TEMA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES

1. SISTEMAS DE ECUACIONES

Ecuaciones con varias incógnitas

Una ecuación con dos incógnitas es una igualdad en la hay dos variables, generalmente *x* e *y*, que están relacionadas entre sí. El concepto es análogo para tres o más incógnitas.

→ Las ecuaciones de grado uno se llaman lineales. (Ser de grado uno exige que las incógnitas lleven exponente 1 y que no estén multiplicadas o divididas entre sí).

- Las ecuaciones lineales con dos incógnitas son de la forma $\underline{ax+by=c}$, donde *a*, *b* y *c* son números; *x* e *y* son las incógnitas.

Una solución de la ecuación con dos incógnitas es cualquier par de números que verifican la igualdad. Pueden darse diciendo $x=x_1$ e $y=y_1$; o diciendo, la solución es el par $(x_1,\ y_1)$.

- Las ecuaciones lineales con tres incógnitas son de la forma $\underline{ax+by+cz=d}$, donde *a*, *b*, *c* y *d* son números; *x*, *y*, *z* son las incógnitas.

Una solución de la ecuación con tres incógnitas es cualquier trio de números que verifican la igualdad. Pueden darse diciendo $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$; o diciendo, la solución es la terna $(x_1,\ y_1,\ z_1)$.

Ejemplo:

Son ecuaciones con varias incógnitas las siguientes igualdades:

$x+2y=17$; $x^2-y=8$; $x\cdot y=-1$; $x+2y-z=4$.

La primera de ellas es de grado uno: es lineal. La segunda y tercera son de grado dos; la cuarta es lineal con tres incógnitas.

Dos soluciones para cada una de esas ecuaciones son:

$x+2y=17$ → son solución *x* = 1, *y* = 8: par (1, 8); y el par (19, –1). No es solución (2, 7).

$x^2-y=8$ → son solución *x* = 3, *y* = 1: par (3, 1); y el par (–2, –4). No es solución (2, 4).

$x\cdot y=-1$ → son solución *x* = 1, *y* = –1: par (1, –1); y el par (4, –1/4). No es solución (0, –1).

$x+2y-z=4$ → son soluciones las ternas (1, 0, –3) y (4, 1, 2). No es solución la terna (1, –1, 2).

En todos los casos, la solución se comprueba sustituyendo en la ecuación correspondiente.

Así, para la última ecuación, la terna (4, 1, 2) es solución, pues si *x* = 4, *y* = 1 y *z* = 2, al sustituir en la igualdad $x+2y-z=4$, se obtiene: 4 + 2 ·1 – 2 = 4.

En cambio, (1, –1, 2) no es solución, pues al sustituir en la ecuación se obtiene: 1 + 2 · (–1) –2 = 1 ≠ 4.

Sistemas lineales con dos incógnitas (Repaso)

Su forma más simple es $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ → Las incógnitas son *x* e *y*; las demás letras representan números: a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} se llaman coeficientes; b_1 y b_2, términos independientes.

Son lineales porque las incógnitas *x* e *y* llevan exponente 1; tampoco se multiplican o dividen.

→ La solución de un sistema es un par de valores de *x* e *y* que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Cuando la solución es única se dice que es compatible determinado (SCD).

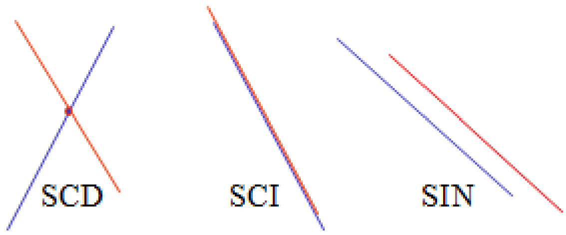
Si tiene infinitas soluciones se dice que es compatible indeterminado (SCI).

Si no tiene solución se llama incompatible (SIN).

<u>Interpretación geométrica</u>

Cada ecuación de la forma $ax+by=c$ determina los puntos de una recta en el plano. Para representarla basta con dar dos de sus puntos, que son dos de las soluciones de su ecuación.

Por tanto, un sistema de dos ecuaciones lineales está asociado a dos rectas.



- Esas rectas pueden cortarse, siendo el punto de corte la solución del sistema $\rightarrow$ (SCD).
- Si las rectas son coincidentes, todos sus puntos son solución: hay infinitas soluciones $\rightarrow$ (SCI).
- Si las rectas son paralelas, no hay ningún punto en común, no hay solución $\rightarrow$ (SIN).

<u>Observaciones</u>:

Dos rectas son coincidentes cuando tienen proporcionales sus coeficientes y sus términos independientes. Las ecuaciones (rectas) $2x+3y=-1$ y $4x+6y=-2$ son coincidentes.

Dos rectas son paralelas cuando tienen proporcionales sus coeficientes, pero no sus términos independientes. Las ecuaciones (rectas) $2x+3y=-1$ y $4x+6y=3$ son paralelas.

Resolución de sistemas

<u>Resolver</u> un sistema es encontrar <u>todas</u> sus soluciones. Para ello, se ha de transformar el sistema original en otro equivalente que tenga, al menos, una ecuación con una sola incógnita, la cual se podrá despejar con las técnicas habituales.

$\rightarrow$ Un sistema es equivalente a otro si ambos tienen las mismas soluciones.

Las transformaciones que pueden hacerse en un sistema, sin alterar sus soluciones, son:

1. Transponer números o incógnitas de un miembro a otro en cada ecuación.
2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación, por un número distinto de cero.
3. Sumar o restar a una ecuación otra multiplicada previamente por un número.

Estas transformaciones se concretan en los tres métodos clásicos de resolución de sistemas:

<u>Método de sustitución</u>

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y su valor se sustituye en la otra. Se obtiene una nueva ecuación, cuya solución permite hallar la del sistema.

<u>Método de reducción</u>

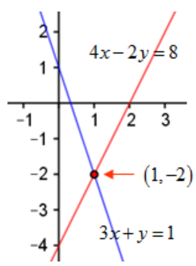
Se multiplica cada ecuación por un número distinto de 0, con el fin de que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales (u opuestos). Restando (o sumando) ambas ecuaciones, miembro a miembro, se obtiene una nueva ecuación cuya solución permite hallar la del sistema.

