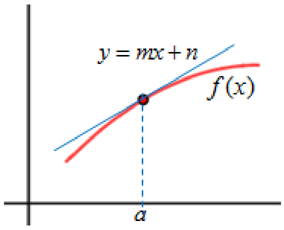
TEMA 10. DERIVADAS

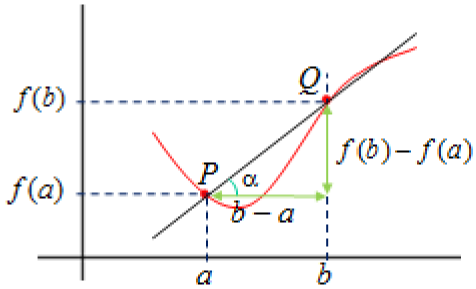
1. DEFINICIÓN DE DERIVADA



La derivada de una función mide el cambio (instantáneo) de esa función en un punto $x = a$. Ese cambio es el mismo que el de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto, que se mide por la pendiente m.
Se justificará en los párrafos que siguen.

Tasa de variación media de una función
La tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es un número que da la inclinación (la pendiente) de la recta que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$. Es el cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable (el cociente de las diferencias). Esto es,

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

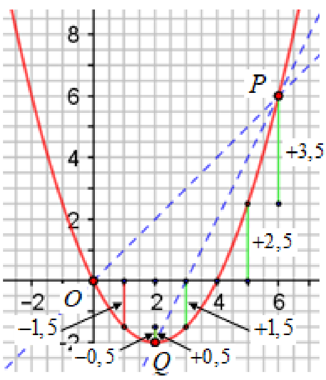


La diferencia $f(b) - f(a)$ da la variación de la función en el intervalo $[a, b]$; al dividir por $b - a$ se halla la variación por unidad.
Observaciones:
1. La TVM coincide con la tangente del ángulo α que da la pendiente de la recta secante a la curva $f(x)$ que pasa por los puntos P y Q de ella.
2. La TVM puede llamarse también velocidad media de cambio, pues la idea de velocidad media en un trayecto expresa bien este concepto. (Otros nombres para designar la TVM son: evolución media, tasa de crecimiento, incremento medio).

Ejemplo:
Las tasas de variación media de la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, en los intervalos [0, 6] y [2, 6], son:

$$TVM[0,\ 6] = \frac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \frac{6 - 0}{6} = 1;$$

$$TVM[2,\ 6] = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{6 - (-2)}{4} = 2.$$



Esos valores coinciden con la pendiente de las rectas que pasan por los puntos O y P, y Q y P, respectivamente.
Observa que en el punto O la curva está decreciendo; en el punto Q toma su valor mínimo; y en el punto P crece a un fuerte ritmo. De nada de eso nos informa la TVM.

- La TVM es una media, lo que significa que no tiene en cuenta el comportamiento de la función a lo largo del intervalo; solo considera los valores inicial y final, dando por supuesto que las diferencias se dan proporcionalmente, siguiendo una línea recta. En el caso de la función de este ejemplo, sus valores en los puntos 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (del intervalo [0, 6]) son 0, –1,5, –2, –1,5, 0, 2,5 y 6, respectivamente. Con diferencias unitarias de –1,5, –0,5, +0,5, +2,5, +3,5. Siendo la media de estas variaciones $TVM[0,\ 6] = \frac{-1,5 - 0,5 + 0,5 + 1,5 + 2,5 + 3,5}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Tasa de variación instantánea de una función

La tasa de variación instantánea de una función $f(x)$ en un punto a es el límite de la TVM en el intervalo $[a, b]$ cuando $b \to a$; o también la TVM en $[a,\ a+h]$, con h muy pequeño; esto es:

$$TVI(a) = \lim_{b\to a}\left(TVM[a,\ b]\right) = \lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{; o también } TVI(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Esta tasa da el crecimiento (o decrecimiento) en un punto: mide el cambio instantáneo. Un ejemplo cotidiano de *TVI* es la velocidad instantánea de un automóvil, la que indica el cuentakilómetros.

Ejemplos:

a) Para la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, la tasa de variación media en el intervalo $[0, h]$ es:

$$TVM\left[0,\ h\right] = \frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{0,5h^2-2h-0}{h} = 0,5h-2.$$

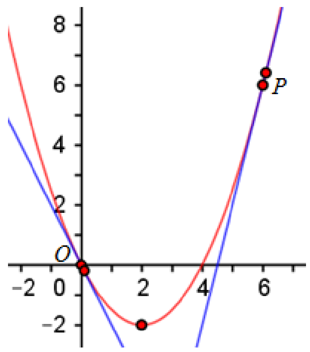
Si $h = 0,2$, $TVM\left[0,\ 0,2\right] = 0,5\cdot 0,2-2 = -1,9$;

si $h = 0,1$, $TVM\left[0,\ 0,1\right] = 0,5\cdot 0,1-2 = -1,95$.

La tasa de variación instantánea en 0 vale –2:

$$TVI(0) = \lim_{h\to 0}\left(0,5h-2\right) = 0,5\cdot 0-2 = -2.$$

(La recta que pasa por dos puntos de f muy próximos a O tiene pendiente muy próxima a –2).



b) Para la misma función, la tasa de variación media en el intervalo $[6, 6 + h]$ es:

$$TVM\left[6,\ 6+h\right] = \frac{f(6+h)-f(6)}{6+h-6} = \frac{\left(0,5h^2+4h+6\right)-6}{h} = \frac{0,5h^2+4h}{h} = 0,5h+4.$$

Si $h = 0,2$, $TVM\left[6,\ 6,2\right] = 0,5\cdot 0,2+4 = 4,1$; si $h = 0,1$, $TVM\left[6,\ 6,1\right] = 0,5\cdot 0,1+4 = 4,05$.

