el caballero responderá “No”, y el escudero responderá También “No”.

LOS COFRES DE PORCIA

En *El Mercader de Venecia*, de Shakespeare, Porcia tenía tres cofres - uno de oro, otro de plata y otro de plomo -, dentro de uno de los cuales estaba el retrato de Porcia. El pretendiente tenía que elegir uno de los cofres y si tenía suerte (o inteligencia) elegiría el que tenía el retrato, pudiendo así elegir a Porcia por esposa. En la tapa de cada cofre había una inscripción para ayudar al pretendiente a elegir sabiamente.

1.- Pero supongamos que Porcia quisiera elegir marido, no por su bondad sino por su inteligencia. Tendría las siguientes inscripciones en los cofres:

ORO	PLATA	PLOMO
El retrato está en este cofre	El retrato no está aquí	El retrato no está en el cofre de oro

Porcia explicó al pretendiente que de las tres inscripciones, a lo sumo una era verdad. ¿Qué cofre debe elegir el pretendiente?

2.- Más tarde, Porcia se dio cuenta de que no era tan difícil el problema, de forma que decidió complicarlo un poco. Esta vez en los cofres aparecían las siguientes inscripciones:

ORO	PLATA	PLOMO
El retrato no está en el cofre de plata	El retrato no está en este cofre	El retrato está en este cofre

Porcia explicó al pretendiente que por lo menos una de las tres inscripciones era verdadera y que por lo menos otra, era falsa. ¿En qué cofre estaba el retrato?

3.- Porcia encontró el marido que buscaba y tuvieron una hija, Porcia II, a la que en adelante llamaremos Porcia. Cuando la joven Porcia se convirtió en mujer, también decidió elegir marido por el método del cofre. El pretendiente tendría que pasar dos pruebas. En la primera, las tapas de los cofres tenían dos inscripciones, y Porcia explicó que ninguna de ellas (las tapas) tenía más que una inscripción falsa.

ORO	PLATA	PLOMO
(1)El retrato no está aquí (2)El artista que hizo el retrato es veneciano	(1)El retrato no está en el cofre de oro (2)El artista que hizo el retrato es florentino	(1)El retrato no está aquí (2)El retrato sí que está en el cofre de plata

¿En qué cofre está el retrato?

4.- Si el pretendiente pasaba la primera prueba era conducido a otra habitación en la cual había otros tres cofres, que también tenían dos inscripciones en la tapa. Porcia explicó que en una de las tapas las dos inscripciones eran verdaderas; en otra ambas eraan falsas, y en la terceraa una era verdadera y la otra falsa.

ORO	PLATA	PLOMO

(1)El retrato no está en este cofre (2)Está en el cofre de plata	(1)El retrato no está en el de oro (2)Está en el cofre de plomo	(1)El retrato no está en este cofre (2)Está en el cofre de oro

¿En qué cofre está el retrato?

RESPUESTAS

1.- La inscripción del cofre de oro y la del de plata dicen lo contrario, luego una de las dos debe ser cierta. Si a lo sumo una de las tres inscripciones es verdadera, la del cofre de plata es falsa y por tanto, es éste el que contiene el retrato.

2.- Si el retrato estuviera en el cofre de plomo, las tres inscripciones serían verdaderas, lo que se opone a los datos que nos dan. Si el retrato estuviera en el cofre de plata, las tres inscripciones serían falsas, lo que también es contrario a los datos dados. Así pues, el retrato tiene que estar en el cofre de oro.

3.- De entrada podemos descartar el cofre de plomo porque, si el cofre estuviera en él, sus dos inscripciones serían falsas, de manera que el retrato tiene que estar o en el cofre de oro o en el de plata. La primera inscripción del cofre de oro y la primera del de plata dicen lo mismo, luego ambas serán vardaderas o falsas. Si las dos son falsas, las segundas inscripciones serían verdaderas, pero no pueden serlo porque son contradictorias. Así pues, las primeras inscripciones son las verdaderas, de forma que el retrato no puede estar en el cofre de oro, lo que prueba que está en el de plata.