<u>Método de igualación</u>

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualando ambas incógnitas se obtiene otra ecuación. La solución de esta nueva ecuación permite hallar la solución del sistema.

Ejemplo:

Para resolver por sustitución el sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$ se procede así:



1) Se despeja y en la segunda ecuación, $E2$: $y=1-3x$.

2) Se lleva (se sustituye) su valor a la primera ecuación: $4x-2(1-3x)=8$.

3) Se resuelve $4x-2(1-3x)=8 \Rightarrow 4x-2+6x=8 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$.

4) El valor x = 1 se lleva a la ecuación despejada: $y=1-3\cdot1=-2$.

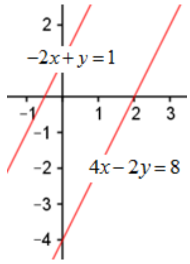
La solución del sistema es: x = 1 e y = –2. (Comprueba que es correcto).

2. DISCUSIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES (2 × 2)

Discutir un sistema consiste en determinar si es compatible determinado (SCD), compatible indeterminado (SCI) o incompatible (SIN).
→ El sistema del ejemplo anterior es compatible determinado.

→ El sistema $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -2x+y=1 \end{cases}$ es <u>incompatible</u>: no tiene solución.

Al resolverlo, por cualquiera de los métodos (lo vemos por reducción) se obtiene una igualdad imposible. En efecto:



$$\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2\cdot E2 \end{matrix}\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -4x+2y=2 \end{cases} \to \text{sumando miembro a miembro} \Rightarrow$$

0 = 10, absurdo.

Recuerda que, gráficamente, está relacionado con dos rectas paralelas.

→ El sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ -4x-2y=-6 \end{cases}$ es <u>compatible indeterminado</u>: tiene infinitas soluciones.

Al resolverlo, por cualquiera de los métodos se pierde una ecuación (o aparece repetida). En efecto:

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ -4x-2y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\cdot E1 \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} 4x+2y=6 \\ -4x-2y=-6 \end{cases} \to \text{sumando miembro a miembro} \Rightarrow 0 = 0.$$

Sistemas lineales compatibles indeterminados (2 × 2): ¿cómo se resuelven?

Lo acabamos de indicar: son sistemas con <u>infinitas soluciones</u> (SCI). Las ecuaciones que conforman estos sistemas se repiten: son equivalentes; y sus gráficas se corresponden con dos rectas idénticas. Algebraicamente, al transformar las igualdades se llegaría a la igualdad 0 = 0.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ es compatible indeterminado. La segunda ecuación ($E2$) es el doble de la primera $(E2=2\cdot E1)$: son ecuaciones equivalentes. Por tanto: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \{2x-y=3$, pues la segunda ecuación sobra (es reiterativa).

En estos casos, las soluciones (que son infinitas) deben darse dependiendo de una de las incógnitas (que pasa a considerarse un <u>parámetro</u>: una letra que puede sustituirse por cualquier número real). Esas soluciones se llaman paramétricas. En el ejemplo que nos ocupa resulta más fácil despejar y en función de x, que al revés. Así, en la primera ecuación ($E1$) se deduce que $y=2x-3$.

Dando valores a x se obtienen las distintas soluciones del sistema. Así, si x = 1, y = –1; si x = 3, y = 3; si x = –1, y = –5…

→ Otra alternativa (la recomendada) consiste en hacer x = λ y escribir él conjunto de soluciones en la forma: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda-3 \end{cases}$ → También podría escribirse x = h, siendo la solución $\begin{cases} x=h \\ y=2h-3 \end{cases}$.

Si en $E1$ se despeja x en función de y, se tendría:

$$x=\frac{3+y}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}y\text{; y si se dice que } y=t \text{ (o cualquier otra letra)} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2} \\ y=t \end{cases}.$$

Esta solución es aparentemente distinta de la anterior, pero ambas generan los mismos pares de soluciones. (Comprueba que para y = –1; 3; –5…, los valores de x son los dados arriba).

3. SISTEMAS CON UN PARÁMETRO: DISCUSIÓN

Qué es un parámetro

En Matemáticas, un parámetro es un número que se deja indeterminado; ese número se denota con una letra cualquiera, λ, *t*, *h*, *p*, *m*, … En una ecuación (o en un sistema) ocupa la posición de un coeficiente o de un término independiente. Así, en la ecuación $2x - y = m$, la *m* puede tomar el valor que se quiera (aunque a veces, hay algún valor que no puede tomar; en eso consiste la *discusión*, en decir qué pasa si *m* toma o no un determinado valor). Obviamente, la ecuación cambia al hacerlo *m*: si *m* = 0, la ecuación es $2x - y = 0$; si *m* = –5, la ecuación será $2x - y = -5$.

¿Es el significado de *m* análogo al de *x* o *y*? -No.

→ En una ecuación, las incógnitas *x* e *y* se condicionan una a otra: para un valor concreto de *x*, la *y* solo puede tomar el valor que cumpla la ecuación. Si la ecuación es $2x - y = 0$, para *x* = 4, la *y* tiene necesariamente que tomar el valor 8, *y* = 8.

→ El parámetro, en cambio, puede tomar cualquier valor; y ese valor genera una ecuación en cada caso. Es lo que se ha dicho más arriba para $2x - y = m$: si *m* = 0, se obtiene $2x - y = 0$; si *m* = –5, la ecuación es $2x - y = -5$. Y cada una de estas ecuaciones tiene soluciones distintas.

→ Un parámetro también puede darse en la solución. Es lo que se ha decidido en el sistema anterior, $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 3 \end{cases}$. Aquí la única variable *libre* es λ, aunque al variar λ también lo hacen *x* e *y*, pero ambas están condicionadas por λ; y no al revés. Así, si λ = 1, entonces *x* = 1 e *y* = –1; o si λ = 7, se deduce que *x* = 7 e *y* = 11.