La tasa de variación instantánea en 6 vale 4: $TVI(6) = \lim_{h\to 0}\left(0,5h+4\right) = 0,5\cdot 0+4 = 4$.

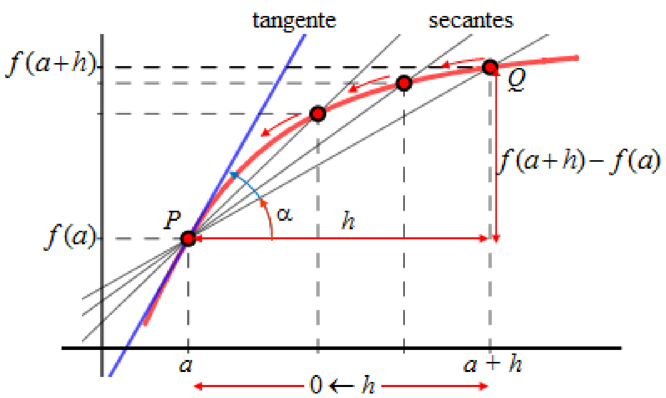
(La recta que pasa por dos puntos de f muy próximos a P tiene pendiente muy próxima a 4).

Derivada de una función en un punto

La tasa de variación instantánea de una función $f(x)$ en un punto a es la derivada de $f(x)$ en ese punto a; se denota por $f'(a)$. Esto es: $TVI(a) = f'(a)$.

Por tanto:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



Aunque ya se ha indicado para la *TVI*, con ayuda de la figura adjunta, puede observarse:

1. La $TVM[a,\ a+h] = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ da la pendiente de la recta secante (la que pasa por los puntos P y Q): $TVM[a,\ a+h] = \tan\alpha$.

2. Al hacer el límite cuando $h \to 0$,

$$\lim_{h\to 0}\left(TVM[a,\ a+h]\right) = f'(a),$$

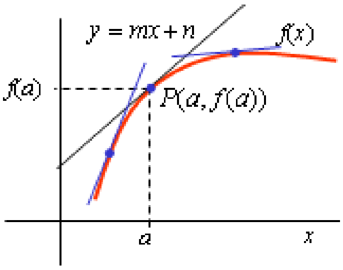
el punto Q se acerca cada vez más a P, y la recta secante pasa cada vez por dos puntos más próximos, hasta confundirse con la recta tangente a la curva en el punto P.

Luego, $f'(a)$ da la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.

Interpretación geométrica de la derivada

La derivada en $x = a$, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.

Como la ecuación de una recta es $y = mx + n$, si se sabe que $m = f'(a)$, y que, además, la recta pasa por $P(a, f(a))$, entonces:



$$y = mx + m \Rightarrow \begin{cases} m = f'(a) \rightarrow y = f'(a) \cdot x + n \\ \text{Pasa por } (a, f(a)) \rightarrow f(a) = f'(a) \cdot a + n \end{cases},$$

Despejando n en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se obtiene la expresión de la recta tangente:

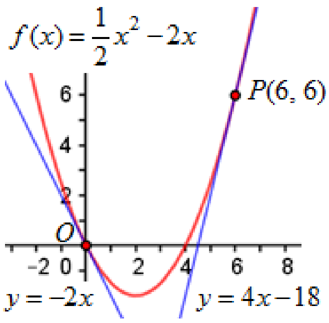
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

<u>Observaciones</u>:

1. La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor aproxima a la curva en ese punto concreto. La derivada indica lo que variaría la función si se comportara linealmente (como la recta tangente) en un entorno de ese punto.
2. La derivada, como la recta tangente, va cambiando según cambia el punto de referencia.
3. Recuerda que la pendiente de una recta indica lo que la recta aumenta (si es positiva) o disminuye (si es negativa) por cada incremento unitario de la variable x.

Ejemplos:

Para la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, estudiada anteriormente:



a) Su derivada en $x = 0$ es:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0{,}5h^2 - 2h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} (0{,}5h - 2) = -2.$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $O(0, 0)$ será:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 0 = -2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -2x.$$

b) Su derivada en $x = 6$ es:

$$f'(6) = \lim_{h \to 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0{,}5h^2 + 4h + 6) - 6}{h} = \lim_{h \to 0} (0{,}5h + 4) = 4.$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(6, 6)$ es:

$$y - f(6) = f'(6) \cdot (x - 6) \Rightarrow y - 6 = 4 \cdot (x - 6) \Rightarrow y = 4x - 18.$$

Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.

Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:

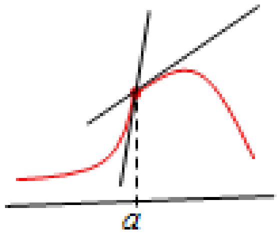
1) Que la función sea continua en dicho punto. (Evidentemente debe estar definida en el punto).

2) Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto. (Esto significa que la recta tangente a la curva en el punto es única).

- Siempre se cumple: "si $f(x)$ es derivable en $x = a$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es continua en $x = a$".

$\rightarrow$ Esta proposición se demuestra en el Problema n. 6.

- En cambio, el recíproco no siempre es cierto:
  "si $f(x)$ es continua en $x = a$ $\not\Rightarrow$ $f(x)$ es derivable en $x = a$".



En la figura adjunta, la recta tangente trazada por la izquierda no coincide con la tangente trazada por la derecha. Esto sucede en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.

Derivadas laterales

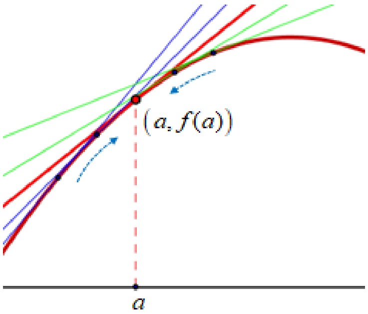
Las derivadas laterales, por la izquierda y por la derecha, se definen como sigue:

Por la <u>izquierda</u>: $f'(a^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $h\to 0^-$ cuando h es pequeño y negativo.

