

# TEMA 15. LÍMITES Y CONTINUIDAD

## 1. IDEA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Cuando se representa gráficamente una función  $y = f(x)$ , la variable independiente  $x$  se representa en el eje horizontal, eje  $OX$ ; la variable dependiente  $y$ , en el eje vertical  $OY$ .

### Tendencias

- Decir que  $x$  tiende a  $a$  (se escribe  $x \rightarrow a$ ), significa que  $x$  toma valores próximos a  $a$ , menores o mayores que  $a$ , pero cercanos (tan próximos como se quiera). Por ejemplo,  $x \rightarrow 2$  significa que  $x$  toma valores como los siguientes:

$x = 1,9; x = 1,99; x = 1,999; \dots$  (en este caso  $x \rightarrow 2$  por la izquierda; se escribe  $x \rightarrow 2^-$ );  
o bien,

$x = 2,1; x = 2,01; x = 2,001; \dots$  (en este caso  $x \rightarrow 2$  por la derecha:  $x \rightarrow 2^+$ )

- Decir que  $f(x)$  tiende a  $l$ , y se escribe  $f(x) \rightarrow l$ , significa que  $f(x)$  toma valores próximos a  $l$ , menores o mayores que  $l$ , pero muy próximos.

### Ejemplo:

Si se considera la función  $f(x) = x^2 - 3$ , puede verse que si  $x \rightarrow 2$ , entonces  $f(x) \rightarrow 1$ .

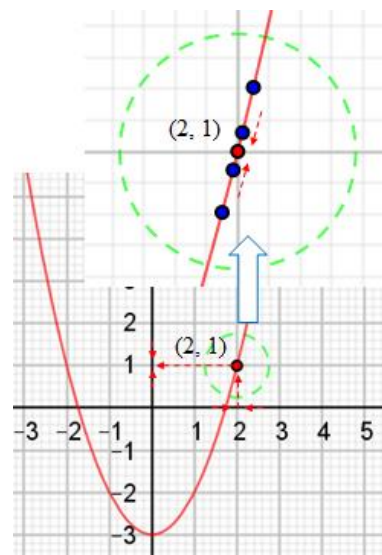
Así se deduce considerando los valores dados en la tabla siguiente:

	$x \rightarrow 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
Valores de $x$ :	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
Valores de $f(x) = x^2 - 3$	0,61	0,9601	0,996001	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1,004001	1,0401	1,41

Efectivamente, tanto si  $x \rightarrow 2^-$  como si  $x \rightarrow 2^+$  la función toma valores próximos a 1.

Gráficamente, puede verse que para valores de  $x$  próximos a 2, el valor de la función  $f(x) = x^2 - 3$  se aproxima a 1. Por ambos lados, los puntos de la curva se acercan a  $(2, 1)$ .

En torno al punto  $(2, 1)$ , la gráfica de  $f$  puede encerrarse en un círculo tan pequeño como se quiera.



La notación que suele emplearse es:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$ .

$\rightarrow$  Se lee: límite de  $(x^2 - 3)$  cuando  $x$  tiende a 2 es igual a 1.

### Idea de límite

En general,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , significa que cuando  $x$  se acerca a  $a$ , todos

los valores que toma  $f(x)$  se acercan a  $l$  todo lo que se quiera.

$\rightarrow$  El comportamiento de  $f(x)$  debe ser el mismo tanto si  $x$  se

acerca a  $a$  por la izquierda ( $x \rightarrow a^-$ ), como si  $x$  se acerca a  $a$  por la derecha ( $x \rightarrow a^+$ ).

Esto es, si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ , entonces existe el límite y vale  $l$ :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

Por tanto, para que exista límite es necesario que existan los límites laterales y que sean iguales.

Deducciones que pueden hacerse a partir del límite

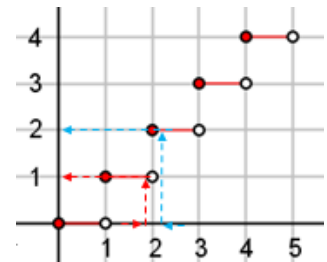
• El estudio del límite de una función en un punto permite determinar cómo se comporta esa función  $f(x)$  cuando la variable  $x$  se aproxima a un punto concreto  $a$ . Pudiendo suceder:

- 1) Que cuando  $x \rightarrow a$ , entonces  $f(x) \rightarrow f(a)$ . En este caso se dirá que la función es continua en el punto  $x = a$ . Es lo que pasa en el ejemplo anterior, ya que  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = f(2) = 1$ .
- 2) Que la función tome valores distintos por la izquierda y por la derecha de  $a$ . Esto es, que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . En este caso la función no tiene límite; pudiéndose admitir que tenga límite solo por la izquierda, o solo por la derecha, o por ambos lados, aunque distintos
- 3) Que la función tome valores muy grandes, infinitamente grandes. En este caso tampoco existe límite, aunque podría escribirse  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ , siendo esta la manera de decir que, en las cercanías de  $a$ , la función toma valores tan grandes como se quiera.
- 4) Que no se sepa lo que pasa, porque la función se comporte de manera “indeterminada”; esto requerirá un estudio más complejo.

**Ejemplos:**

a) Recuerda que la función parte entera de  $x$  se define como el número entero inmediatamente menor o igual a  $x$ ; pues bien, si  $x \rightarrow 2$ , la función  $f(x) = ENT[x]$  se comporta como sigue:

	$x \rightarrow 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
$x$ :	1,9	1,99	1,999	... ..	2,001	2,01	2,1
$f(x)$ :	1	1	1	$\rightarrow ? \leftarrow$	2	2	2



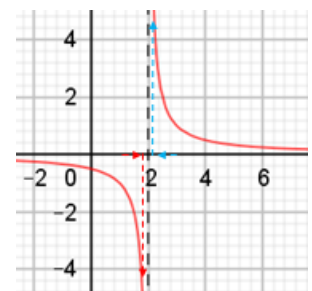
Cuando  $x \rightarrow 2^-$ , la función toma siempre el valor 1  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} ENT[x] = 1$ .

Cuando  $x \rightarrow 2^+$ , la función toma siempre el valor 2  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} ENT[x] = 2$ .

En este caso,  $\lim_{x \rightarrow 2} ENT[x]$  no existe. (Puede admitirse la existencia de límites laterales).

b) Para  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ , cuando  $x \rightarrow 2$  se tiene:

	$x \rightarrow 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
$x$ :	1,9	1,99	1,999	... ..	2,001	2,01	2,1
$f(x)$ :	-10	-100	-1000	$\rightarrow ? \leftarrow$	1000	100	10



Cuando  $x \rightarrow 2^-$ , la función toma valores cada vez más grandes y negativos.

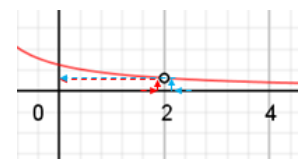
Cuando  $x \rightarrow 2^+$ , la función toma valores cada vez más grandes y positivos.