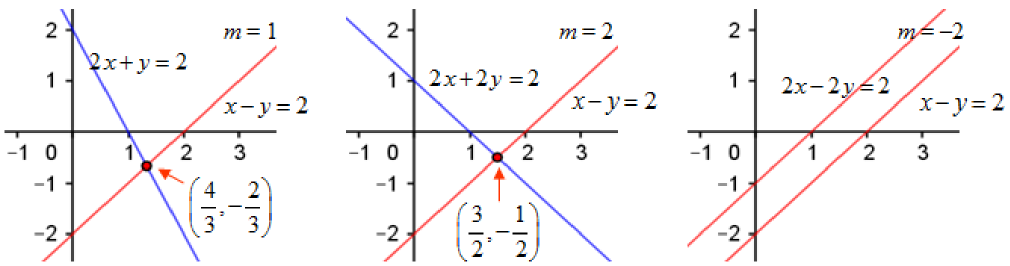
Sistemas con un parámetro

En los sistemas con un parámetro alguno de los coeficientes o términos independientes está indeterminado, se ha expresado con una letra. Por ejemplo, en el sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$ aparece una *m*, que es el coeficiente de la *y* en *E*2. Si esa *m* cambia de valor, el sistema y su la solución también lo hacen, serán diferentes. Así:

- Si *m* = 1, el sistema es $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$, cuya solución es $x = \frac{4}{3}; y = -\frac{2}{3}$. (Compruébalo).
- Si *m* = 2, el sistema es $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$, cuya solución es $x = \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{2}$. (Compruébalo).
- Si *m* = –2, el sistema es $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$, que no tiene solución. En efecto, si se multiplica por 2 la

primera ecuación se obtiene: $\begin{matrix} 2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$ → y restando *E*1 – *E*2 se tiene 0 = 2, que es absurdo.

A continuación se da su interpretación geométrica. (Puede representarse con **GeoGebra**)



Un método de discusión

Lo que acabamos de hacer sería interminable; además, ¿cómo se ha encontrado el valor $m = -2$, para el cuál el sistema es incompatible?; ¿habrá más casos especiales?
La respuesta a esta pregunta se encuentra resolviendo el sistema en función del parámetro; a continuación, se analiza si esa solución es posible y, en su caso, si depende o no de los valores que tome el parámetro.

Así, para el ejemplo anterior $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases}$, resolviendo el sistema (por reducción) se tiene:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \begin{matrix} 2E1 \\ \ \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \text{(restando)} \begin{matrix} \ \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-2 \quad 4 \\ (m+2)y=-2 \end{cases} \to \text{(despejando)}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{-2}{m+2}$. Esta solución no tiene sentido cuando el denominador es 0. Esto es, si $m+2=0$; que se cumple para $m = -2$. (Para cualquier otro valor de m no hay dificultades).
Por tanto, la discusión puede hacerse como sigue:

- Si $m = -2$, el sistema es incompatible.
- Si $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado.

Para cualquiera de estos casos (con $m \neq -2$), la solución completa se halla como siempre:

Si $y = \dfrac{-2}{m+2} \to$ (sustituyendo en $E1$: $x-y=2$) $\Rightarrow x - \dfrac{-2}{m+2} = 2 \Rightarrow x = 2 + \dfrac{-2}{m+2} \Rightarrow x = \dfrac{2m+2}{m+2}$.

Observación:

La solución genérica del sistema, para $m \neq -2$, es $x = \dfrac{2m+2}{m+2}$ e $y = \dfrac{-2}{m+2}$. Para cada valor de m se obtiene una solución, que se encuentra sustituyendo el valor de m en esas fórmulas. Así, por ejemplo: si $m = 0 \to x = 1$, $y = -1$; si $m = -5 \to x = 8/3$; $y = 2/3$; …

Otra forma de discusión

Consiste en transformar el sistema, mediante el método de reducción (restando o sumando ecuaciones), buscando que la segunda ecuación quede con una sola incógnita. Así:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \to \dots \to \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a'_{22}y = b'_2 \end{cases}.$$ (También podría quedar $E2 \equiv a'_{21}x = b'_2$).

Se analiza ahora la segunda ecuación: $E2 \equiv a'_{22}y = b'_2$, pudiendo suceder:

1) Si $a'_{22} \neq 0$, puede despajarse y: $y = \dfrac{b'_2}{a'_{22}} \to$ sistema compatible determinado: solución única.

2) Si $a'_{22} = 0$ y $b'_2 = 0$, la ecuación $E2$ queda $0y = 0 \to$ sistema compatible indeterminado: la incógnita y puede tomar cualquier valor; para cada uno de esos valores de y, la x tomará el correspondiente.

3) Si $a'_{22} = 0$, pero $b'_2 \neq 0$, la ecuación $E2$ queda $0y \neq 0$, que es imposible $\to$ sistema incompatible.

En el sistema de arriba se hace:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \dots \begin{matrix} 2E1 \\ E2-2E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x-2 \quad 4 \\ (m+2)y=-2 \end{cases} \to \left[a'_{22} = m+2;\ b'_2 = -2\right].$$

Ahora puede observarse:

1) Si $m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$, SCD.

2) Como $b'_2 = -2 \neq 0$ el sistema no puede ser indeterminado.

3) Como $a'_{22} = m+2 = 0$ si $m = -2$, siendo $b'_2 \neq 0$, para $m = -2$ el sistema es incompatible.

$\to$ A continuación se proponen tres ejercicios con el fin de asimilar lo indicado.

Ejercicio 1

Discute, en función de los valores del parámetro *m*, el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases}$.

<u>Solución</u>:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 2x+my=2 \end{cases} \to \text{(Restando)} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2 \quad -2y \quad 2 \\ (m+2)y=0 \end{cases}.$$

Si *m* = –2, la segunda ecuación queda $(-2+2)y=0 \Leftrightarrow 0y=0 \Leftrightarrow 0=0$ → SCI.

Para cualquier otro valor se *m*, la 2ª ecuación queda $(m+2)y=0 \Rightarrow y=0$ → SCD.

En ningún caso el sistema es incompatible.
Por tanto:

- Si $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} 2x-2y \quad 2 \\ (m+2)y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2\cdot 0=2 \to x=1 \\ y=0 \uparrow \end{cases}$.
- Si *m* = –2, el sistema es indeterminado: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+my=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 0=0 \end{cases}$ (SDI) $\Rightarrow x=1+y$.

Para cada valor de *y* se obtiene un valor de *x*. Por ejemplo, si *y* = 2, *x* = 3; si *y* = –1, *x* = 0; …

La solución suele darse en la forma: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t \end{cases}$, siendo *t* cualquier número real: $t \in$ **R**.