Por la <u>derecha</u>: $f'(a^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; $h\to 0^+$ cuando h es pequeño y positivo.

→ La derivada, $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-)=f'(a^+)$.

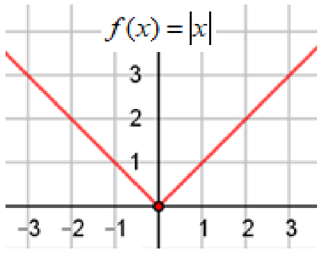
Como ya se ha indicado, esto significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha. (Las tangentes por la izquierda (azules) y las tangentes por la derecha (verdes) tienden a la única tangente (roja)).



- Esta condición es particularmente importante en las funciones definidas a trozos. Para esas funciones resulta obligado estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos. (Véanse los Problemas Propuestos nn 26, 27, 28, 29 y 30).

Ejemplos:

a) La función $f(x)=|x|=f(x)=\begin{cases}-x, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, es continua en x el punto x = 0, pero no es derivable en dicho punto.



La continuidad es inmediata: los límites laterales son iguales.

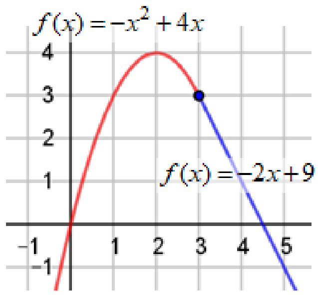
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0;\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x)=0.$$

Para estudiar la derivabilidad se hacen las derivadas laterales.

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1;\ f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1.$$

Las derivadas laterales no valen lo mismo, luego no es derivable en x = 0.

b) La función $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & \text{si } x\leq 3\\ -2x+9, & \text{si } x>3\end{cases}$ es continua y derivable en el punto donde se unen las funciones a trozos, en x = 3. Esto implica que se puede pasar de una función a otra sin cambios bruscos.



Es continua, pues los límites laterales en x = 3 son iguales:

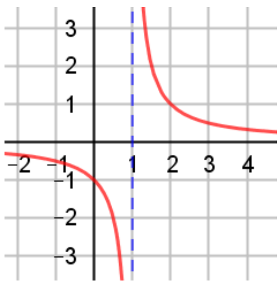
$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-x^2+4x\right)=-9+12=3;$$

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(-2x+9)=-6+9=3.$$

Es derivable, pues las derivadas laterales en x = 3 son iguales:

Por la izquierda: $f'(3^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-(3+h)^2+4(3+h)-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h^2-2h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(-h-2)=-2$.

Por la derecha: $f'(3^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-2(3+h)+9-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-2h}{h}=-2$.



c) La función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ no es derivable en x = 1, pues no está definida en ese punto. En ese punto no se puede trazar la tangente a la curva; en cualquier otro punto, sí.

2. FUNCIÓN DERIVADA

Para la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$, vista anteriormente, al hallar $f'(0)$ y $f'(6)$ se ha repetido el límite $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, en un caso para a = 0; en el otro, para a = 6.
Este proceso de repetición no es necesario, pues existen fórmulas generales que dan la derivada para las funciones usuales. Esto es lo que proporciona la función derivada.

- La función derivada de $f(x)$ es una nueva función (que se expresa mediante otra fórmula) y que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f'(x)$.

Su definición es la siguiente:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si $y=f(x)$, su derivada se escribe $y'=f'(x)$.

→ Otras maneras de escribir son: $f'(x)=\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}$ o $f'(x)=D\left(f(x)\right)=\left(f(x)\right)'$.

(La letra que designa la función es lo de menos, puede emplearse $g(x)$, $F(x)$, …).

- La fórmula de la función derivada se obtiene como sigue:

1) Se halla $f(x+h)$ y la diferencia $f(x+h)-f(x)$;

2) Se halla el cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; 3) Se resuelve el límite, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Los cálculos anteriores, al ser genéricos (pues deben hacerse en función de x y h), pueden resultar complicados a este nivel; por eso se darán directamente, sin demostrarlos, con la salvedad del ejemplo que sigue y algún apunte más en Problemas Propuestos: en los números 3, 5, 9, 18 y 23.

Ejemplo:

La función derivada de $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ puede obtenerse así:

1) Se calcula $f(x+h)$: $f(x+h)=\frac{1}{2}(x+h)^2-2(x+h)=\frac{1}{2}\left(x^2+2xh+h^2\right)-2x-2h$.

Se halla la diferencia $f(x+h)-f(x)$:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+2xh+h^2\right)-2x-2h-\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)=\frac{1}{2}h^2+xh-2h.$$

2) Se forma el cociente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{2}h^2+xh-2h}{h}=\frac{\left(\frac{1}{2}h+x-2\right)h}{h}=\left(\frac{1}{2}h+x-2\right).$$

3) Se resuelve el límite:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h+x-2\right)=\frac{1}{2}\cdot 0+x-2=x-2.$$

Por tanto, la función derivada de $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ es $f'(x)=x-2$.

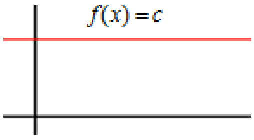
Si ahora se desea hallar la derivada en cualquier punto, basta con sustituir en $f'(x)=x-2$.
Así:

$$f'(0)=0-2=-2;\ f'(1)=1-2=-1;\ f'(2)=2-2=0;\ f'(4)=4-2=2;\ f'(6)=6-2=4.$$

Derivada de un polinomio

Los polinomios son las funciones que se presentan con más frecuencia. La derivada de un polinomio es la suma o resta de las derivadas de cada uno de sus términos. Teniendo en cuenta que:

1. La derivada de un número es 0



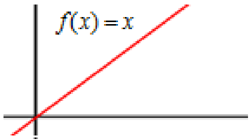
Si $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$.