Evidentemente la función no tiene límite, aunque puede escribirse

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \pm\infty \rightarrow \text{Estos casos están ligados a la existencia de asíntotas verticales.}$$

c) Para  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ , cuando  $x \rightarrow 2$  se tiene:

	$x \rightarrow 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
$x$ :	1,9	1,99	1,999	... ..	2,001	2,01	2,1
$f(x)$ :	0,2564	0,2506	0,25006	$\rightarrow 0,25 \leftarrow$	0,24994	0,2494	0,2439



Aunque la función no está definida en  $x = 2$ , tanto por la izquierda como por la derecha, toma

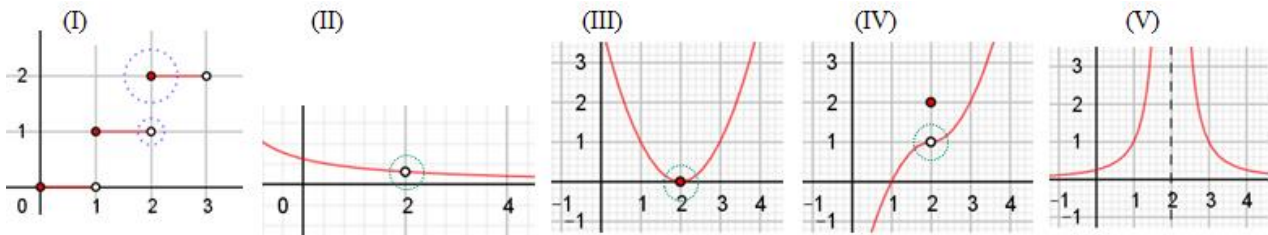
valores tan próximos a 0,25 como en quiera. Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 0,25$ .

### Consideraciones gráficas

Como se ha visto en el ejemplo anterior, para que exista el límite en un punto no es necesario que la función esté definida en ese punto. Esto sugiere que lo que importa son los valores que toma la función cuando  $x \rightarrow a$ , no cuando  $x = a$ . Por eso, puede darse el siguiente criterio gráfico:

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , entonces, en los alrededores del punto  $(a, l)$  la gráfica de la función puede encerrarse en un círculo tan pequeño como se quiera, sin importar lo que pase en  $x = a$ .

Esta idea se puede explicar con ayuda de las siguientes gráficas de funciones.



En la figura (I) se observa que  $\lim_{x \rightarrow 2} ENT[x]$  no existe. La gráfica de  $f(x) = ENT[x]$ , en puntos cercanos a  $x = 2$ , sale de los círculos trazados.

En la figura (II), que es la de  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ , cuando  $x$  se acerca 2, su gráfica está encerrada dentro del círculo marcado, salvo el punto  $(2, 0,25)$  del que no se dice nada. En este caso existe el límite en  $x = 2$  y vale 0,25:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 0,25$ . (Aunque la función no es continua en ese punto).

En la figura (III), que es la de la función  $f(x) = (x-2)^2$ , para valores de  $x$  cercanos a 2, su gráfica está encerrada dentro del círculo marcado. Existe el límite en  $x = 2$  y vale 0:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0$ . Como el valor del límite coincide con  $f(2)$ , la función es continua en  $x = 2$ .

En la figura (IV), que es la de la función  $f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 1, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } x = 2 \\ (x-2)^2 + 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ , para valores de  $x$

cercanos a 2, su gráfica está encerrada dentro del círculo marcado, salvo el punto  $(2, 2)$ . En este caso también existe el límite en  $x = 2$  y vale 1:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ . (La anomalía del punto  $(2, 2)$  hace que la función no sea continua en  $x = 2$ ).

En la figura (V), que es la de la función  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ , para valores de  $x$  cercanos a 2, tanto por la

izquierda como por la derecha, la función toma valores cada vez más grandes. En este caso no existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , aunque puede escribirse que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ , para indicar que la función toma valores infinitamente grandes cuando  $x \rightarrow 2$ .

## 2. CÁLCULO PRÁCTICO DE LÍMITES

### Casos inmediatos

Si  $f(x)$  es una función usual (polinómica, racional, exponencial, logarítmica, etc.) y está definida en el punto  $x = a$ , *suele cumplirse* que:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Esto es, el límite se resuelve sustituyendo.

Por tanto, lo primero que debe hacerse para calcular un límite es sustituir  $x$  por  $a$ : hallar  $f(a)$ . Si existe  $f(a)$  y la función no está definida a trozos, se aceptará que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

### Ejemplos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ . En particular,  $\lim_{x \rightarrow 4} (-3) = -3$ .      b)  $\lim_{x \rightarrow a} (3x - 5) = 3a - 5$ : (se sustituye  $x$  por  $a$ ).
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x - 5) = (0 + 0 - 5) = -5$ .      d)  $\lim_{x \rightarrow -2} (x - 1)^2 = (-2 - 1)^2 = 9$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x + 2} = \frac{3 - 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$ .      f)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 2} = \frac{3 - 3}{9 + 2} = \frac{0}{11} = 0$ .
- g)  $\lim_{x \rightarrow -1} 2^{x+1} = 2^{-1+1} = 2^0 = 1$ .      h)  $\lim_{x \rightarrow -2} (\ln(x^2 - 3)) = \ln((-2)^2 - 3) = \ln 1 = 0$ .

- Cuando la función no está definida en el punto  $x = a$ , pueden darse tres posibilidades:

#### 1.ª Que no tenga sentido calcular el límite.

##### Ejemplo:

Para la función  $f(x) = \log(x - 3)$  no tiene sentido calcular el límite en el punto  $x = 2$ , pues la función no está definida para valores próximos a 2, cuando  $x \rightarrow 2$ .

Sí podría calcularse el límite cuando  $x > 3$ . En particular, si  $x \rightarrow 13$ ,  $\lim_{x \rightarrow 13} \log(x - 3) = \log 10 = 1$ .

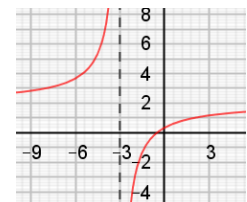
#### 2.ª Que no exista el límite por ser su valor infinito.

Esto sucede cuando al sustituir aparece la expresión  $\frac{k}{0}$ , que no está definida, pero que toma valores muy grandes cuando el denominador se acerca a 0. En ese caso, aunque no existe el límite, puede decirse que vale  $\infty$  y escribir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{k}{0} = \infty$ .

##### Ejemplos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{1}{(2 - 2)^2} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow$  La expresión  $\frac{1}{0}$  no está definida; pero el cociente “1 entre un número cada vez más próximo a 0” es cada vez más grande: se dice que vale  $\infty$ .
- b) Igualmente,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x - 1} = \frac{2}{1 - 1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$ .

Observa que se ha puesto  $\pm\infty$ , pues la función se comporta de manera diferente a izquierda y derecha del punto  $x = 1$ . (Más adelante se hará con detalle).



#### 3.ª Que exista el límite (aunque deberá calcularse por métodos específicos)

Por ejemplo, la función  $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$  no está definida en  $x = 2$ , pues  $f(2) = \frac{2 - 2}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} \rightarrow ?$ ; no

obstante, tiene límite en ese punto, siendo  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = 0,25$ , como se ha visto al principio del tema y justificado en la figura (II) de la página anterior.