Ejercicio 2

Sea el sistema $\begin{cases} 4x-y=-6 \\ kx+2y=2 \end{cases}$. Calcula los valores que debe tomar *k* para que el sistema sea:

a) Compatible determinado. b) Compatible indeterminado. c) Resuélvelo cuando $k=-1$.
<u>Solución</u>:
El sistema inicial se transforma como sigue:

$$\begin{cases} 4x-y=-6 \\ kx+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ kx+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ (8+k)x=-10 \end{cases}.$$

La segunda ecuación es: $E2 \equiv (8+k)x=-10$ → Puede despejarse *x*: $x=-\dfrac{10}{k+8}$, expresión que tiene sentido cuando $k \neq -8$; no tiene sentido si *k* = –8 → la *E*2 quedaría: $0x=-10$, que es imposible.
Por tanto:
a) Si $k \neq -8$, el sistema es compatible determinado. (Si *k* = –8, SIN).
b) El sistema nunca es compatible indeterminado.

c) Si *k* = –1, el sistema queda: $\begin{cases} 4x-y=-6 \\ -x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ -x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 8x-2y=-12 \\ 7x=-10 \end{cases}$.

Despejando en *E*2 y sustituyendo en *E*1: $x=-\dfrac{10}{7}$ → $4\left(-\dfrac{10}{7}\right)-y=-6 \Rightarrow y=-\dfrac{40}{7}+6 \Rightarrow y=\dfrac{2}{7}$.

Ejercicio 3

Sea el sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$. Comprueba que si *b* = –2, el sistema es incompatible,

<u>Solución</u>:

Si *b* = –2, el sistema es $\begin{cases} 4x-2y=5 \\ -2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ -2E2 \end{matrix}\begin{cases} 4x-2y=5 \\ 4x-2y=-8 \end{cases}$ → Contradictorio: $5 \neq -8$.

4. SISTEMAS DE TRES ECUACIONES Y TRES INCÓGNITAS

Un sistema de tres ecuaciones lineales de con tres incógnitas, en su forma estándar, es un conjunto de tres igualdades de la forma: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$.

Las letras x, y, z son las incógnitas; a_{ij} y b_i son números, llamados coeficientes (de las incógnitas) y términos independientes, respectivamente (algunos pueden ser 0).
Un sistema es lineal cuando las incógnitas van afectadas por el exponente 1, que no se indica; tampoco se multiplican o dividen entre sí.

- La solución del sistema es el conjunto de valores de x, y, z que verifican sus ecuaciones.
- Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Discutir un sistema es determinar sus posibilidades de solución. Puede ser:
  – compatible determinado, cuando el sistema tiene una única solución (SCD).
  – compatible indeterminado, si tiene infinitas soluciones (SCI).
  – incompatible, cuando no tiene solución (SIN).

Ejemplos:

a) La terna $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$ es solución del sistema $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ -2x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - 5z = 0 \end{cases}$. Cumple las tres ecuaciones (Compruébese). En cambio, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ no es solución: cumple la primera y segunda ecuaciones; pero no la tercera.

b) Los sistemas $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 3x + y - 2z = 7 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + 3y - 3z = 8 \end{cases}$ son equivales, pues ambos tienen por solución los valores $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. (Puede comprobarse).

Observación: Una forma sencilla de obtener sistemas equivalentes consiste en sumar o restar las ecuaciones entre sí (miembro a miembro; incógnita a incógnita). Aquí, el segundo sistema se ha obtenido cambiando $E1$ por $E1 + E2$, y $E3$ por $E3 - E2$. (Compruébalo).

c) Los sistemas $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 6x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + 3z = -3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$ son compatibles indeterminados. Ambos tienen infinitas soluciones. Por ejemplo, las ternas (–3, 5, 0) y (0, 1, –1).
En el primero de ellos puede verse que $E3 = E1 + E2$. En el segundo, falta una ecuación.

d) El sistema $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = -2 \end{cases}$ es incompatible. Puede verse que las ecuaciones segunda y tercera son contradictorias. Una misma cosa, $x - 2y + 3z$, no puede valer, a la vez, 0 y –2.

5. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN: MÉTODO DE GAUSS

Es el más elemental de resolución es el método de sustitución . Consiste en despejar una incógnita en alguna de las ecuaciones y llevar su valor a las otras. Se obtiene así un sistema asociado al primero, pero con una ecuación y una incógnita menos, fácil de resolver.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x \quad\ -z=1 \\ 3x-y-2z=3 \end{cases} \rightarrow z=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+(2x-1)=0 \\ 3x-y-2(2x-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=1 \\ -x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ z=5 \end{cases}.$$

Método de Gauss

Consiste en transformar el sistema inicial, $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$, en otro equivalente a él, de la forma: $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ \qquad a'_{22}y+a'_{23}z=b'_2 \\ \qquad\qquad \boxed{a''_{33}z=b''_3} \end{cases}$. (Sistema escalonado: "triangular").

El paso de un sistema a otro se consigue mediante transformaciones de Gauss:
1) Un sistema no cambia si sus ecuaciones se escriben en distinto de orden.
2) Un sistema no cambia si una ecuación se multiplica por un número distinto de 0.
3) Un sistema no cambia si una ecuación se sustituye por ella misma más la suma o resta de otra.

Así pues, sumando o restando ecuaciones se elimina la incógnita x de la segunda ecuación ($E2$); y las incógnitas x e y de la tercera ecuación ($E3$).
Estudiando la tercera ecuación resultante, $a''_{33}z=b''_3$, pueden determinarse las posibilidades de solución del sistema, pues:

- Si $a''_{33}\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado (SCD).

La incógnita z puede despejarse; su valor se lleva a las otras dos ecuaciones y se obtienen y y x.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3=0 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (SCI).

La tercera ecuación queda: $0\cdot z=0$, que se cumple para cualquier valor de z.

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3\neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible (SIN) $\rightarrow E3$ queda: $0\cdot z\neq 0$, absurdo.

Observación: No es imprescindible que el sistema quede triangular; lo importante es dejar una ecuación con una sola incógnita. A partir de esa ecuación se hará la discusión.