Recuerda que la derivada mide la tasa de cambio de una función: un número, una constante, no varía; su tasa de cambio es 0.

→ Geométricamente: la tasa de variación (la pendiente) de la recta *y* = *c* es 0.

Por ejemplo: si $f(x)=5 \Rightarrow f'(x)=0$; si $g(x)=-2/3 \Rightarrow g'(x)=0$.

2. La derivada de *y* = *x* vale 1



Si $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$.

La tasa de variación de $f(x)=x$ es la pendiente de esa recta, que vale 1.

→ De manera análoga, como la pendiente de la recta $y=mx$ vale *m*, la derivada de $f(x)=mx$ será $f'(x)=m$.

Por ejemplo: si $f(x)=4x \Rightarrow f'(x)=4$; si $h(x)=-0,5x \Rightarrow h'(x)=-0,5$.

3. La derivada de $y = x^2$ es $y' = 2x$

Si $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$.

En este caso, el proceso es:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

4. La derivada de $y = x^n$ es $y' = nx^{n-1}$

Si $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$.

- Esta regla es válida para cualquier valor de *n*, positivo, negativo o fraccionario. (Su demostración se propone en el Problema n. 5).

Además, si la potencia se multiplica por un número: $f(x)=k\cdot x^n \Rightarrow f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)' = k\cdot nx^{n-1}$.

Ejemplos:

a) Si $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$.

b) Si $f(x)=7x^4 \Rightarrow f'(x)=7\cdot\left(4x^3\right)=28x^3$.

c) Si $y=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$.

d) Si $y=-3x^5 \Rightarrow y'=-3\cdot\left(5x^4\right)=-15x^4$.

5. Derivada de un polinomio

Si $\underline{f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0} \Rightarrow$

$f'(x)=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+...+a_2\left(x^2\right)'+a_1(x)'+0$ → (la derivada de a_0 es 0) ⇒

$\underline{f'(x)=a_n\cdot nx^{n-1}+a_{n-1}\cdot(n-1)x^{n-2}+...+a_2\cdot 2x+a_1}$.

Ejemplos:

a) $f(x)=7x^4-5x^3+x^2-6x+2 \Rightarrow f'(x)=7\cdot 4x^3-5\cdot 3x^2+2x-6 \Rightarrow f'(x)=28x^3-15x^2+2x-6$.

b) Si $y=\frac{x^3}{2}-\frac{4x^2}{5}-7x+\frac{3}{5} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^3-\frac{4}{5}x^2-7x+\frac{3}{5} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot\left(3x^2\right)-\frac{4}{5}\cdot(2x)-7=\frac{3x^2}{2}-\frac{8x}{5}-7$.

3. FÓRMULA DE LA DERIVADA DE OTRAS FUNCIONES

1. Función raíz cuadrada

La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Esta fórmula puede deducirse teniendo en cuenta que $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ y derivando esta expresión como una potencia $\left(f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}\right)$. Así:

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

→ La misma técnica puede aplicarse para calcular la derivada de la raíz de cualquier índice. Así, para $f(x)=\sqrt[3]{x}$, puede seguirse el proceso:

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \to f(x)=x^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{1/3-1}=\frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{2/3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Función exponencial

- Exponencial de base *a*: la derivada de $f(x)=a^x$ es $f'(x)=\left(a^x\right)'=a^x\ln a$.
- Exponencial de base *e*: la derivada de $f(x)=e^x$ es $f'(x)=\left(e^x\right)'=e^x$.

→ Para determinar la función derivada de $f'(x)=e^x$ debe hacerse el límite:

$$f'(x)=\left(e^x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h}=\left(\lim_{h\to 0}e^x\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right)=e^x\cdot 1 \Rightarrow f'(x)=e^x.$$

El primer límite no depende de *h*; por eso, $\lim_{h\to 0}e^x=e^x$.

El segundo límite, que es una forma indeterminada, $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\left[\frac{e^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\right]$, puede *deducirse* con ayuda de la calculadora. Por ejemplo, si *h* = 0,1, 0,01 o 0,001, los valores de $\frac{e^h-1}{h}$ son 1,0517, 1,0050 y 1,0010, respectivamente: su valor tiende a 1. Luego , $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$.

3. Función logarítmica

- Logaritmo en base *a*: la derivada de $f(x)=\log_a x$ es $f'(x)=\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e$.
- Logaritmo en base *e*: la derivada de $f(x)=\ln x$ es $f'(x)=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$.

4. Funciones seno y coseno

- Función seno: la derivada de $f(x)=\sin x$ es $f'(x)=\left(\sin x\right)'=\cos x$.

→ En el Problema n. 23 se propone la demostración de este resultado.

- Función coseno: la derivada de $f(x)=\cos x$ es $f'(x)=\left(\cos x\right)'=-\sin x$.
- Función tangente: la derivada de $f(x)=\tan x$ es $f'(x)=\left(\tan x\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

4. REGLAS DE DERIVACIÓN Y OPERACIONES CON FUNCIONES

Al derivar un polinomio se han utilizado dos de las propiedades fundamentales. A saber:

1) $f(x)=k\cdot x^n \Rightarrow f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)'=k\cdot nx^{n-1}$.

2) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots \Rightarrow f'(x)=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+\ldots$.

Estas propiedades, que valen para cualquier tipo de función, se formulan como sigue.

1. Derivada de una constante por una función

$$F(x)=k\cdot f(x) \rightarrow \left(F(x)\right)'=\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $y=2\cdot 3^x \Rightarrow y'=2\cdot\left(3^x\right)' \Rightarrow y'=2\cdot 3^x\cdot\log_3 2$. b) Si $y=5\cdot e^x \Rightarrow y'=5\cdot e^x$.

c) Si $y=3\sin x \Rightarrow y'=3\cdot(\sin x)'=3\cdot\cos x$. d) Si $y=-2\ln x \Rightarrow y'=-2\cdot(\ln x)'=-2\cdot\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}$.