### 3. LÍMITES DE FUNCIONES CUANDO $x \rightarrow a$

#### Límites de funciones racionales cuando $x \rightarrow a$

Las funciones racionales son de la forma  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , siendo  $P(x)$  y  $Q(x)$  polinomios.

Al hacer el límite,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ , se presentan tres casos:

Caso 1. Si  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  está definida en  $x = a$  (sucede si  $Q(a) \neq 0$ ), entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ .

#### Ejemplos:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+5}{x^2-2x-1} = \frac{3(-1)+5}{(-1)^2-2(-1)-1} = \frac{2}{2} = 1$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{2x-1} = \frac{2^2-4}{2 \cdot 2-1} = \frac{0}{3} = 0$ .

Caso 2. Si  $Q(a) = 0$  y  $P(a) \neq 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[ \frac{P(a) \neq 0}{Q(a) = 0} \right] = \infty$ . (No existe el límite).

En este caso la función tiene una asíntota vertical, la recta  $x = a$ .

#### → Aplicación: determinación de asíntotas verticales

Cuando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  se dice que la recta  $x = a$  es una asíntota vertical de la curva  $y = f(x)$ .

En este caso, si fuese necesario hacer un estudio de la gráfica de  $y = f(x)$ , hay que calcular los límites laterales para determinar el signo de ese  $\infty$ , pues su comportamiento puede ser diferente a izquierda y derecha de  $x = a$ .

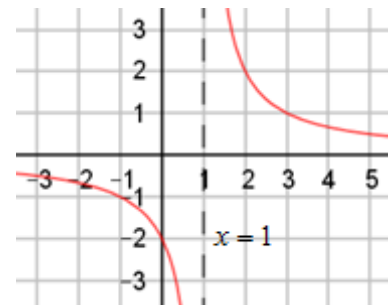
Así, como  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow x = 1$  es asíntota vertical.

• Por la izquierda:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{1^- - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ .

Si  $x \rightarrow 1^-$ ,  $x - 1 \rightarrow 0^-$  (puedes probar con  $x = 0,999$ ).

• Por la derecha:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{1^+ - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ .

Si  $x \rightarrow 1^+$ ,  $x - 1 \rightarrow 0^+$  (puedes probar con  $x = 1,001$ ).



Caso 3. La indeterminación  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .

Si  $Q(a) = 0$  y  $P(a) = 0$ , quedaría  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right]$ . El límite se puede resolver transformando el

cociente, ya que:

• Si  $Q(a) = 0 \Rightarrow a$  es raíz de  $Q(x) \Rightarrow (x-a)$  es un factor de  $Q(x) \Rightarrow Q(x) = (x-a) \cdot Q_1(x)$ .

• Igualmente, si  $P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-a) \cdot P_1(x)$ .

Luego:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a) \cdot P_1(x)}{(x-a) \cdot Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) \cdot P_1(x)}{(x-a) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Para resolver el último límite se aplica nuevamente alguno de los tres casos vistos. En particular, si volviese a salir  $0/0$  se reiterará el procedimiento del caso 3.

**Ejemplos:**

a) Comenzamos con el resultado ya conocido de  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 0,25$ .

En efecto, al sustituir,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[ \frac{0}{0} \right] \rightarrow$  descomponiendo en factores:  $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{(x-\cancel{2})(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$  (descomponiendo en factores)  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{x(x-\cancel{1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4-2x^3+3x^2}{2x^3-3x^2-5x} : \text{al sustituir queda } \left[ \frac{0}{0} \right]$ . Sacando factor común  $x$  en ambos términos, se

tiene:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4-2x^3+3x^2}{2x^3-3x^2-5x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(3x^3-2x^2+3x)}{\cancel{x}(2x^2-3x-5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3-2x^2+3x}{2x^2-3x-5} = \frac{0}{-5} = 0.$

d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3x}{x^2+6x+9} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{0} = \pm\infty$ . No existe el límite.

e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+4x+2}{x^3+x^2-x-1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x+1)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x^2-1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] \rightarrow$  se repite el proceso:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{x^2-1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\cancel{(x+1)}}{(x+\cancel{1})(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-1-1} = -1.$$

Nota: Comprueba que:  $2x^2+4x+2 = 2(x+1)(x+1)$ ;  $x^3+x^2-x-1 = (x+1)(x^2-1)$ .

→ Indeterminaciones matemáticas y otras observaciones

En Matemáticas hay siete casos en los que al sustituir el valor  $x = a$  en la expresión dada se llega a situaciones extrañas, no definidas, que reciben el nombre de formas indeterminadas.

Escritas esquemáticamente, estas 7 indeterminaciones son:

$$\left[ \frac{0}{0} \right] \quad \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \quad [0 \cdot \infty] \quad [\infty - \infty] \quad [1^\infty] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

- Conviene aclarar que cuando en estas expresiones se escribe 0 se quiere significar que se está ante un valor tan pequeño como se quiera (positivo o negativo, pero infinitesimal). Lo mismo pasa cuando se escribe 1, para indicar un valor que se acerca a 1 (tomando valores como 0,999... o 1,000...). Por último,  $\infty$  designa un valor mayor (en valor absoluto) que cualquier número dado.
- Algunas veces estas formas indeterminadas pueden resolverse. Los métodos de resolución que se emplean este curso son básicamente algebraicos (simplificar, extraer factor común, multiplicar y dividir por expresiones conjugadas, operar con potencias y raíces, ...), que permiten transformar la función inicial en otra equivalente no indeterminada en el punto en cuestión.

• En este curso se estudian solo las indeterminaciones  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  y  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ . La primera de ellas,  $0/0$ , ya se ha visto para funciones racionales; a continuación se estudiará para funciones con raíces. Inmediatamente después, para ambos tipos de funciones, se abordará la resolución de  $\infty/\infty$ .

• Como advertencia, conviene no confundir las expresiones  $\left[ \frac{0}{k} \right]$ ,  $\left[ \frac{k}{0} \right]$  y  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ :

- 1)  $\left[ \frac{0}{k} \right] = 0$ : tiende a 0;    2)  $\left[ \frac{k}{0} \right] = \infty$ : tiende a  $\infty$ ;    3)  $\left[ \frac{0}{0} \right] = ?$ : hay que resolverlo.

### La indeterminación $\left[ \frac{0}{0} \right]$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales, la indeterminación  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  puede resolverse de dos formas:

1. Descomponiendo en factores y simplificando, análogo a lo hecho para funciones racionales.
2. Multiplicando y dividiendo la función dada por la expresión conjugada de alguno de sus términos. A continuación, se opera y simplifica.

#### Observaciones:

- 1) En raíces de índice par hay que considerar si la raíz está definida en el punto de estudio.
- 2) Si no se advierte nada, en todos los casos se tomará el signo positivo de la raíz.
- 3) La expresión conjugada de  $\sqrt{A} + B$  es  $\sqrt{A} - B$ ; al multiplicarse:  $(\sqrt{A} + B)(\sqrt{A} - B) = A - B^2$ .