Ejemplos:

a) Si una vez transformado el sistema quedase de la forma $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ \quad y-3 \ \ =-5 \\ \quad -2z=-6 \end{cases}$, como $a''_{33}=-2\neq 0$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado. Su solución es $z = 3$; $y = 4$; $x = 7$. (Compruébalo).

b) Si el sistema quedase de la forma $\begin{cases} x+y-3z=0 \\ \quad -y \qquad =-4 \\ \quad 2y-3z=-1 \end{cases}$, su solución se halla despejando y en $E2$ y sustituyendo en $E3$ y en $E1$, por ese orden. Su solución es $y = 4$; $z = 3$; $x = 5$.

Practicando con el método de Gauss
Las transformaciones en un sistema se hacen con el objetivo de eliminar una incógnita en la segunda ecuación (*E*2); y de eliminar dos incógnitas en la tercera ecuación (*E*3).
A continuación, se despeja la incógnita de *E*3, se lleva su valor a *E*2 y se despeja la incógnita correspondiente; por último, esas dos incógnitas se sustituyen en *E*1 y se despeja la tercera.
→ Para eliminar una incógnita se hace una generalización del método de reducción, visto en sistemas 2 × 2: hay que conseguir que una incógnita tenga el mismo coeficiente en dos ecuaciones. Restando, miembro a miembro, esas ecuaciones se eliminará esa incógnita.
→ Cuando se escribe, por ejemplo, *E*3 – 2*E*1 significa que a la tercera ecuación se le resta el doble de la primera, miembro a miembro. Igualmente, 3*E*1 significa que *E*1 se ha multiplicado por 3.

Ejemplo:

El sistema $\begin{cases} 2x+y-3z=11 \\ 3x-2y+z=-5 \\ x+y-2z=8 \end{cases}$, puede transformarse como sigue:

1) Se busca el mismo coeficiente para *x* en las tres ecuaciones. Ese coeficiente puede ser 6. Se consigue así: $\begin{array}{r} 3E1 \\ 2E2 \\ 6E3 \end{array}\begin{cases} 6x+3y-9z=33 \\ 6x-4y+2z=-10 \\ 6x+6y-12z=48 \end{cases}$.

2) Se restan las ecuaciones: $\begin{array}{r} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{array}\begin{cases} 6x+3y-9z=33 \\ -7y+11z=-43 \\ 3y-3z=15 \end{cases}$.

3) Se busca el mismo coeficiente para *y* en la *E*2 y *E*3; a continuación, se suman: *E*3 + *E*2.

$$\begin{array}{r} \\ 3E2 \\ 7E3 \end{array}\begin{cases} 6x+3y-9z=33 \\ -21y+33z=-129 \\ 21y-21z=105 \end{cases} \to \begin{array}{r} \\ \\ E3+E2 \end{array}\begin{cases} 6x+3y-9z=33 \\ -21y+33\ \ =-129 \\ 12z=-24 \end{cases}.$$

4) Se despeja *z* y se sustituye de manera ordenada en *E*2 y en *E*3.

$$\begin{cases} 6x+3y-9z=33 \\ -21y+33z=-129 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+3y-9z=33 \\ -21y+33\cdot(-2)=-129 \\ z=-2\uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+3y-9z=33 \\ -21y=-63\to y=3 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6x+3\cdot 3-9\cdot(-2)=33\to 6x=6\to x=1 \\ y=3\uparrow \\ z=-2\uparrow \end{cases}. \text{ La solución es } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases}.$$

Primera observación: Las transformaciones de Gauss no son rígidas. Por ejemplo, el sistema anterior se hace más rápido y sencillo si se procede de abajo arriba. Así:

$$\begin{cases} 2x+y-3z=11 \\ 3x-2y+z=-5 \\ x+y-2z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} E1-2E3 \\ E2-3E3 \\ \end{array}\begin{cases} -y+z=-5 \\ -5y+7z=-29 \\ x+y-2z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 5E1-E2 \\ \\ \end{array}\begin{cases} -2z=4 \\ -5y+7\ \ =-29 \\ x+y-2z=8 \end{cases}.$$

Por último, despejando en *E*1 y sustituyendo hacia abajo:

$$\begin{cases} -2z=4\to z=-2 \\ -5y+7z=-29 \\ x+y-2z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2\downarrow \\ -5y+7(-2)=-29\to -5y=-15\to y=3\downarrow \\ x+y-2z=8\to\to x+3-2(-2)=8\to x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases}.$$

<u>Segunda observación</u>: Las transformaciones de Gauss se facilitan si se busca una incógnita con coeficiente 1 o –1: a partir de ese 1 es fácil calcular el doble o el triple, y sumar o restar según convenga. Como el método se aplica más fácilmente de arriba abajo, si fuese necesario pueden cambiarse de orden las ecuaciones.

Ejemplo:

Así, en el sistema $\begin{cases} 2x-y+z=-4 \\ x+y-3z=2 \\ 3x+y+5z=10 \end{cases}$, cambiando de orden las dos primeras ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x-y+z=-4 \\ 3x+y+5z=10 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7z=-8 \\ -2y+14z=4 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ 2E2 \\ 3E3 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -6y+14z=-16 \\ -6y+42z=12 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-3z=2 \\ -3y+7 \quad =-8 \\ 28z=28 \end{cases} \Rightarrow z=1 \to \begin{cases} x+y-3=2 \\ -3y+7=-8 \\ z=1\uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \\ z=1 \end{cases}.$$

El sistema es compatible determinado (SCD). Su solución es $x = 0$, $y = 5$, $z = 1$.

Resolución de un sistema compatible indeterminado

Como se dijo más atrás:

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_{3}=0 \Leftrightarrow E3\equiv 0z=0$, que se cumple para cualquier valor de z; entonces, el sistema es compatible indeterminado (SCI).

→ La solución del sistema se dará en función de z, pudiendo hacerse $z = t$; o $z = \lambda$;…

En la práctica, la indeterminación se descubre porque:

1) Aparece una ecuación repetida. Por ejemplo: $E3\equiv E2$; o $E3=k\cdot E2$. En este caso, se quita una de las ecuaciones repetidas.

2) Se obtiene una ecuación del tipo 0 = 0. En este caso, ha desaparecido una ecuación.

→ Observa que el sistema queda con <u>dos</u> ecuaciones y <u>tres</u> incógnitas: por eso es indeterminado.