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones

$$F(x)=f(x)\pm g(x) \rightarrow \left(F(x)\right)'=\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$$

Ejemplo:

Si $y=-3x^2+4\sin x-\frac{1}{2}\cos x \Rightarrow y'=-3\left(x^2\right)'+4(\sin x)'-\frac{1}{2}(\cos x)' \Rightarrow$

$$y'=-3(2x)+4(\cos x)-\frac{1}{2}(-\sin x) \Rightarrow y'=-6x+4\cos x+\frac{1}{2}\sin x.$$

3. Derivada de un producto de funciones

$$F(x)=(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \rightarrow \left(F(x)\right)'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ejemplo:

Si $f(x)=2x^2-3x$ y $g(x)=3x^4+2x-7$, la derivada de su producto, $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$, puede hacerse de dos formas:

1) Aplicando la fórmula:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\left(\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)\right)'=\left(2x^2-3x\right)'\cdot\left(3x^4+2x-7\right)+\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)'$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=(4x-3)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)+\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(12x^3+2\right)=$$

$$=\left(12x^5-9x^4+8x^2-6x-28x+21\right)+\left(24x^5-36x^4+4x^2-6x\right)=36x^5-45x^4+12x^2-40x+21.$$

2) Multiplicando antes las funciones y derivando después:

$$f(x)\cdot g(x)=\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)=6x^6-9x^5+4x^3-20x^2+21x \Rightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=6\cdot\left(6x^5\right)-9\left(5x^4\right)+4\left(3x^2\right)-20(2x)+21=36x^5-45x^4+12x^2-40x+21.$$

Naturalmente, el resultado es el mismo.

4. Derivada de un cociente de funciones

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \to (F(x))'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplos:

a) Si $y=\dfrac{3x^2-2x}{4x-5} \Rightarrow y'=\dfrac{\left(3x^2-2x\right)'\cdot(4x-5)-\left(3x-2x\right)\cdot(4x-5)'}{(4x-5)^2} \Rightarrow$

$$y'=\frac{(6x-2)\cdot(4x-5)-\left(3x^2-2x\right)\cdot 4}{(4x-5)^2} \Rightarrow y'=\frac{\left(24x^2-8x-30x+10\right)-\left(12x-8x\right)}{(4x-5)^2} \Rightarrow$$

$y'=\dfrac{12x^2-30x+10}{(4x-5)^2}$. (El denominador no suele operarse: ya está simplificado).

b) La derivada de la función tangente puede obtenerse teniendo en cuenta que $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; por tanto, derivando como un cociente:

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

Recuerda: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; $\sin^2 x=(\sin x)^2$ y $\cos^2 x=(\cos x)^2$.

5. Derivada de la opuesta de una función

$$F(x)=\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)} \to (F(x))'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Es un caso particular de la derivada de un cociente:

$$(F(x))'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{(1)'\cdot f(x)-(1)\cdot f'(x)}{(f(x))^2}=\frac{0\cdot f(x)-f'(x)}{(f(x))^2}=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Ejemplos:

a) Para la función $f(x)=4x^2-5x+1$ se tendrá:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{4x^2-5x+1}\right)'=\frac{-\left(4x^2-5x+1\right)'}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-(8x-5)}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-8x+5}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}.$$

Evidentemente, esta función también se podría derivar como un cociente. Así:

$$F(x)=\frac{1}{4x^2-5x+1} \Rightarrow F'(x)=\frac{0\cdot\left(4x^2-5x+1\right)-1\cdot(8x-5)}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-(8x-5)}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}.$$

b) La derivada de la cosecante: $f(x)=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$, será: $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=\dfrac{-(\sin x)'}{(\sin x)^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$.

Análogo procedimiento puede seguirse para obtener la derivada de la secante y de la cotangente.

Derivada de la función compuesta (regla de la cadena)
Esta propiedad es fundamental, pues se utiliza cuando la función *f* no se aplica solo a *x* sino a otra función *g*(*x*).

$$F(x) = f(g(x)) \to \left(F(x)\right)' = \left(f(g(x)\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

→ Aplicada a las funciones estudiadas aquí se tendrá:

1. <u>Para potencias y raíces</u>

- Potencia de una función: la derivada de $y = \left(f(x)\right)^n$ es $y' = n\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x)$, para todo *n*.
- Raíz de una función (caso $n = \frac{1}{2}$): la derivada de $y = \sqrt{f(x)}$ es $y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Ejemplos:

a) Si $F(x) = \left(2x^4 - 5x^2 + 3\right)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(x) = 3\left(2x^4 - 5x^2 + 3\right)^{3-1}\cdot\left(2x^4 - 5x^2 + 3\right)' = 3\left(2x^4 - 5x^2 + 3\right)^2\cdot\left(8x^3 - 10x\right).$$

b) Si $F(x) = \sqrt{5x^3 - x^2 + 1} \Rightarrow F'(x) = \dfrac{\left(5x^3 - x^2 + 1\right)'}{2\sqrt{5x^3 - x^2 + 1}} = \dfrac{15x^2 - 2x}{2\sqrt{5x^3 - x^2 + 1}}$.

c) Si $F(x) = \left(e^x\right)^3 \Rightarrow F'(x) = 3\left(e^x\right)^{3-1}\cdot\left(e^x\right)' = 3\left(e^x\right)^2\cdot e^x$. (Operando: $F'(x) = 3\left(e^{2x}\right)\cdot e^x = 3\cdot e^{3x}$).

d) Si $F(x) = \left(\log x\right)^2 \Rightarrow F'(x) = 2\left(\log x\right)^{2-1}\cdot\left(\log x\right)' = 2\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x}\log e$.

e) Si $F(x) = \left(\sin x\right)^4 \Rightarrow F'(x) = 4\left(\sin x\right)^{4-1}\cdot\left(\sin x\right)' = 4\left(\sin x\right)^3\cdot\left(\cos x\right)$.