#### Ejemplos:

a) Para la función  $f(x) = \sqrt{x-3}$  no tiene sentido calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-3}$ , pues la función no está definida para valores próximos a 2, cuando  $x \rightarrow 2$ . Sí podría calcularse el límite cuando  $x > 3$ . En particular, cuando  $x \rightarrow 3^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$ ; y si  $x \rightarrow 7$ ,  $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x-3} = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-2}{2x^2-4x}} = \left[ \frac{0}{0} \right]$ . Puede resolverse simplificando dentro de la raíz:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x-2}{2x^2-4x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{\cancel{x-2}}{2x(\cancel{x-2})}} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{1}{2x}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} \rightarrow$  Al sustituir se obtiene  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ :  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \frac{3-3}{\sqrt{3+6}-3} = \frac{3-3}{3-3} = \left[ \frac{0}{0} \right]$ .

La transformación que debe hacerse es multiplicar y dividir por la expresión conjugada del término que lleva la raíz: la expresión conjugada de  $\sqrt{x+6}-3$  es  $\sqrt{x+6}+3$ . Esto se hace para eliminar la raíz cuadrada de ese término, pues  $(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3) = (\sqrt{x+6})^2 - 3^2 = x+6-9 = \underline{x-3}$ .

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+6}-3)}{x-3} =$$

$$(\text{simplificando y sustituyendo}) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}-3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+6}+3) = \sqrt{3+6}+3 = 3+3 = 6.$$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-x}{2-x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \rightarrow$  se multiplican los términos de la fracción por el conjugado del numerador,

$$\text{que es } \sqrt{2x}+x; \text{ queda: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-x)(\sqrt{2x}+x)}{(2-x)(\sqrt{2x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x})^2 - x^2}{(2-x)(\sqrt{2x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{(2-x)(\sqrt{2x}+x)} =$$

$\rightarrow$  se saca factor común en el numerador:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(\cancel{2-x})}{(\cancel{2-x})(\sqrt{2x}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(\sqrt{2x}+x)} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 2} + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

**Límites de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas cuando  $x \rightarrow a$**

La función exponencial,  $f(x) = a^{g(x)}$ , con  $a > 0$ , tiene límite siempre que  $g(x)$  esté definida.

La función logarítmica,  $f(x) = \log_a g(x)$ , tiene límite siempre que  $g(x) > 0$ .

Las funciones trigonométricas:  $f(x) = \sin(g(x))$  y  $f(x) = \cos(g(x))$  tienen límite siempre que  $g(x)$  esté definida;  $f(x) = \tan(g(x))$  tiene límite siempre que  $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**Ejemplos:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3^x) = 3^2 = 9$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} (e^{x^2+2x}) = e^{1-2} = e^{-1}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}}$  no existe.
- b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (\log x) = \log 2 \approx 0,301030$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x^2 + 1)) = \ln 1 = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 5} (\log(x-5))$  no existe.  
 $\rightarrow f(x) = \log(x-5)$  tiene una asíntota vertical en  $x = 5$ , por la derecha:  $\lim_{x \rightarrow 5^+} (\log(x-5)) = -\infty$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos 2x) = \cos \pi = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \tan \frac{x}{2} \right)$  no existe.

**Límites de funciones definidas a trozos**

En las funciones definidas a trozos, para cada una de las funciones que intervengan vale lo dicho anteriormente; la única novedad es que hay que estudiar los límites laterales en los puntos de unión de los diferentes trozos.

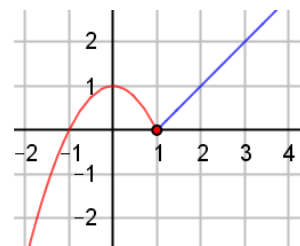
**Ejemplos:**

- a) La función  $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$  tiene límite en todos los puntos.

El único punto dudoso es  $x = 1$ , en el cual hay que estudiar los límites laterales:

- por la izquierda:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) = 1-1 = 0$ ;
- por la derecha:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 1-1 = 0$ .

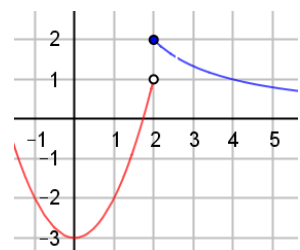
Como ambos límites coinciden, existe el límite y vale 0.



- b) La función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{si } x < 2 \\ \frac{4}{x}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ , no tiene límite en el punto  $x = 2$ ,

pues sus límites laterales en ese punto no coinciden:

- por la izquierda:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 4 - 3 = 1$ ;
- por la derecha:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$ .



- c) Si  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{si } x < -1 \\ 2x + m, & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ , el valor que debe tomar el parámetro  $m$  para que exista el límite

en  $x = -1$ , se determina imponiendo que los límites laterales en ese punto sean iguales. Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \rightarrow \text{Como } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 2) = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + m) = -2 + m \end{cases} \Rightarrow -1 = -2 + m \Rightarrow m = 1.$$

## 4. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \rightarrow \infty$

En este apartado se trata de estudiar cómo se comporta una función cuando la variable independiente se hace cada vez más grande, tan grande como se desee. (A veces, en vez de infinito, se emplea la expresión, “a largo plazo”; o “cuando pasa mucho tiempo”).

### Algo sobre el infinito

Decir que  $x \rightarrow +\infty$  significa que  $x$  se hace tan grande como se quiera.

Decir que  $x \rightarrow -\infty$  significa que  $x$  se hace tan grande como se quiera, pero siendo negativo.

• Las operaciones con el infinito no actúan exactamente igual que con números. Sin pretender ser exhaustivos se indican algunas:

$$\begin{array}{llll} \infty + \infty = \infty; & -\infty - \infty = -\infty; & \infty \pm k = \infty; & -\infty \pm k = -\infty; \\ (+k) \cdot \infty = \infty; & (-k) \cdot \infty = -\infty; & \infty \cdot \infty = \infty; & \infty \cdot (-\infty) = -\infty; \\ \infty / (\pm k) = \pm\infty; & \pm k / \infty = 0; & \infty^{(+k)} = \infty; & \infty^{(-k)} = 0; \\ [\infty - \infty] \text{ es indeterminado;} & & & & [\infty / \infty] \text{ es indeterminado.} \end{array}$$

En todos los casos  $+k$  indica un número positivo ( $-k$ , negativo). Aquí, cuando se escribe  $\infty$  sin signo, se supone positivo.

### **Límite de funciones polinómicas en el infinito**

Si  $P(x)$  es un polinomio de cualquier grado, se cumple que:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \pm\infty$ .

El signo depende del término principal del polinomio (de su coeficiente y del exponente), valiendo en todos los casos las reglas de los signos.

Decir que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$  significa que cuando  $x$  se hace muy grande,  $f(x)$  toma valores mayores que cualquier número dado:  $|f(x)|$  es tan grande como se quiera siempre que  $|x|$  sea lo suficientemente grande.

### **Ejemplos:**

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (7x + 5) = 7 \cdot \infty + 5 = \infty$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x + 5) = 7 \cdot (-\infty) + 5 = -\infty$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x - 9) = \infty$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x - 9) = -\infty$ .

Puede observarse que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 3x - 9) = [\infty - \infty - 9] = \lim_{x \rightarrow \infty} (x(2x^2 - 3) - 9) = \infty \cdot \infty - 9 = \infty$ .