4.- Si el retrato estuviera en el cofre de oro, éste y el de plata tendrían dos inscripciones falsas cada uno. Si estuviera en el de plata, éste y el de plomo tendrían una inscripción falsa y una verdadera cada uno. De manera que el retrato está en el cofre de plomo.

LOS COFRES DE BELLINI Y CELLINI

Los cofres utilizados por Porcia, estaban fabricados por dos afamados artistas florentinos, Bellini y Cellini. Lo que caracterizaba a los cofres de Bellini era que siempre les ponía una inscripción verdadera. Por el contrario, lo que caracterizaba a los cofres de Cellini es que sus inscripciones siempre eran falsas. Pues bien, uno y otro tuvieron hijos que, como sus padres, se dedicaron a fabricar cofres; continuando con la tradición paterna, los hijos de Bellini sólo pusieron inscripciones verdaderas en sus cofres y los de Cellini sólo inscripciones falsas en los suyos.

1.- Un día encontré un cofre con la siguiente inscripción:

Este cofre no lo ha hecho ningún hijo de Bellini

¿Quién lo había hecho? ¿Bellini, Cellini o alguno de sus respectivos hijos?

Ver la respuesta

2.- Un conocido florentino daba unas fiestas fastuosas cuyo punto cumbre era un juego cuyo premio consistía en una valiosa joya. El tal noble, que conocía la historiaa de Porcia, cogió tres cofres, uno de oro, otro de plataa y otro de plomo y en uno de ellos escondía la joya. Luego explicaba a sus invitados que los cofres los había hecho Bellini o Cellini (pero no sus hijos), y que la primera persona que adivinara en qué cofre estaba la joya y que pudiera demostrar que su adivinación era correcta, obtendría la joya como premio. He aquí las inscripciones:

ORO	PLATA	PLOMO
Si la joya está en el cofre de plata, el cofre de plata será obra de Bellini	Si la joya está en este cofre, el cofre de oro es obra de Cellini	El cofre que de verdad contiene la joya es obra de Cellini

¿En cuál de los tres está la joya?

Ver la respuesta

3.- Nuevamente contando con los hijos de estos fabricantes de cofres, un día me encontré con dos cofres que tenían las siguientes inscripciones:

ORO	PLATA
Estos dos cofres son obra de la familia Cellini	Ninguno de estos dos cofres es obra ni de un hijo de Bellini ni de un hijo de Cellini

¿Quién los había hecho?

Ver la respuesta

4.- En cierta ocasión aparecieron cuatro cofres en Florencia, dos de oro y dos de plata; se sabía que formaban dos juegos, cada uno de ellos compuesto por dos cofres, uno de oro y otro de plata. Pero se habían mezclado y ahora no se sabía qué cofre de oro y qué cofre de plata formaban cada pareja. He aquí las inscripciones de cada uno de ellos:

Cofre A (ORO) El cofre de plata es obra de un Cellini	**Cofre C (PLATA)** El cofre de oro es obra de un Bellini
Cofre B (ORO) El cofre de plata o es obra de un Cellini o los dos cofres son de Bellini	**Cofre D (PLATA)** El cofre de oro es obra de un Bellini y por lo menos uno de estos dos cofres es obra de un hijo o de Bellini o de Cellini

Los problemas planteados son:

(a) ¿A formará pareja con C o con D?
(b) ¿Quién hizo cada uno de los cofres?

Ver la respuesta

RESPUESTAS

1.- Lo hizo Bellini. Si lo hubiera hecho un hijo de Bellini, la inscripción sería falsa lo que es imposible. Si lo hubiera hecho Cellini o un hijo de Cellini, la inscripción sería verdadra, lo que es imposible. Así pues, es obra de Bellini.