Ejemplo:

El sistema

$$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ x+2y-3z=3 \\ 2x+3y-4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ y-2z=5 \\ y-2z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ -2z=5 \\ \cancel{0=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=-2 \\ y-2z=5 \end{cases}.$$

Como la tercera ecuación queda: $E3\equiv(0=0)$, el sistema es compatible indeterminado (SCI).

La solución puede darse en función de z. Así:

$$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ y-2z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2+z \\ y=5+2z \end{cases} \to \text{(sustituyendo)} \begin{cases} x+(5+2z)=-2+z \to x=-7-z \\ y=5+2z\uparrow \end{cases}.$$

La solución puede darse de cualquiera de las dos formas siguientes, prefiriéndose la segunda:

1.ª: $\begin{cases} x=-7-z \\ y=5+2z \end{cases}$; con z variable. 2.ª: $\begin{cases} x=-7-t \\ y=5+2 \\ z=t \end{cases}$, con $t\in\mathbf{R}$.

→ Para cada valor de z (de t) se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

Si $t = 0$, la solución es: $x = -7$; $y = 5$; $z = 0$. Si $t = -3$, la solución es: $x = -4$; $y = -1$; $z = -3$.

Hay infinitas soluciones.

Sistemas incompatibles
Como se dijo anteriormente:

- Si $a''_{33}=0$ y $b''_3 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema es incompatible (SIN) $\to E3$ queda: $0{\cdot}z \neq 0$, absurdo.

Se descubren cuando al hacer las transformaciones de Gauss aparece una ecuación sin sentido, del tipo 0 = 1.

Ejemplo:
Al hacer transformaciones en el sistema siguiente se tiene:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 3x-y \quad\;\; =2 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to E2-2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+3z=-2 \\ -4y+3z=-1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \to \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=1 \\ -4y+3z=-2 \\ 0=1 \end{cases}.$$

Como 0 = 1 es falso, el sistema propuesto es incompatible.
<u>Observación</u>: Que un sistema sea incompatible indica que sus ecuaciones son contradictorias.

Discusión de un sistema con un parámetro
Aunque en el próximo curso se estudiarán estos sistemas en profundidad, aquí, para fijar el método de Gauss, se plantea la discusión de un sistema con un parámetro. Se estudia con dos ejercicios.

Ejercicio 4

Discutir, en función de los valores de *m* el sistema $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+mz=1 \end{cases}$.

Haciendo transformaciones de Gauss, se tiene:

$$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+mz=1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \Leftrightarrow E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ y-2z=5 \\ y+(m+2)z=5 \end{cases} \begin{matrix} \\ \Leftrightarrow \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ y-2 \quad =5 \\ \boxed{(m+4)z=0} \end{cases}.$$

La discusión se hace considerando $E3 \equiv a''_{33}z=b''_3$, donde $a''_{33}=m+4$ y $b''_3=0$. Con esto:

- Si $a''_{33}=m+4\neq 0$: si $m \neq -4 \to$ el sistema tiene solución única (SCD).

$\to$ Siempre que $m \neq -4$, la solución del sistema será: $z = 0$; $y = 5$; $x = -7$.

- Si $a''_{33}=m+4=0$: si $m = -4$; como $b''_3=0 \to$ el sistema tiene infinitas soluciones (SCI).

$\to$ Si que $m = -4$, el sistema quedaría $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ y-2z=5 \end{cases}$, cuya solución se ha dado antes.

- En ningún caso el sistema resulta incompatible.

Ejercicio 5
Si en el ejercicio anterior se cambia la tercera ecuación por: $E3 \equiv 2x+3y+mz=-1$; entonces:

$$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+mz=-1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \Leftrightarrow E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ y-2z=5 \\ y+(m+2)z=3 \end{cases} \begin{matrix} \\ \Leftrightarrow \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y-z=-2 \\ -2z=5 \\ \boxed{(m+4)z=-2} \end{cases}.$$

Volviendo a *E*3:

- Si $a''_{33}=m+4\neq 0$: si $m \neq -4 \to$ el sistema tiene solución única (SCD).

$\to$ Siempre que $m \neq -4$, la solución del sistema dependerá del valor que se dé a *m*. Así, por ejemplo, si $m = -2$, la solución será: $z = -1$; $y = 3$; $x = -6$.

- Si $a''_{33}=m+4=0$: si $m = -4$; como $b''_3=-2 \Rightarrow E3 \equiv 0=-2 \to$ el sistema es incompatible.
- En ningún caso el sistema resulta indeterminado.

6. PROBLEMAS DE SISTEMAS

Como en cualquier problema, en los que dan lugar a un sistema de ecuaciones, el proceso a seguir puede ser:
1) Leerlo despacio y entenderlo (también el significado de las palabras del enunciado).
2) Definir las incógnitas.
3) Descubrir los datos y las relaciones algebraicas entre las incógnitas y los datos: escribir las ecuaciones.
4) Expresar esas ecuaciones en la forma estándar y resolver el sistema obtenido.

→ A continuación se proponen cuatro problemas con enunciado. Te sugiero que procures plantearlos y resolverlos por su cuenta (tapa lo aquí escrito); después, comprueba tu solución.

Problema 1
En los grupos A, B y C, del Grado de Economía de una universidad hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en el grupo A coincide con los del grupo B más el doble de los del grupo C. Los alumnos matriculados en el grupo B más el doble de los del grupo A superan en 250 al quíntuplo de los del grupo C. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada grupo.
Solución:
Si el número de alumnos de los grupos A, B y C son *x*, *y*, *z*, respectivamente, se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=350 \\ x=y+2z \\ 2x+y=5z+250 \end{cases} \to \text{(Se “arregla”)} \begin{cases} x+y+z=350 \\ x-y-2z=0 \\ 2x+y-5z=250 \end{cases} \to \text{(pivotando en } x \text{ de } E1) \to$$

$$\to \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=350 \\ -2y-3z=-350 \\ -y-7z=-450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=350 \\ 2y+3z=350 \\ -11z=-550 \end{cases} \Rightarrow z=50,\ y=100,\ x=200.$$

Hay 200 alumnos matriculados en el grupo A, 100 en el B y 50 en el C.