Igualmente,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x - 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(2x^2 - 3) - 9) = (-\infty) \cdot \infty - 9 = -\infty - 9 = -\infty$ .

### Consecuencias

1. Si  $Q(x)$  es un polinomio de cualquier grado, se cumple que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{Q(x)} = 0$ .

2. Para hallar el límite del cociente de dos monomios se simplifica y calcula.

### **Ejemplos:**

a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{-2x + 5} = 0$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3 - 7x} = 0$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = 0$ .

e)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = \infty$ .

f)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ .

**Límite del cociente de dos polinomios: funciones racionales**

Si  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios,  $P(x)$  de grado  $n$  y  $Q(x)$  de grado  $m$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Solo se tienen en cuenta los términos principales (ver Problema n. 7), cumpliéndose que:

- Si  $n > m$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 7x}{5x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{5} = \infty.$
- Si  $n = m$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{3x^2 - 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}.$
- Si  $n < m$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 7}{5x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{5x} = 0.$

En todos los casos deben tenerse en cuenta las propiedades de los signos. Así, por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x}{5x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 2}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4) = -4.$$

**Aplicación: determinación de asíntotas horizontales y oblicuas en funciones racionales**

- Cuando el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador la función racional tiene una asíntota horizontal.

En general, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  se concluye que la recta  $y = l$  es una asíntota horizontal de  $f(x)$ .

Esto significa que la gráfica de la función se acerca a la recta  $y = l$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

- Si el grado del numerador es igual a 1 + el grado del denominador la función racional tiene una asíntota oblicua.

Su ecuación es la recta  $y = mx + n$ , siendo:  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ;  $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ ,  $n \neq \infty$ .

Observación. En el Problema n. 10 se verá otro método para el cálculo de asíntotas oblicuas.

**Ejemplos:**

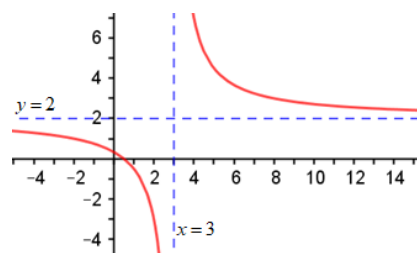
a) La función  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$  tiende a 2 cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

En efecto,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2.$

También se cumple que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2.$

Luego, la recta  $y = 2$  es asíntota horizontal hacia ambos lados.

Comprueba, dando valores grandes a  $x$ , que si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 2^+$ ; y si  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 2^-$ .



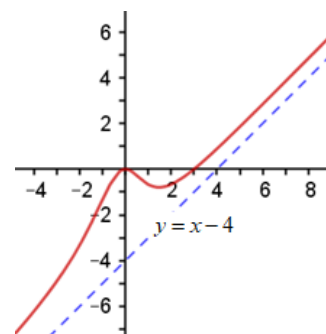
b) La función  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 2}$  tiene una asíntota oblicua: el numerador

es de grado 3; el denominador de grado 2. Se calcula como sigue:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^3 + 2x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 - 2x}{x^2 + 2} = -4.$$

La asíntota es la recta  $y = x - 4$ .



### Límites de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas en el infinito

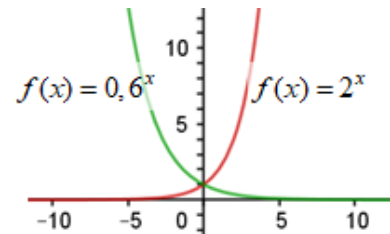
La función exponencial,  $f(x) = a^{g(x)}$ , con  $a > 0$ .

El comportamiento de estas funciones en el infinito es muy dispar: no pueden darse criterios generales; en cada caso hay que estudiar la base y el exponente. Además, deben distinguirse los casos  $x \rightarrow -\infty$  y  $x \rightarrow +\infty$ .

**Ejemplos:**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x) = 2^{+\infty} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,6^x) = 0,6^{+\infty} = 0$ .

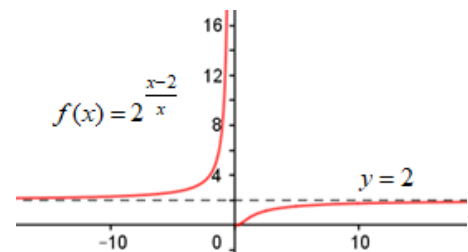
En cambio,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x) = 2^{-\infty} = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,6^x) = 0,6^{-\infty} = +\infty$ .



Esto significa que la función  $f(x) = 2^x$  tiene una asíntota horizontal hacia  $-\infty$ ; mientras que  $f(x) = 0,6^x$  tiene la asíntota hacia  $+\infty$ . En ambos casos, es la recta de ecuación  $y = 0$ : eje  $OX$ .

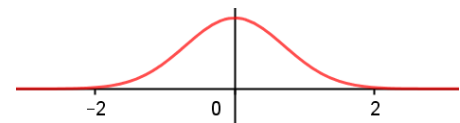
b)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 2^{\frac{x-2}{x}} \right) = 2^{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x}} = 2^1 = 2$ .

Esto significa que la recta  $y = 2$  es asíntota horizontal de la función  $f(x) = 2^{\frac{x-2}{x}}$ .



c)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^{-x^2}) = e^{-\infty} = 0$ . Esto significa que la función

$f(x) = e^{-x^2}$  tiende a 0 por ambos lados, cuando  $x \rightarrow -\infty$  y cuando  $x \rightarrow +\infty$ . La recta  $y = 0$  es su asíntota.



Las funciones logarítmicas,  $f(x) = \log(g(x))$  y  $f(x) = \ln(g(x))$

Su límite, cuando  $x \rightarrow \infty$ , depende del comportamiento de la función  $g(x) > 0$ ; cumpliéndose en todos los casos la siguiente propiedad:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log(g(x))) = \log(\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x)))$ .

**Ejemplos:**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x) = \log(+\infty) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log x)$  no existe;

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \frac{2x-3}{x} \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x} \right) = \ln 2$ .

Las funciones trigonométricas elementales,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$  y  $f(x) = \tan x$  no tienen límite en el infinito: oscilan permanentemente.

Las de la forma  $f(x) = \sin(g(x))$ ,  $f(x) = \cos(g(x))$  y  $f(x) = \tan(g(x))$ , su límite en el infinito depende del comportamiento de  $g(x)$ .

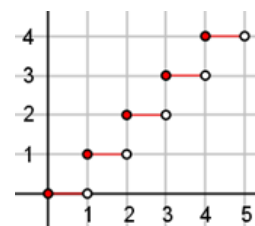
**Ejemplos:**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x)$  no existe;  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 2x)$  no existe;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan \frac{x}{2}$  no existe.

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\pi x}{2x+3} \right) = \sin \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x+3} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

## 5. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

La idea gráfica de continuidad de una función es sobradamente conocida: una función es continua cuando puede trazarse sin levantar el lápiz del papel; cada vez que se produce un salto se tiene una discontinuidad. Así, por ejemplo, la función  $f(x) = ENT[x]$  es discontinua en todos los valores enteros de  $x$ . También suele decirse que una función es continua cuando a variaciones pequeñas de  $x$  le corresponden variaciones pequeñas de  $f(x)$ .