Subir

2.- *Primer paso:* Supongamos que el cofre de plomo fuera de Bellini; su inscripción sería verdadera y, por tanto, la joya estaría en un cofre hecho por Cellini, de manera que no puede estar en el de plomo. Por otro lado, si el cofre de plomo fuera de Cellini, su inscripción sería falsa y, por tanto, la joya estaría en un cofre hecho por Bellini, de forma que, de nuevo, no podría estar en el cofre de plomo. Lo que demuestra que la joya no está en el cofre de plomo.
Segundo paso: Supongamos que la joya está en el cofre de plata; primero, supongamos que el cofre de oro es obra de Bellini, luego su inscripción es verdadera y, como la joya está en el cofre de plata (por suposición), el cofre de plata será de Bellini. Y de aquí deducimos que el de oro será de Cellini. De manera que si el de oro es un Bellini, será un Cellini. Esto es una contradicción.
Supongamos entonces que el cofre de oro es un Cellini; su inscripción sería falsa, de lo que se deduce que el cofre de oro es un Bellini. Así pues, si el cofre de oro es un Cellini, es un Bellini, lo cual nuevamente es contradictorio. Esto demuestra que laa joya no puede estar en el cofre de plata.
Si no está en el de plomo y no está en el de plata, tiene que estar en el de oro.

Subir

3.- Está claro que la inscripción del cofre de oro no puede ser verdadera o caeríamos en unaa contradicción. Así pues, el cofre de oro está hecho por alguien de la familia Cellini. Dado que la inscripción es falsa, no es verdad que los dos cofres sean obra de alguien de la familia Cellini, de aquí que el cofre de plata sea de algún Bellini. Por tanto, la inscripción del cofre de plata es verdadera y ni un cofre ni el otro son obra de ningún hijo. De manera que el cofre de oro lo hizo Cellini y el de plata Bellini.

Subir

4.- El cofre A ha de formar pareja con el cofre D, porque se se emparejara con el C caeríamos en la siguiente contradicción:
Supongamos que A se emparejara con C. Supongamos que la inscripción de A es verdadera; la inscripción de C sería falsa. Lo que querría decir que la inscripción de A sería falsa, lo que supone una contradicción. Por otro lado, supongamos que la inscripción de A es falsa; la de C sería verdadera. Lo que quiere decir que la inscripción de A sería

verdadera - de nuevo la contradicción. Así pues, A no forma pareja con C, lo que resuelve la primera parte del problema.
Ahora, consideremos en primer lugar la pareja B-C. Supongamos que la inscripción de C es falsa; B sería obra de alguien de la familia Cellini y, por tanto, su inscripción sería falsa. Esto querría decir que ninguna de las dos alternativas de la inscripción son verdaderas y si la primera es falsa, C es obra de algún Bellini. Luego, si la inscripción de C es falsa, C es obra de algún Bellini, lo que es imposible. Luego la inscripción de C es verdadera. Así pues, la inscripción de B es también verdadera (porque en C dice que B es obra de algún Bellini).
Ahora bien, la primera alternativa de la inscripción de B no puede ser verdadera, luego la segunda lo es. Por tanto, los cofres B y C son ambos Bellinis.
Consideremos ahora la pareja A-D. Supongamos que la inscripción de A sea falsa, luego D sería obra de algún Bellini y, por tanto, su inscripción sería verdadera. Esto querría decir que A lo hizo alguien de la familia Bellini, y así caemos en contradicción. Así pues, la inscripción de A es verdadera, lo que además implica que la inscripción de D es falsa. De aquí que por lo menos una de las dos alternativas sea falsa; la primera es verdadera (dado que la inscripción de A es verdadera), luego la segunda es falsa. Esto quiere decir que ni uno ni otro cofre son obra de ningún hijo de Bellini o de Cellini. Luego A es de Bellini y D es de Cellini.