Problema 2
Una empresa ha gastado 33500 € en la compra de un total de 55 ordenadores portátiles de tres clases A, B y C, cuyos costes por unidad son de 900 €, 600 € y 500 € respectivamente. Sabiendo que la cantidad invertida en los de tipo A ha sido las tres cuartas partes que la invertida en los de tipo B, averiguar cuántos aparatos ha comprado de cada clase.
Solución:
Si el número de ordenadores que se compran de las clases A, B y C son *x*, *y*, *z* respectivamente, se tiene:
Cantidad gastada: $900x+600y+500z=33500$ → (dividiendo entre 100) → $9x+6y+5z=335$.
Número de ordenadores: $x+y+z=55$.
Inversión: en ordenadores del tipo A, $900x$; en ordenadores del tipo B, $600y$.
Lo invertido en A son $\frac{3}{4}$ de lo invertido en B: $900x=\frac{3}{4}\cdot 600y \Rightarrow 3600x=1800y \Rightarrow 2x-y=0$.
Así se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 9x+6y+5z=335 \\ x+y+z=55 \\ 2x-y\quad=0 \end{cases} \to \begin{matrix} E1-5E2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 4x+y\quad=60 \\ x+y+z=55 \\ 2x-y\quad=0 \end{cases} \to \begin{matrix} E1+E3 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 6x=60 \to x=10 \\ x+y+z=55 \\ 2x-y\quad=0 \end{cases} \Rightarrow y=20,\ z=25.$$

Se compran 10 ordenadores del tipo A, 20 del tipo B y 25 del tipo C.

Problema 3

La suma de las edades de una madre y sus dos hijos es de 60 años. Dentro de 10 años la suma de las edades de los hijos será la actual de la madre. Por último, cuando nació el pequeño, la edad de la madre era 8 veces la del hijo mayor. ¿Cuántos años tiene cada uno de los hijos?

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* las edades de la madre, del hijo mayor y del menor respectivamente.

Los datos pueden organizarse mediante una tabla:

	Madre	Hijo mayor	Hijo pequeño
Edad actual	x	y	z
Dentro de 10 años		$y + 10$	$z + 10$
Cuando nació el pequeño: hace *z* años	$x - z$	$y - z$	0

Por el enunciado, se deducen las ecuaciones:

$x + y + z = 60$ → (suma de las edades actuales);

$y + 10 + z + 10 = x$ → (suma de edades de los hijos dentro de 10 años = a la actual de la madre);

$x - z = 8(y - z)$ → (relación de edades cuando nació el hijo pequeño).

El sistema formado por las 3 ecuaciones, una vez ordenado y simplificado queda:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=20 \\ x-8y+7z=0 \end{cases}.$$

Por Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=20 \\ x-8y+7z=0 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=60 \\ -2y-2z=-40 \\ -9y+6z=-60 \end{cases} \to \begin{matrix} \\ \\ E3/3 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=60 \\ -2y-2z=-40 \\ -3y+2z=-20 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{matrix} \\ \\ E3+E2 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=60 & \to x+12+8=60 \to x=40 \\ -2y-2z=-40 & \to -24-2z=-40 \to z=8 \\ -5y=-60 & \to y=12 \end{cases}$$

La madre tiene 40 años; los hijos, 12 y 8 años.

Problema 4

María tiene el triple de dinero que Fernando; Fernando el doble de dinero que Luís. Entre Fernando y Luís tienen la mitad de dinero que María.

a) ¿Puede saberse con esta información cuánto dinero tiene cada uno?

b) Si Luís tiene 50 €, ¿cuánto dinero tienen María y Fernando?

Solución:

a) Si María tiene *x* euros, Fernando, *y* euros, y Luís, *z* euros, con los datos del problema se tiene:

$$\begin{cases} x=3y \\ y=2 \\ y+z=x/2 \end{cases} \Rightarrow \text{Trasponiendo y ordenando l incógnitas} \to \begin{cases} x-3y=0 \\ y-2=0 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}.$$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} x-3y=0 \\ y-2=0 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} x-3y=0 \\ -2z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \to \text{hay dos ecuaciones repetidas: sistema}$$

indeterminado. No es posible saber el dinero de cada uno de ellos: hay infinitas posibilidades.

b) Si se sabe que Luís tiene 50 €, entonces Fernando tendrá 100 € y María, 300 €.

7. SISTEMAS NO LINEALES

Son sistemas en los que alguna de las ecuaciones que lo forman no es lineal. Habitualmente se resuelven empleando el método de sustitución; y, alguna vez, por igualación.
Estos sistemas suelen estar ligados al problema de encontrar los puntos de corte de dos gráficas en el plano. Las coordenadas de esos puntos son los valores *x*, *y* de la solución.

Practicamos con algunos ejercicios.

Ejercicio 6

Resuelve el sistema $\begin{cases} x-y=1 \\ 4x^2+y^2=13 \end{cases}$.

Solución:

$\begin{cases} x-y=1 \\ 4x^2+y^2=13 \end{cases} \to$ (se despeja *y* en *E*1 y se sustituye en *E*2) $\to \begin{cases} y=2\ \ - \\ 4x^2+(2x-1)^2=13 \end{cases}$.

Se opera y se resuelve la ecuación obtenida.

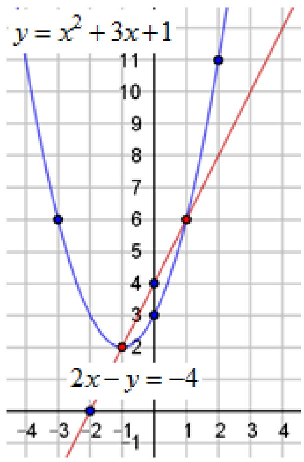
$$\Rightarrow 4x^2+4x^2-4x+1=13 \Rightarrow 8x^2-4x-12=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+384}}{16}=\frac{4\pm 20}{16} \Rightarrow \begin{cases} x=3/2 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Si $x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=2$. Solución: punto $\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$. Si $x=-1 \Rightarrow y=-3$. Solución: punto $(-1, -3)$.

Ejercicio 7

Halla los puntos de corte de la recta $2x-y+4=0$ con la parábola $y=x^2+2x+3$. Da la interpretación gráfica.

Solución:



Hay que resolver el sistema $\begin{cases} 2x-y\quad 4\quad 0 \\ y=x^2+2x+3 \end{cases}$.

Como *y* está despejada en *E*2, se sustituye en *E*1. Queda:

$2x-\left(x^2+2x+3\right)+4=0 \to$ operando y resolviendo la ecuación $\to$

$\to 2x-x^2-2x-3+4=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$.