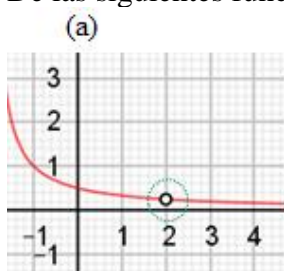


Su definición mediante límites es la siguiente:

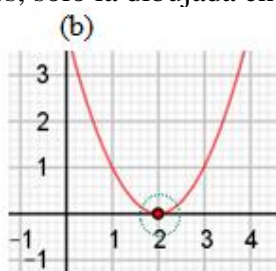
$$f(x) \text{ es continua en el punto } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Esto exige que la función  $f(x)$  esté definida en el punto  $x = a$  y que su límite coincida con  $f(a)$ .

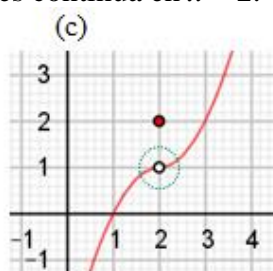
De las siguientes funciones, solo la dibujada en (b) es continua en  $x = 2$ .



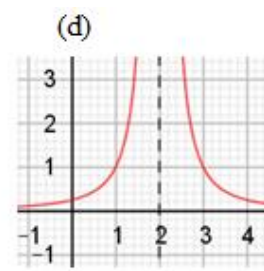
La función no está definida en  $x = 2$ ; aunque existe el límite.



El límite y la función valen lo mismo:  
 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0 = f(2).$



El límite no coincide con  $f(2) = 2$ , pues  
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \neq f(2).$



La función no está definida; tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

### Discontinuidad evitable

Una función  $f(x)$  tiene una discontinuidad evitable en un punto  $x = a$  cuando la función tiene límite en ese punto. Esto es, cuando existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

- Si la función no está definida en  $x = a$ , la discontinuidad se evita definiendo  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
- Si la función está definida en  $x = a$ , pero su valor de definición no coincide con el límite, entonces hay que redefinir  $f(a)$ , imponiendo que  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
- En las figuras (a) y (c) la discontinuidad puede evitarse. En (a) la discontinuidad se evita definiendo  $f(2) = 1/4$ ; en (c), redefiniendo  $f(2) = 1$ .

### Ejemplo:

La función  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$  no es continua en  $x = -2$  y  $x = 2$ , pues no está definida en esos puntos.

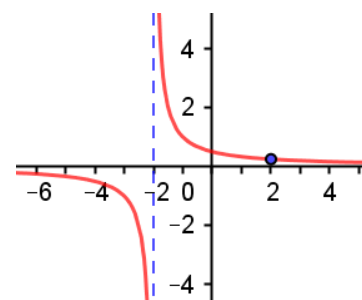
En el punto  $x = 2$ , la discontinuidad puede evitarse definiendo aparte  $f(2) = 1/4$ , pues

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

En  $x = -2$  la discontinuidad no puede evitarse.

$$\text{Con esto, la función: } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4}, & \text{si } x \neq -2 \text{ y } 2 \\ 1/4, & \text{si } x = 2 \end{cases} \text{ es continua}$$

siempre que  $x \neq -2$ ; en ese punto tiene una asíntota vertical.



## 6. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES USUALES

### Continuidad de las funciones polinómicas, racionales y con radicales

Estas funciones son continuas en todos los puntos de su dominio.

#### Ejemplos:

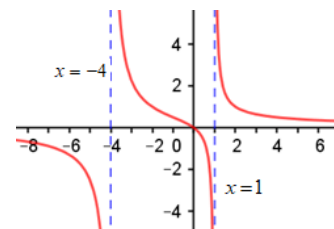
a) Todas las funciones polinómicas,  $f(x) = P(x)$ , son continuas para todo número real. En particular, por ejemplo, las funciones  $f(x) = -x^3 + 3x^2$  o  $f(x) = (x-2)^2$ .

b) Las funciones racionales,  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , no son continuas en las soluciones de  $Q(x) = 0$ .

Así, la función  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 3x - 4}$  no es continua en los puntos  $x = -4$  y

$x = 1$ , que son las soluciones de  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .

→ Como se ha dicho anteriormente, en esos puntos la función puede tener asíntotas verticales.



c) La función  $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$  es continua en todo  $\mathbf{R}$ , pues  $x^2 + 4 \neq 0$  para todo  $x$ .

d)  $f(x) = \sqrt{x+2}$  es continua para todo  $x \geq -2$ , que es su intervalo de definición.



e) La función  $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$  es continua para todo  $x \in \mathbf{R}$ , pues siempre está definida.

### Continuidad de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

Estas funciones son continuas en todos los puntos de su dominio.

La función exponencial,  $f(x) = a^{g(x)}$ , con  $a > 0$ , es continua siempre que  $g(x)$  esté definida.

#### Ejemplos:

a) Las funciones  $f(x) = 2^x$ ,  $f(x) = e^{x^2+2x}$  y  $f(x) = e^{-0,5x}$  son continuas siempre, para todo  $x \in \mathbf{R}$ .

b)  $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$  es continua para todo  $x \neq 2$ , punto en el que no está definida.

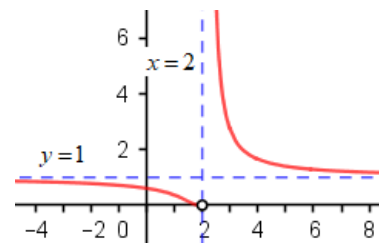
Su gráfica es la adjunta.

Es fácil ver que la recta  $y = 1$  es asíntota horizontal.

En efecto:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[ e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 \right] = 1$ ; y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[ e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 \right] = 1$ .

También puede verse que tiene una asíntota vertical, la recta  $x = 2$ , situada a la izquierda de la curva, cuando  $x \rightarrow 2^+$ , pues:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[ e^{\frac{1}{2^+-2}} = e^{0^+} = e^{+\infty} \right] = +\infty; \text{ en cambio, } \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = \left[ e^{\frac{1}{2^- -2}} = e^{0^-} = e^{-\infty} \right] = 0.$$



(Con la calculadora puedes comprobar que  $f(1,9) = e^{-10} \approx 0,000045$  y  $f(2,1) = e^{10} \approx 2,2 \cdot 10^9$ ; el primer número es infinitesimal; el segundo, muy grande: tiende a  $\infty$ ).

La función logarítmica,  $f(x) = \log_a g(x)$ , es continua siempre que  $g(x) > 0$ .

**Ejemplos:**

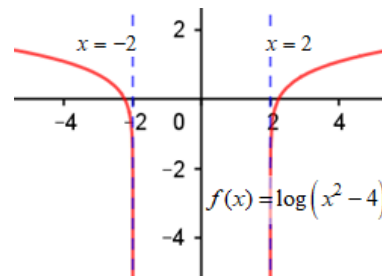
a) Las funciones  $f(x) = \log x$  y  $f(x) = \ln x$  son continuas cuando  $x > 0$ :  $x \in (0, +\infty)$ .

b)  $f(x) = \log(x-5)$  es continua cuando  $x-5 > 0$ ; esto es, en el intervalo  $(5, +\infty)$ .

c)  $f(x) = \log(x^2 - 4)$  es continua cuando  $x^2 - 4 > 0$ ; esto es, cuando  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ .

