

## TEMA 3. ECUACIONES

### 1. ECUACIONES: REPASO

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas.

Son ecuaciones, por ejemplo: a)  $3x = \frac{x-5}{2}$ ; b)  $2x^2 = x+1$ ; c)  $\sqrt{x^2+9} = 5$ .

También son ecuaciones, pero con dos incógnitas: d)  $x-2y = 6$ ; f)  $x^2 - y = 3$ ; g)  $x \cdot y = -4$ .

Solución de una ecuación es el conjunto de valores que puede tomar la incógnita (o las incógnitas) para que se cumpla la igualdad.

En las ecuaciones de arriba se tiene:

- Para a), su solución es  $x = -1$  → Sustituyendo  $x = -1$  en ambos miembros de la igualdad se obtiene: en el primer miembro:  $3 \cdot (-1) = -3$ ; en el segundo,  $\frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ . (Los resultados son iguales).
- La ecuación b) tiene dos soluciones, que son:  $x = 1$  y  $x = -\frac{1}{2}$ . Que  $x = 1$  es solución es evidente; comprobemos la segunda: primer miembro,  $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ; segundo miembro:  $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ .
- $\sqrt{x^2+9} = 5$  también tiene dos soluciones,  $x = -4$  y  $x = 4$ . Si en el radicando se sustituye  $x$  por  $-4$  o  $4$  se obtiene  $25$ , cuya raíz es  $5$ .
- La ecuación con dos incógnitas  $x-2y = 6$  tiene infinitos pares solución:  $(0, -3); (6, 0); (2, -2); \dots$
- Lo mismo pasa con las ecuaciones dadas en f) y en g). (Busca y comprueba algunos pares).

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones.

Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente a ella cuyas soluciones se obtengan de forma simple.

Las transformaciones habituales se fundamentan en las propiedades de las igualdades;

1. Si a los dos miembros de una igualdad (de una ecuación) se les suma o resta la misma expresión algebraica, la igualdad no varía: las soluciones de la ecuación no varían. (Esta propiedad permite trasponer términos de un miembro a otro de la ecuación: “lo que está sumando pasa restando”; ...).
2. Si los dos miembros de una igualdad (de una ecuación) se multiplican o dividen por un número distinto de  $0$ , la igualdad no varía: la ecuación resultante es equivalente a la dada. (Esta propiedad permite quitar denominadores y despejar: “lo que está dividendo pasa multiplicando”; ...)
3. Si  $A(x) \cdot B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$  o  $B(x) = 0$ . (Si un producto es  $0$ , alguno de los factores debe ser  $0$ ).

**Ejemplos:**

a)  $3x - 5 = 7x + 4 \rightarrow$  (se traspone  $3x$  al miembro de la derecha; y  $4$  al de la izquierda)  $\rightarrow$

$$-5 - 4 = 7x - 3x \rightarrow \text{(se opera)} \Rightarrow -9 = 4x \rightarrow \text{(se despeja)} \Rightarrow -\frac{9}{4} = x.$$

Nota: Aunque es bien sabido, la igualdad  $-9 = 4x \Leftrightarrow 4x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$ .

b) Si  $(x^2 - 4)(2x + 5) = 0 \Rightarrow (x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 2) \text{ o } (2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2})$ .

### Ecuaciones de primer grado con una incógnita

También se llaman lineales. Su forma estándar es  $ax + b = 0$ , siendo  $a$  y  $b$  números y  $x$  la incógnita.

Se resuelve así:  $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ .

Normalmente aparecen con más términos, con paréntesis, con denominadores, ..., pero siempre pueden transformarse hasta llegar a la forma estándar.

#### Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 3x + 2 &= 2x - \frac{x-5}{2} \rightarrow (\text{se multiplica por 2}) \Rightarrow 2(3x + 2) = 2\left(2x - \frac{x-5}{2}\right) \rightarrow (\text{se opera}) \\
 \Rightarrow 6x + 4 &= 4x - 2\left(\frac{x-5}{2}\right) \Leftrightarrow 6x + 4 = 4x - (x-5) \Leftrightarrow 6x + 4 = 4x - x + 5 \rightarrow (\text{se trasponen términos}) \\
 \Rightarrow 3x &= 1 \rightarrow (\text{se despeja}) \Rightarrow x = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

#### Resolución de problemas

Las ecuaciones se emplean, entre otras cosas, para resolver problemas. Para ello, en cada caso, debes:

- 1) Leer con detenimiento el enunciado.
  - 2) Determinar qué se pide; eso que se pide suele ser la incógnita, que puedes designar como  $x$ .
  - 3) Descubrir los datos que se dan. Esos datos pueden darse de manera implícita, lo que obliga a pensar.
  - 4) Establecer la relación entre los datos y la incógnita: esa relación da lugar a una ecuación.
  - 5) Resolver la ecuación.
  - 6) Comprobar que la solución es correcta y coherente.
- Practicamos con algunos ejercicios.

#### Ejercicio 1

Una oposición consta de dos pruebas eliminatorias. En la primera prueba son eliminados el 60 % de los presentados; en la segunda prueba se eliminan al 40 % de los que quedaban. Si el número de aprobados fue de 300 personas, ¿cuántas se presentaron a la oposición?

##### Solución:

La incógnita es el número de personas que se presentan. Si son  $x$  personas, como se sabe que:

- En la primera prueba se elimina al 60 % → El 60 % de  $x$  es  $0,60x$ .
- Pasan a la segunda prueba:  $x - 0,60x = 0,40x$ .
- De ellos (de  $0,40x$ ), son eliminados el 40 % → El 40 % de  $0,40x$  es  $0,40(0,40x) = 0,16x$ .
- Aprueban (los que se presentan a la 2<sup>a</sup> prueba, menos los eliminados):  $0,40x - 0,16x = 0,24x$ .