2. <u>Para funciones exponenciales</u>

- Exponencial de base *a*: $F(x) = a^{f(x)}$, $a > 0 \Rightarrow F'(x) = f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$.
- Exponencial de base *e*: $F(x) = e^{f(x)} \Rightarrow F'(x) = f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

Ejemplos:

a) Si $y = 10^{2x+5} \Rightarrow y' = \left(2x+5\right)'\cdot 10^{2x+5}\cdot\ln 10 \Rightarrow y' = 2\cdot 10^{2x+5}\cdot\ln 10$.

b) Si $y = e^{3x} \Rightarrow y' = \left(3x\right)'\cdot e^{3x} = 3\cdot e^{3x}$. c) $y = e^{x^2-x} \Rightarrow y' = \left(x^2 - x\right)'\cdot e^{x^2-x} = \left(2x-1\right)\cdot e^{x^2-x}$.

3. <u>Para funciones logarítmicas</u>

- Logaritmo en base *a*: $F(x) = \log_a\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$.
- Logaritmo neperiano: $F(x) = \ln\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y = \log\left(7x+2\right) \Rightarrow y' = \dfrac{7}{7x+2}\log e$. b) $y = \log\left(3x^2 - 5x\right) \Rightarrow y' = \dfrac{6x-5}{3x^2 - 5x}\log e$.

c) $y = \ln\left(5x^3\right) \Rightarrow y' = \dfrac{\left(5x^3\right)'}{5x^3} = \dfrac{15x^2}{5x^3} = \dfrac{3}{x}$. d) $y = \ln\left(3x^3 - 4x^2 - 5\right) \Rightarrow y' = \dfrac{9x^2 - 8x}{3x^3 - 4x^2 - 5}$.

4. Para funciones trigonométricas

- Función seno: $F(x)=\sin\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot\cos\left(f(x)\right)$.
- Función coseno: $F(x)=\cos\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=-f'(x)\cdot\sin\left(f(x)\right)$.
- Función tangente: $F(x)=\tan\left(f(x)\right) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{\cos^2\left(f(x)\right)}=f'(x)\left(1+\tan^2\left(f(x)\right)\right)$.

Ejemplos:

a) $f(x)=\sin\left(4x^2-x\right) \Rightarrow f'(x)=\left(4x^2-x\right)'\cdot\cos\left(4x^2-x\right)=(8x-1)\cdot\cos\left(4x^2-x\right)$.

b) $f(x)=\cos(2x) \Rightarrow f'(x)=-(2x)'\cdot\sin(2x)=-2\cdot\sin(2x)$ → No confundir con:

c) $f(x)=2\cos x \Rightarrow f'(x)=2(\cos x)'=2\cdot(-\sin x)=-2\sin x$.

d) $y=\tan(7x) \Rightarrow y'=7\cdot\left(1+\tan^2(7x)\right)$.

5. TABLA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES USUALES

Resumiendo todo lo anterior puede formarse la siguiente tabla. En ella: *c, n, a* y *e* son números; *x* designa la variable independiente e *y* o *f* representan funciones de *x*.

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS			
Función simple	**Derivada**	**Función compuesta**	**Derivada**
$y=c$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^n,\ \forall\, n\in\mathbf{R}$	$y'=nx^{n-1}$	$y=\left(f(x)\right)^n,\ \forall\, n$	$y'=n\left(f(x)\right)^{n-1}f'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=a^x,\ a>0$	$y'=a^x\ln a$	$y=a^{f(x)},\ a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\sin f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$y=\cos f(x)$	$y'=-f'(x)\cdot\sin f(x)$
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y=\tan f(x)$	$y'=f'(x)\left(1+\tan^2 f(x)\right)$

* La derivada de las funciones trigonométricas inversas se estudiará en Matemáticas II.

Derivadas sucesivas

A la función derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda; se escribe $f''(x)$. De manera análoga se puede definir la derivada tercera: $f'''(x)$, que es la derivada de la derivada segunda…

A la derivada de orden *n* se le llama derivada *n*–ésima; y se escribe $f^{n)}(x)$.

Ejemplo:

Si $f(x)=-x^2+4x \Rightarrow f'(x)=-2x+4$. La derivada segunda es $f''(x)=-2$.

6. EJERCICIOS DE DERIVADAS

Para practicar te sugiero que hagas los siguientes ejercicios. No te limites a leer lo que aquí se indica, hazlos por tu cuenta.

1. $f(x)=4x^3-5x^2-3x+6 \Rightarrow f'(x)=12x^2-10x-3$.
Su derivada segunda es $f''(x)=24x-10$. Su derivada tercera es $f'''(x)=24$

2. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+3x-5 \Rightarrow f'(x)=2x^2-\frac{1}{2}x+3 \rightarrow f''(x)=4x-\frac{1}{2}$.

3. $y=\frac{3x^4-3x}{4} \Rightarrow y'=\frac{12x^3-3}{4}=3x^3-\frac{3}{4}$. Su derivada segunda es $f''(x)=9x^2$.

4. $y=\frac{5}{3}\left(x^3+3x^2-3x\right) \Rightarrow y'=\frac{5}{3}\left(3x^2+6x-3\right)=5x^2+10x-5$.

5. $y=\left(x^2-3x\right)\left(2x^3+5\right) \Rightarrow y'=(2x-3)\cdot\left(2x^3+5\right)+\left(x^2-3x\right)\cdot\left(6x^2\right) = 10x^4-24x^3+10x-15$.