Las rectas  $x = -2$  y  $x = 2$  son asíntotas verticales de la curva.

d)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  es continua siempre, pues está definida para todo  $x \in \mathbf{R}$ :  $x^2 + 1 > 0$  para todo  $x$ .



Las funciones trigonométricas:  $f(x) = \sin(g(x))$  y  $f(x) = \cos(g(x))$  son continuas siempre que  $g(x)$  esté definida;  $f(x) = \tan(g(x))$  es continua siempre que  $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

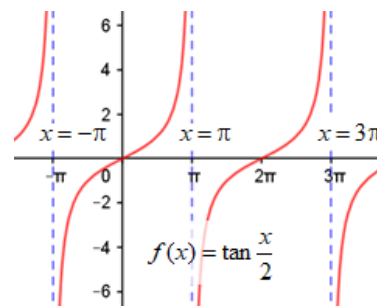
**Ejemplos:**

a)  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  es continua para todo  $x \neq 0$ .

b)  $f(x) = \cos(2x+3)$  es continua para todo  $x \in \mathbf{R}$ .

c)  $f(x) = \tan \frac{x}{2}$  es continua siempre que  $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$ .

Las rectas  $x = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , son asíntotas verticales de la curva.



**Continuidad de las funciones definidas a trozos**

Las funciones definidas a trozos serán continuas si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan los límites laterales.

**Ejemplo:**

a) En la página 204 se dan las gráficas de  $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$  y  $f(x) = \begin{cases} x^2-3, & \text{si } x < 2 \\ \frac{4}{x}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ .

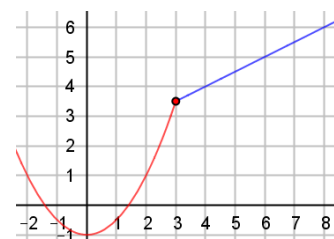
Puede verse que la primera es continua en todo  $\mathbf{R}$ , pues  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ .

En cambio, la segunda no es continua en  $x = 2$ , pues  $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$ .

b) Si  $f(x) = \begin{cases} 0,5x^2 - 1, & \text{si } x \leq 3 \\ mx + 2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$ , el valor que debe tomar el parámetro

$m$  para que la función sea continua en  $x = 3$  es el resultado de la igualdad  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (0,5x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (mx + 2)$ .

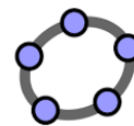
Como  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (0,5x^2 - 1) = 0,5 \cdot 9 - 1 = 3,5$  y  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (mx + 2) = 3m + 2$ , debe cumplirse que  $3,5 = 3m + 2 \Rightarrow 1,5 = 3m \Rightarrow m = 0,5$ .



## 7. RECURSOS INFORMÁTICOS

Casi todo lo estudiado en los temas de funciones puede reforzarse aplicando los recursos informáticos.

Lo más vistoso y sencillo es la representación gráfica de cualquier función. En estos temas, la mayoría de los dibujos se han hecho con [GeoGebra](#), pero puede utilizarse cualquier otro programa conocido: [Derive](#), [Mathway](#), [Photomath](#) o [Google](#).



### Estudio de una función

Por ejemplo, si se quiere estudiar la función  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$  puede hacerse lo siguiente:

1. Abriendo GeoGebra y tecleando  $(x^2 + 3x)/(x + 1)$  se obtiene la gráfica adjunta. (La escala de los ejes, el grosor, estilo de trazo y color de la curva puede modificarse: ir a “propiedades”).

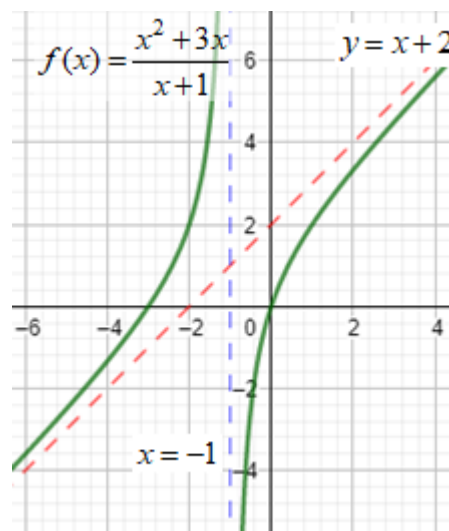
2. La discontinuidad que se observa en la curva entre  $-2$  y  $0$  sugiere la existencia de una asíntota vertical. Efectivamente, como el denominador se anula en  $x = -1$ , en ese punto la función se va al infinito. La asíntota es la recta de ecuación  $x = -1$ . (Se dibuja tecleando  $x = -1 \rightarrow$  (línea azul).

3. Como el grado del numerador supera en 1 al grado del denominador, también existe una asíntota oblicua. Su ecuación se encuentra haciendo División  $(x^2 + 3x, x + 1) \rightarrow$  se obtiene  $\{x + 2, -2\}$ , que indica que el cociente es  $x + 2$ , y el resto,  $-2$ . Lo que significa que:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = (x + 2) + \frac{-2}{x + 1}.$$

La asíntota es la recta  $y = x + 2$ .

4. Se dibuja la asíntota oblicua. Teclear:  $x + 2 \rightarrow$  (línea roja).



### Dibujar una función definida a trozos

Para dibujar la función  $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 6x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ , puede

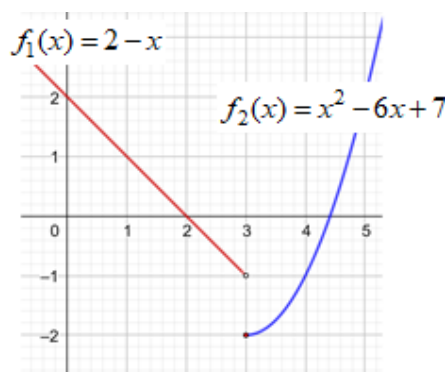
procederse como sigue:

Se abre GeoGebra y se teclea:

si  $(x < 3, 2 - x) \rightarrow$  aparece la semirrecta;

si  $(x \geq 3, x^2 - 6x + 7) \rightarrow$  aparece el trozo de parábola.

Los puntos  $(3, -1)$  y  $(3, -2)$  se han dibujado aparte.



### Calculando el valor de un límite

Para calcular  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x^2 + 5x - 6}$ , en GeoGebra se teclea: Límite  $\left(\frac{3x - 3}{x^2 + 5x - 6}, 1\right) \rightarrow$  aparece 0.4286.

El resultado que se obtiene aplicando los métodos vistos en este tema es  $\frac{3}{7}$ . (Ver el problema 6). La

aparente disparidad de resultados, que no es tal, pues  $3/7 = 0,42857\dots$ , solo puede entenderse si se conoce el significado del límite; por eso hay que utilizar los recursos informáticos con sumo cuidado: hay que conocer lo que se está haciendo y hay que saber interpretar los resultados.

