DETERMINANTES

DETERMINANTES 2X2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

DETERMINANTES 3X3 - REGLA DE SARRUS

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + dhc) - (ceg + bdi + fha)$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1 $|A^t| = |A|$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2 $|a\cdot A| = a^n \cdot |A|$ SIENDO A UNA MATRIZ DE ORDEN n

3 $|I| = 1$

4 SI UN DETERMINANTE TIENE UNA LÍNEA (FILA O COLUMNA) DE CEROS, ENTONCES SU DETERMINANTE ES 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5 SI PERMUTAMOS DOS LÍNEAS DE UNA MATRIZ, SU DETERMINANTE CAMBIA DE SIGNO.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

6 SI UNA MATRIZ TIENE DOS LÍNEAS IGUALES, SU DETERMINANTE ES 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

7 SI MULTIPLICAMOS CADA ELEMENTO DE UNA LÍNEA DE UNA MATRIZ POR UN NÚMERO, EL DETERMINANTE DE ESA MATRIZ QUEDA MULTIPLICADO POR ESE NÚMERO.

$$4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

8 SI TODOS LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA ESTÁN FORMADOS POR DOS SUMANDOS, DICHO DETERMINANTE SE DESCOMPONE EN LA SUMA DE DOS DETERMINANTES EN LOS QUE LAS DEMÁS LÍNEAS PERMANECEN INVARIANTES.

$$\begin{vmatrix} a+3 & 4 \\ b+5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 \\ b & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

9 SI UNA MATRIZ TIENE UNA LÍNEA QUE ES COMBINACIÓN LINEAL DE LAS DEMÁS PARALELAS, ENTONCES SU DETERMINANTE ES 0. (Y RECIPROCAMENTE)

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

10 SI UNA MATRIZ ES INVERTIBLE $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

11 EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ TRIANGULAR ES EL PRODUCTO DE LOS ELEMENTOS DE SU DIAGONAL PRINCIPAL.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

12 SI UNA MATRIZ TIENE DOS LÍNEAS PROPORCIONALES, SU DETERMINANTE ES 0 (Y VICEVERSA)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

13 SI A UNA LÍNEA DE UNA MATRIZ SE LE SUMA UNA COMBINACIÓN LINEAL DE OTRAS LÍNEAS PARALELAS, EL DETERMINANTE NO VARÍA.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_1 : C_1 + 3\cdot C_3}{=} \begin{vmatrix} 3+3(-1) & 0 & -1 \\ 2+3\cdot 0 & 3 & 0 \\ -1+3\cdot 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

14 EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DIAGONAL ES EL PRODUCTO DE LOS ELEMENTOS DE SU DIAGONAL PRINCIPAL.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

15 $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$ POR LO QUE $|A^n| = |A|^n$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

marielmates

MATRIZ COMPLEMENTARIA DE a_{ij} $= M_{ij}$: MATRIZ QUE SE OBTIENE AL QUITAR LA FILA I Y LA COLUMNA J

MENOR COMPLEMENTARIO DE a_{ij} $= \alpha_{ij} = |M_{ij}|$

ADJUNTO DEL ELEMENTO a_{ij} $= A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$

SIGNOS: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

MATRIZ ADJUNTA $Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$: MATRIZ QUE SE OBTIENE AL SUSTITUIR CADA ELEMENTO DE A POR SU ELEMENTO ADJUNTO.

MATRIZ INVERSA DE A EXISTE SI $|A| \neq 0$ $\boxed{A^{-1} = \dfrac{Adj(A^T)}{|A|}}$

RECUERDA QUE $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -7 & -6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE LA INVERSA $|A| = -7$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

CALCULO DE UN DETERMINANTE USANDO LOS ADJUNTOS

EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ ES IGUAL A LA SUMA DE LOS PRODUCTOS DE LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA POR SUS ADJUNTOS CORRESPONDIENTES.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{31} = 1 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) + 0 \left(-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) + 4 \cdot \left(+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = 3 + 0 + (-28) = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{31} + (-1) \cdot A_{32} + 1 \cdot A_{33} = 4 \left(+\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) + (-1)\left(-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right) + 1 \cdot \left(+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = -28 + 2 + 1 = -25$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + (-4)F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -11 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + (-7)F_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -25 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-25) = -25$$

PARA CALCULAR DETERMINANTES DE ORDEN SUPERIOR A 3 PUEDES:
- DESARROLLARLO POR UNA LÍNEA Y SUS ADJUNTOS.
- CONVERTIRLO (APLICANDO TRANSFORMACIONES) EN UN DETERMINANTE DE UNA MATRIZ TRIANGULAR.

COMBINÁNDOLAS PUEDES CONSEGUIR EL NÚMERO MÁXIMO DE CEROS EN UNA LÍNEA Y DESARROLLAR POR ESA LÍNEA.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_4 \to C_4 + (-2)C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{21} =$$

$$= (-1) \cdot \left(-\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}\right) = (32 - 20 - 2) - (-4 - 16 + 20) = 10 - 0 = 10$$