6. $y=5\left(6x^2-4x+2\right)^3 \Rightarrow y'=5\cdot3\cdot\left(6x^2-4x+2\right)^2\cdot(12x-4)=15\cdot\left(6x^2-4x+2\right)^2\cdot(12x-4)$.

7. $y=\frac{2x-3}{5x} \Rightarrow y'=\frac{2\cdot5x-(2x-3)\cdot5}{(5x)^2}=\frac{15}{25x^2}=\frac{3}{5x^2}$. Derivada segunda: $y''=\frac{-3\cdot10x}{\left(5x^2\right)^2}=\frac{-6}{5x^3}$.

8. $y=\frac{3x^2-2x+1}{5x^3} \Rightarrow y'=\frac{(6x-2)\cdot5x^3-\left(3x^2-2x+1\right)\cdot15x^2}{\left(5x^3\right)^2}=\frac{-15x^4+20x^3-15x^2}{25x^6}=\frac{-3x^2+4x-3}{5x^4}$.

9. $y=\sqrt{3x^2+5x} \Rightarrow y'=\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x}}$.

10. $f(x)=x\sqrt{x^2-3} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{x^2-3}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}=\sqrt{x^2-3}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x^2-3}{\sqrt{x^2-3}}$.

$\rightarrow$ Si se introduce x en el radical: $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2}}=\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2}}=\frac{2x^2-3}{\sqrt{x^2-3}}$.

11. $f(x)=3^{5x-3x^2} \Rightarrow f(x)=(5-6x)\cdot3^{5x-3x^2}\cdot\ln 3$.

12. $f(x)=x^2e^{-x} \Rightarrow f'(x)=\left(x^2\right)'\cdot e^{-x}+x^2\cdot\left(e^{-x}\right)' \Rightarrow f'(x)=2xe^{-x}+x^2\cdot\left(-e^{-x}\right)=\left(2x-x^2\right)e^{-x}$.

La derivada segunda será: $f''(x)=\left(2x-x^2\right)'\cdot e^{-x}+\left(2x-x^2\right)\cdot\left(e^{-x}\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)=(2-2x)\cdot e^{-x}+\left(2x-x^2\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)=\left(2-4x+x^2\right)\cdot e^{-x}$.

13. $y=\dfrac{3e^{x}}{2x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{\left(3e\ \right)'\cdot(2x+1)-3e^{x}\cdot(2x+1)'}{(2x+1)^{2}} \Rightarrow y'=\dfrac{3e^{x}(2x+1)-3e^{x}\cdot 2}{(2x+1)^{2}}=\dfrac{(6x-3)e^{x}}{(2x+1)^{2}}$.

14. $y=\log\left(3x^{2}+4\right) \Rightarrow y'=\dfrac{6x}{3x^{2}+4}\log e$.

15. $y=\log(3x+4)^{2} \Rightarrow y=2\log(3x+4) \Rightarrow y'=2\cdot\dfrac{3}{3x+4}\log e=\dfrac{6}{3x+4}\log e$.

16. $y=\log\left(\dfrac{3x}{x^{2}+1}\right) \Rightarrow y=\log(3x)-\log\left(x^{2}+1\right) \Rightarrow y'=\dfrac{3}{3x}\log e-\dfrac{2x}{x^{2}+1}\log e=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{x^{2}+1}\right)\log e$.

$\rightarrow$ En los dos ejercicios anteriores se han aplicado propiedades de los logaritmos.

17. $y=\ln\left(\dfrac{x^{3}-2x}{x^{2}+1}\right) \Rightarrow y'=\dfrac{1}{\dfrac{x^{3}-2x}{x^{2}+1}}\left(\dfrac{x^{3}-2x}{x^{2}+1}\right)'=\dfrac{x^{2}\ \ 1}{x^{3}-2x}\cdot\dfrac{\left(3x^{2}-2\right)\cdot\left(x^{2}+1\right)-\left(x^{3}-2x\right)\cdot 2x}{\left(x^{2}+1\right)^{2}} \Rightarrow$

$y'=\dfrac{x^{4}+5x\ \ -2}{\left(x^{3}-2x\right)\left(x^{2}+1\right)^{2}}$ $\rightarrow$ (Aplicando propiedades de los logaritmos se hace más rápido).

18. $y=\dfrac{1}{x}-\ln(x+3) \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{1}{x+3}$.

19. $y=\sin\left(x^{3}\right) \Rightarrow y=\left(\cos\left(x^{3}\right)\right)\cdot\left(x^{3}\right)'=3x^{2}\cdot\cos\left(x^{3}\right)$.

20. Derivada de la secante: $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow f'(x)=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{-(\cos x)'}{(\cos x)^{2}}=\dfrac{\sin x}{\cos^{2}x}$.

21. $y=\left(\cos\left(x^{2}+2x\right)\right)^{3} \Rightarrow y'=3\cdot\left(\cos\left(x^{2}+2x\right)\right)^{2}\cdot\left(\cos\left(x^{2}+2x\right)\right)' \Rightarrow$

$y'=3\cdot\left(\cos\left(x^{2}+2x\right)\right)^{2}\cdot\left(-\sin\left(x^{2}+2x\right)\right)\cdot\left(x^{2}+2x\right)'=3\cdot\left(\cos\left(x^{2}+2x\right)\right)^{2}\cdot\left(-\sin\left(x^{2}+2x\right)\right)\cdot(2x+2)$.

22. $y=3\tan x \Rightarrow y'=3\left(1+\tan^{2}x\right)=\dfrac{3}{\cos^{2}x}$.

23. Derivada de la cotangente:

$f(x)=\text{cotan}\, x=\dfrac{1}{\tan x} \Rightarrow f'(x)=\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)'=\dfrac{-(\tan x)'}{(\tan x)^{2}}=\dfrac{-1-\tan^{2}x}{\tan^{2}x}=-1-\text{cotan}^{2}x$.