$\rightarrow$  En el caso del cálculo de límites, la aplicación [Photomath](#) es mucho más rápida.

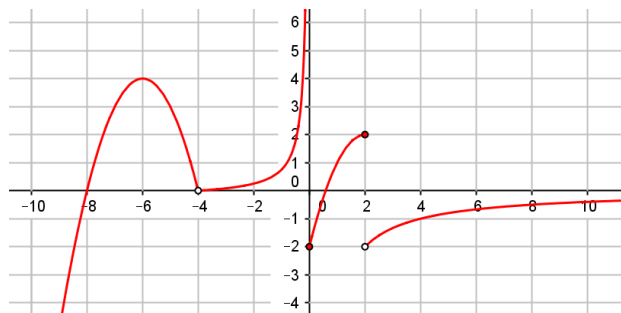
En este caso, abriendo la aplicación y fotografiando la expresión  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x^2 + 5x - 6}$  aparece  $\frac{3}{7}$ .

**PROBLEMAS PROPUESTOS**

1. La gráfica de la función  $f(x)$  es la adjunta.

Determina, justificando brevemente la respuesta, los siguientes límites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ;
- e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;
- f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .



¿En qué puntos es discontinua? ¿Es evitable la discontinuidad en alguno de esos puntos?

¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, indícalas.

2. Halla, por sustitución (si se puede), el valor de los siguientes límites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -3} (4x^2 - 7x + 2)$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x + 2}{2x^2 + 3x + 1}$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x + 2}{2x^2 + 3x + 1}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 4}{x^2 - 1}$ .

Si en algún caso no se puede determinar el límite directamente, intenta hallarlo con la calculadora.

3. Halla el valor de los siguientes límites:

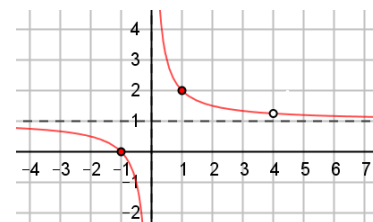
- a)  $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{2x - 3}$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3x - 1}$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x - 2}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow -1} e^{2x+2}$ ;
- e)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2 + xe^{x-2})$ ;
- f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \log \frac{20}{3x-1} \right)$ ;
- g)  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos(2x + \pi))$ ;
- h)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \tan \frac{x}{2} \right)$ .

4. a) Halla el límite de  $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x}$  en los puntos  $x = -1, x = 0,$

$x = 1$  y  $x = 4$ . ¿A cuánto tiende la función cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ ?

Confirma tus resultados sabiendo que su gráfica de es la adjunta.

b) Indica los puntos de discontinuidad de la función. Si alguna de sus discontinuidades es evitable, ¿cómo se evitaría?



5. Sea  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + 3x - 4}$ . Halla, justificando el resultado, el valor del límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 0, 1, -4 e  $\infty$ . ¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, da su ecuación o ecuaciones.

6. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x^2 + 5x - 6}$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x - 20}{x^2 - 5x}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1}$ ;
- e)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x - 3}{x^2 + 5x - 6}$ ;
- f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ ;
- g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x}$ ;
- h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 2x^2 - 10x}{x^2 - 5x}$ .

7. Justifica que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ , en los casos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 4x}{2x^2 + 3}$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 4x}{5 - 2x}$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x}{5x^2 + 1}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x}{2x^4 - 3x^2 + 1}$ .

8. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a)  $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ ;      b)  $f(x) = \frac{1-3x}{x-2}$ ;      c)  $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$ ;      d)  $f(x) = \frac{-4}{x}$ .

9. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a)  $f(x) = \frac{2x}{x^2-9}$ ;      b)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+2}$ ;      c)  $f(x) = \frac{2x^2}{x(x-4)}$ ;      d)  $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}$ ;

10. Halla la asíntota oblicua de la función  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2}$ .

11. Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$ .

12. Halla las asíntotas de las funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 9}$ ;      b)  $f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ .

13. Dada la función  $f(x) = \frac{e^{x/2}}{1+x}$ , calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.

14. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ ;      d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-x}{2x-4}$ .

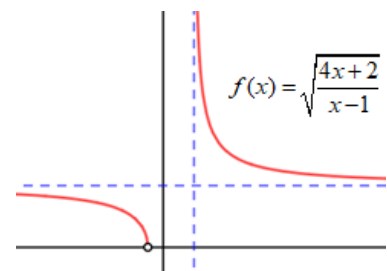
15. La función  $f(x) = \sqrt{\frac{4x+2}{x-1}}$  es la representada en la figura.

Teniendo en cuenta su gráfica y los conceptos de límite halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

d) Indica su dominio de definición.

e) Halla la ecuación de sus asíntotas.



16. Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^{4-x})$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (0,5^{3x-5})$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x)$ ;      d)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{4}{e^x + x} \right)$ .

17. Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(3-x))$ ;      b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log(3-x))$ ;      c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{3}{x} \right)$ ;      d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right)$ .

18. Halla los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \sin x}{x} \right); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cos(3x)); \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right); \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x - 1}{4x + 2} \right).$$

19. Halla los puntos en los que no son continuas las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x}{x-1}; \quad \text{b) } f(x) = \frac{x-2}{x^2+3x}; \quad \text{c) } f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}; \quad \text{d) } f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x-15}.$$

20. Aplicando límites laterales comprueba si son continuas o no las siguientes funciones definidas a trozos.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2-2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}; \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} -2x+2, & \text{si } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

21. Estudia mediante límites la continuidad de la función  $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x < -2 \\ x^2+2x+1 & -2 \leq x < 1 \\ -x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$ .

Justifica el resultado gráficamente.

22. Para qué valor de  $a$  es continua cada una de las funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} a-x & \text{si } x < 4 \\ x^2-16 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}; \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2+x-3, & \text{si } x \leq 1 \\ x+a, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

23. El precio (en cientos de euros) de un nuevo modelo de teléfono móvil viene determinado por la

función  $P(t) = \frac{7+2t^2}{(t+2)^2}$ , donde  $t$  mide el número de meses transcurridos desde su lanzamiento al

mercado.

- a) ¿Cuál fue su precio inicial? Comprueba que su precio baja en los dos primeros meses. ¿A cuánto tiende al cabo de 10 meses?
- b) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué precio tiende?

24. Supongamos que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años

viene dado por la función  $f(x) = \begin{cases} ax-x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 2x, & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$ , siendo  $x$  el tiempo transcurrido en años.

- a) Halla el valor del parámetro  $a$  para que  $f(x)$  sea una función continua.
- b) Para  $a = 8$  representa su gráfica e indica en qué períodos de tiempo los beneficios crecen o decrecen.

25. Debido a la contaminación, el número de peces  $P(x)$  (en miles) de un acuario se ajusta a la función  $P(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ , siendo  $x$  el número de años transcurridos desde comienzos de 2015.

- a) ¿Cuántos peces había a comienzos de 2015? ¿Cuántos habrá a finales de 2035?
- b) ¿Cómo evolucionará la población de peces a largo plazo?
- c) Haz un esbozo de la gráfica de  $P(x)$ .