Sustituyendo esos valores en *E*2, se obtiene:

para $x = 1$, $y = 6$; para $x = -1$, $y = 2$. Puntos $(1, 6)$ y $(-1, 2)$.

(Sustituyendo en *E*1 se obtienen los mismos resultados).

Gráficamente:

La recta $2x-y+4=0 \Leftrightarrow y=2x+4$, se representa dando dos de sus puntos: $(0, 4)$ y $(-2, 0)$.

La parábola puede trazarse viendo que pasa por los puntos: $(0, 3)$; $(1, 6)$; $(-1, 2)$; $(2, 11)$; $(-3, 6)$.

Ejercicio 8

Resuelve el sistema $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases}$.

Solución:

Puede resolverse por igualación: $\sqrt{x}=x^2 \to$ (se eleva la cuadrado y se saca factor común) $\to$

$\to \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(x^2\right)^2 \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x\left(x^3-1\right)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$.

Para $x = 0$, $y = 0$; para $x = 1$, $y = 1$. Los puntos solución son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -4x + 6y = 8 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$.

Da la interpretación geométrica de cada caso.

2. Discute, en función de los valores del parámetro *m*, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x + my = 5 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ -2x + my = 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x + y = m \end{cases}$; d) $\begin{cases} -2x + y = 5 \\ mx + y = m \end{cases}$.

3. Sea el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = -5 \\ -2x + my = 3 \end{cases}$.

a) Discútelo en función de los valores de *m*. b) Resuélvelo cuando $m = -1$.

4. Discute y resuelve cuando sean compatibles, en función de los valores de *a*, los sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - ay = 5 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 3x - 4y = a \\ -6x + ay = 4 \end{cases}$.

5. Un examen de tipo test consta de 100 preguntas, cada una con tres respuestas posibles de la que solo una es verdadera. El examen se puntúa así: pregunta acertada, suma 1 punto; pregunta fallada, resta 0,5; pregunta no contestada, 0 puntos. Si un examinado ha contestado 87 preguntas y obtenido una puntuación de 57, ¿cuántos aciertos tuvo?

6. La suma de edades de una madre y su hija es 42 años. Cuando la hija tenga la edad de la madre esa suma será de 90. ¿Cuántos años tienen cada una en la actualidad?

7. Una madre tiene cuatro veces la edad de su hija. Hace cuatro años su edad era seis veces mayor. ¿Qué edad tiene cada una?

8. La suma de las dos cifras de un número es 12. Si sus cifras se intercambian, el número que resulta es 54 unidades menor. ¿Cuál es ese número?

9. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 10. Si al cambiar de orden sus dígitos se obtiene un número que es 36 unidades menor, ¿cuál es ese número?

10. Se mezclan dos tipos de aceites de girasol, uno de 0,80 €/kg con otro de 1,00 €/kg, obteniéndose 30 kg de mezcla que se vende a 0,95 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo se emplearon?

11. Se mezclan dos tipos de café, A y B, cuyos precios respectivos son 4 €/kg y 5 €/kg.
a) Si se quiere que la mezcla salga a 4,40 €/kg, ¿en qué proporción hay que mezclarlos?
b) ¿Cuántos kilos de A hay que mezclar con 10 kilos de B para que la mezcla salga a 4,20 €/kg?
c) ¿Cuántos kilos hay que mezclar de cada tipo para obtener 100 kg de mezcla a 4,60 € el kg?

12. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 4x + 2y - 3z = 11 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - 2y + z = 8 \\ 2x - y - 2z = 3 \\ -x \qquad + z = 0 \end{cases}$.

13. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y \quad = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y \quad = 2 \end{cases}$.

14. En una reunión familiar hay 40 personas. La suma del número de hombres y de mujeres triplica el número de niños. El número de mujeres excede en 6 a la suma del número de hombres más el número de niños. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en la reunión?

15. Un agricultor compra semillas de garbanzos a 1,30 € el kilo, de alubias a 1,20 € el kilo y de lentejas a 0,80 € el kilo. En total compra 45 kilos de semillas y paga por ellas 43 €. Sabiendo que el peso de las lentejas es el doble que lo que pesan, conjuntamente, los garbanzos y las alubias, calcular qué cantidad de semillas ha comprado de cada legumbre.

16. Tres grupos de personas desayunan en una cafetería. El primer grupo toma 2 cafés, 1 refresco y 3 dulces, por lo que pagan 8,40 €; el segundo grupo toma 4 cafés, 1 refresco y 5 dulces, por lo que pagan 13,80 €; el tercer grupo toma 1 café, 2 refrescos y 2 dulces, por lo que pagan 7,50 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

17. En la fabricación de cierta marca de chocolate se emplea leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de cada kilogramo de los ingredientes son: leche, 0,80 euros; cacao, 4 euros; almendras, 13 euros. En un día se fabrican 9000 kilos de ese chocolate, con un coste total de 25800 euros. ¿Cuántos kg se utilizan de cada ingrediente?

18. La suma de las tres cifras de un número es 14. Si se intercambia la cifra de las decenas por la de las centenas, el número disminuye en 90 unidades. Además, la cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas y centenas. ¿Cuál es ese número?

19. Por la compra de 3 kg de almendras, 5 kg de avellanas y 2 kg de cacahuetes se han pagado 98 euros. Un kg de almendras cuesta lo mismo que un kg de avellanas más un kg de cacahuetes. Si se comprase 1 kg de cada fruto seco, el coste sería de 32 €. Calcula el precio por kg de cada fruto seco.

20. Resuelve los sistemas: a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$.

21. Resuelve el sistema: $\begin{cases} y = x^2 \quad 1 \\ x^2 + 7 = 2y \end{cases}$.

Teniendo en cuenta que las ecuaciones que interviene están asociadas a sendas parábolas, represéntalas y observa que se cortan en los puntos solución del sistema.

22. Resuelve los sistemas de segundo grado:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 - \quad x - y = 0 \\ (x+1)^2 + y = 3 \end{cases}$.

23. Halla las dimensiones de cada uno de los rectángulos que se indican:

a) El primer rectángulo tiene de perímetro 34 m y su diagonal mide 13 m.

b) El perímetro del otro rectángulo mide 100 m y su superficie 600 m^2.