24. $y=\tan\left(3x^{2}+4x\right) \Rightarrow y'=\left(1+\tan^{2}\left(3x^{2}+4x\right)\right)\cdot\left(3x^{2}+4x\right)'=\left(1+\tan^{2}\left(3x^{2}+4x\right)\right)\cdot(6x+4)$.

25. $f(x)=\ln(\sin x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\text{cotan}\, x$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La valoración (en euros) de las acciones en bolsa (IBEX 35) de Iberdrola en la semana del 24 al 28 de marzo de 2020 se indican en la tabla:

Fecha	24/02/2020	25/02/2020	26/02/2020	27/02/2020	28/02/2020
Apertura	11,180	10,930	10,660	11,205	10,770
Cierre	10,930 ↓	10,660 ↓	11,205 ↑	10,770 ↓	10,320 ↓

Fuente: www.expansion.com

a) Haz un esquema gráfico de la variación diaria en el periodo considerado.
b) Halla la tasa de variación diaria (en porcentajes) y la variación media en esa semana.

2. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3].
Utilizando la derivada, halla la tasa de variación instantánea de esa función en los puntos −1, 1 y 3. ¿Cuál es el significado del valor de la derivada en esos puntos?

3. Comprueba que la tasa de variación media de la función $f(x)=2x-3$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3] siempre vale 2. ¿Es una coincidencia dicho resultado? Justifica tu respuesta.

4. Dada la función $f(x)=-x^2+4x$, se pide:
a) Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula el valor de $f'(3)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

5. (Optativo). Utilizando la definición de derivada demuestra que la función derivada de $y=f(x)=x^n$ es $f'(x)=nx^{n-1}$.

6. (Optativo). Demuestra que si una función es derivable en $x = a$, entonces es continua en a.

7. Para la función $f(x)=x^2+2x$, se pide:
a) Su derivada y el valor de $f'(-2)$, $f'(-1)$ y $f'(0)$.
b) La ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos de abscisa −2, −1, 0.
c) Explica gráficamente el resultado de $f'(-1)$.

8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:
a) $f(x)=-x^2+4x$ en el punto $x = 1$.
b) $f(x)=x^2-x$ en el punto $x = 2$.
Representa gráficamente la curva y la recta tangente.

9. a) Aplicando la definición de derivada (paso a paso) halla $f'(2)$, siendo $f(x)=\frac{4}{x}$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.
Haz una representación gráfica de la función y la tangente.

10. Halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2-x+4$ es paralela a la recta de ecuación $y=3x-4$.

11. Halla las tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta de ecuación $2x+y=3$.

12. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x-2$; b) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+7x^2-4x+5$; c) $f(x)=\dfrac{2}{5}x^5-4x^2+7$;

13. Para la función $h(x)=\left(x^2-3x\right)^2\cdot(2x-3)$ halla su derivada:

1.º Aplicando la fórmula de la derivada de un producto.
2.º Multiplicando la expresión y derivando después.
En los dos casos expresa el resultado como un polinomio ordenado.

14. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x)=\left(4x^2-3x\right)\cdot(7x-2)$; b) $g(x)=\left(3x^2-2x\right)^3$; c) $g(x)=4x\cdot(7x-2)^2$.

15. Halla la derivada de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{3x-2}$; d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x+3}$; f) $f(x)=\dfrac{4x+2}{5x^2-3x}$; g) $f(x)=\dfrac{4x^3}{5x^2-4x}$; h) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-3}$.

16. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3\sqrt{x}$; b) $f(x)=\sqrt{5x-3}$; c) $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$; d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$.

17. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante. Indica los puntos en los que la derivada vale 0.

a) $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$; c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; d) $f(x)=\sqrt[3]{8-x^2}$.

18. a) Aplicando la definición de derivada (paso a paso) halla $f'(3)$, siendo $f(x)=\sqrt{x+1}$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.
Haz una representación gráfica de la función y la tangente.

19. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3^{2x}$; b) $f(x)=e^{5x}$; c) $f(x)=e^{-3x^2+2x}$; d) $f(x)=x\cdot e^x$.

20. Haz la derivada de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante.

a) $f(x)=e^{4x-5x^2}$; b) $f(x)=xe^{-x^2}$; c) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$; d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$.

21. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(2x)$; b) $f(x)=\log\left(x^3\right)$; c) $f(x)=\ln\left(5x^2+1\right)$; d) $f(x)=x\cdot\ln x$.

22. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante:

a) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; b) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$; c) $f(x)=x(\ln(x))^2$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(3x^2+1\right)$.

23. (Optativo). Utilizando la definición de derivada obtén la función derivada de $f(x)=\sin x$.

24. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sin(3-2x)$; b) $f(x)=\sin\left(x^3\right)$; c) $f(x)=(\sin x)^3$; d) $f(x)=3x\cdot(\sin x)$;

e) $f(x)=\cos(3-2x)$; f) $f(x)=\cos^2 x$; g) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2}$.

25. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\tan\left(x^2\right)$; b) $f(x)=(\tan x)^2$; c) $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$; d) $f(x)=3x\cdot(\tan x)$;

26. Comprueba si las siguientes funciones son derivables en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Si no lo son, indica el motivo. A partir de la función derivada, halla, si existe, el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1$, 0, 1, 2 y 3.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x\le 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

Haz la representación gráfica de cada función y confirma el resultado.

27. Halla el valor que debe tomar a para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-a & x\ge 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$.
¿La función obtenida será derivable en $x = 1$?

28. ¿Existe algún valor del parámetro a que haga que la función $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax^2+x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ sea derivable en $x = 1$?

29. ¿Existe algún valor del parámetro a que haga que la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ sea derivable en $x = 1$?

30. Calcula, si existen, los valores de a y b para que $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9, & \text{si } x>2 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**.