MATRICES

marielmates

MATRIZ

Es un conjunto de mxn elementos colocados en m filas y n columnas

Dimensión: nº filas x nº columnas = mxn

Las matrices se nombran con letras mayúsculas: A, B, C...

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{21} elemento que esta en la fila 2 columna 1

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ CUADRADA matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.

MATRIZ IDENTIDAD O UNIDAD matriz cuadrada donde los elementos de la diagonal principal son unos y el resto ceros.

MATRIZ FILA matriz que solo tiene una fila.

MATRIZ COLUMNA matriz que solo tiene una columna.

MATRIZ NULA todos sus elementos valen cero.

MATRIZ TRASPUESTA DE A, es otra matriz A^t que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

MATRIZ SIMÉTRICA es una matriz cuadrada cuyos elementos a ambos lados de la diagonal principal son iguales.

MATRIZ ANTISIMÉTRICA, matriz cuadrada en la que los elementos a ambos lados de la diagonal principal son opuestos (iguales pero con distinto signo). Los elementos de la diagonal principal deben ser cero.

MATRIZ DIAGONAL matriz cuadrada donde los elementos que no están en la diagonal principal son cero.

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR (INFERIOR) todos los elementos por debajo (encima) de la diagonal principal son cero.

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA

Para sumar dos matrices solo tenemos que sumar elementos que ocupan la misma posición. Por ello, es necesario que ambas matrices tengan la misma dimensión.

PROPIEDADES

- Conmutativa $A+B=B+A$
- Asociativa $A+(B+C)=(A+B)+C$
- Elemento neutro: Matriz Nula $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}+A=A+\mathbf{0}=A$
- Elemento opuesto: $-A$, $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{0}$

MULTIPLICACION DE UN Nº POR UNA MATRIZ

Para multiplicar una matriz por un número, multiplicamos todos los elementos de la matriz por dicho número.

PROPIEDADES

- $k\cdot(A+B) = k\cdot A + k\cdot B$
- $(k+t)A = k\cdot A + t\cdot A$
- $(k\cdot t)A = k\cdot(t\cdot A)$
- Elemento unidad 1, $1\cdot A = A$

MULTIPLICACIÓN DE DOS MATRICES

Para poder multiplicar A·B se debe cumplir que nº columnas de A coincida con el nº de filas de B. La matriz resultante C tendrá dimensión: nº filas de A por nº columnas de B.

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B}=\underset{m\times p}{C}$$

"FILA POR COLUMNA"

1ª FILA POR 1ªCOLUMNA · 1ª FILA POR 2ªCOLUMNA · 1ª FILA POR 3ªCOLUMNA

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot3 & 2\cdot1+1(-2)+(-1)\cdot0 & 2(-1)+1\cdot2+(-1)(-1) \\ 0\cdot0+3\cdot1+(-2)\cdot3 & 0\cdot1+3(-2)+(-2)\cdot0 & 0(-1)+3\cdot2+(-2)(-1) \end{pmatrix}=$$

2ª FILA POR 1ªCOLUMNA · 2ª FILA POR 2ªCOLUMNA · 2ª FILA POR 3ªCOLUMNA

$$=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

https://marielmatesblog.wordpress.com/

mariel mates

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

- Asociativa $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
  $k\cdot(A\cdot B) = (k\cdot A)\cdot B$
- Distributiva $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$
  $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$
- Elemento neutro $A\cdot I = I\cdot A = A$
- En general $A\cdot B \neq B\cdot A$
  $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$
  $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$
  $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$
- No siempre existe el elemento inverso A^{-1}, matriz inversa de A.
- SI existe debe cumplir $A^{-1}\cdot A = A^{-1}\cdot A = I$

  Si una matriz tiene inversa se llama regular o inversible

  Si una matriz no tiene inversa se llama irregular

PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRASPUESTA

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t+B^t$
- $(k\cdot A)^t = k\cdot A^t$
- $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$ ¡CUIDADO, CAMBIA EL ORDEN!
- Si A es simétrica $A=A^t$

PROPIEDADES DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(k\cdot A)^{-1} = \frac{1}{k}\cdot A^{-1}$
- $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ ¡CUIDADO, CAMBIA EL ORDEN!
- $I^{-1} = I$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- En general $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

1er MÉTODO: GAUSS

Escribimos en una misma matriz $(A|I) \xrightarrow{\text{GAUSS}} (I|A^{-1})$

GAUSS
- * PERMUTAR FILAS (COLUMNAS)
- * MULTIPLICAR O DIVIDIR UNA LÍNEA POR UN Nº (así conseguimos los 1's)
- * SUSTITUIR UNA LÍNEA POR UNA COMBINACIÓN DE OTRAS PARALELAS (así conseguimos los 0's)

2º MÉTODO Aplicando la definición $A^{-1}\cdot A = I$ (mediante un sistema de ecuaciones)

ECUACIONES MATRICIALES

$AX=B$, $A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B$, $X=A^{-1}\cdot B$

$XA=B$, $XAA^{-1} = B\,A^{-1}$, $X= B\,A^{-1}$

$AX+B=C$, $AX=C-B$, $A^{-1}\cdot AX= A^{-1}(C-B)$, $X= A^{-1}(C-B)$

[SI MULTIPLICAS EN UN MIEMBRO DE LA ECUACIÓN A LA IZQUIERDA, EN EL OTRO MIEMBRO TAMBIÉN DEBES HACERLO A LA IZQUIERDA]

SISTEMAS MATRICIALES

Para resolverlos

1º Hacerlo de forma teórica (sin usar las matrices numéricas)

2º Sustituir en el resultado del apartado anterior las matrices numéricas

POTENCIA ENÉSIMA DE UNA MATRIZ

Trata de calcular las primeras potencias y así poder encontrar una regla que determine cualquier potencia de la matriz.

RANGO DE UNA MATRIZ

Es el número de líneas (filas o columnas) linealmente independientes. Por lo que, $rg(A)=rg(A^t)$.

Para calcular el rango aplicaremos Gauss:

* Trata de hacer ceros por debajo de la "diagonal principal" hasta que la matriz esté escalonada (no tenga rectángulos de 0's, salvo las filas enteras de ceros)
* Contamos el numero de filas no nulas.