Como aprueban 300, entonces  $0,24x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{0,24} = 1250$ .

Se presentaron 1250 personas.

#### Ejercicio 2

La edad de un padre es el triple de la de su hija más 2 años. Si hace 5 años el padre cuadriplicaba en edad a la hija, ¿qué edades tienen padre e hija?

##### Solución:

Como hay dos momentos, hoy y hace 5 años, puede resultar útil organizar la información como sigue (suponiendo que la hija tiene hoy  $x$  años):

Edades	Hoy	Hace 5 años
Hija	$x$	$x - 5$
Padre	$3x + 2$	$3x - 3$

Hace 5 años, la edad del padre era cuatro veces la de la hija:  
 $\Rightarrow 3x - 3 = 4(x - 5) \Rightarrow 3x - 3 = 4x - 20 \Rightarrow 17 = x$ .

La hija tiene 17 años; el padre,  $3 \cdot 17 + 2 = 53$  años. (Hace 5 años, 12 y 48 →  $48 = 4 \cdot 12$ ).

## Ecuaciones de segundo grado

También se llaman cuadráticas. Su forma estándar es:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Sus soluciones son:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

A las soluciones también se les llama *raíces* de la ecuación.

Pueden tener dos, una o ninguna solución, dependiendo de que el radicando  $b^2 - 4ac$  sea mayor que 0, sea 0 o sea menor que 0, respectivamente. (A la expresión  $b^2 - 4ac$  se le llama discriminante).

Casos particulares (llamadas ecuaciones incompletas):

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow (\text{se despeja}) \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}. \text{ No siempre tiene solución.}$$

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow (\text{se saca factor común}) \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = -\frac{b}{a}.$$

### Ejemplos:

(Se sugiere al lector que resuelva cada ecuación por su cuenta, y que, después, contraste el resultado).

a)  $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$ . Dos soluciones.

b)  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \begin{cases} 3 \\ 3 \end{cases}$ . Solución  $x = 3$ , doble.

c)  $x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2}$ . No hay solución.

d)  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \begin{cases} -3 \\ 3 \end{cases}$ ;  $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{2}}$ . No tiene solución.

e)  $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ ;  $3x^2 + x = 0 \Rightarrow x(3x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1/3 \end{cases}$ .

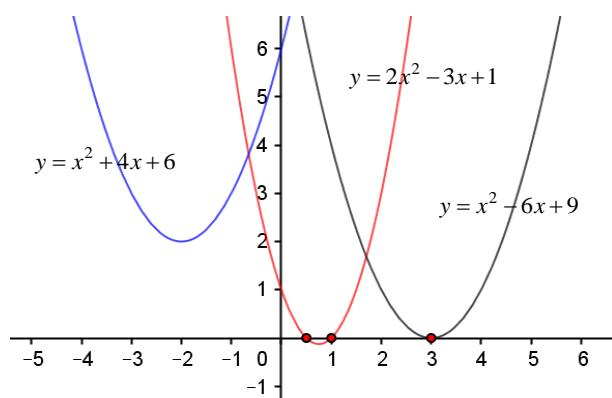
### Interpretación geométrica de las soluciones

Como sabes, la función cuadrática (estudiada en 3º y 4º de ESO), cuya expresión es  $y = ax^2 + bx + c$ , genera una gráfica que es una parábola.

Los puntos de corte de la parábola con el eje  $OX$  son aquellos en los que  $y = 0$ ; esto es, los puntos que cumplen que  $ax^2 + bx + c = 0$ : las soluciones de la ecuación de segundo grado.

Si la parábola corta dos veces al eje  $OX$ , la ecuación tiene dos soluciones; si corta solo una vez, la ecuación tendrá una solución doble; si no corta, la ecuación no tendrá solución.

- La gráfica de la función  $y = 2x^2 - 3x + 1$  corta al eje de abscisas en los puntos  $x = \frac{1}{2}$  y  $x = 1$ , que son las soluciones de la ecuación  $2x^2 - 3x + 1 = 0$ .
- La gráfica de la función  $y = x^2 - 6x + 9$  corta al eje de abscisas solo en el punto  $x = 3$ , que es la solución de la ecuación  $x^2 - 6x + 9 = 0$ .
- La gráfica de la función  $y = x^2 + 4x + 6$  no corta al eje de abscisas: la ecuación  $x^2 + 4x + 6 = 0$  no tiene soluciones reales.



Algunas aplicaciones y problemas

La expresión cuadrática  $ax^2 + bx + c$  aparece con mucha frecuencia en Matemáticas, en Física, en Economía, ... Para profundizar en su manejo se plantean algunos ejercicios teórico-prácticos.

**Ejercicio 3**

- a) Una solución de la ecuación  $x^2 + bx + 2 = 0$  es  $x = 2$ , ¿cuánto vale  $b$ ? Halla la otra solución.  
 b) Halla una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y -3.

Solución:

a) Si  $x = 2$  es solución de  $x^2 + bx + 2 = 0 \Rightarrow 4 + 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -3$ .

La ecuación es  $x^2 - 3x + 2 = 0$ : la otra solución es  $x = 1$ . (Compruébalo).

b) Las soluciones de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  son las raíces del polinomio  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .

Si esas raíces son  $x = 2$  y  $x = -3$ , entonces (por el teorema del factor),

$$P(x) = a(x - 2)(x - (-3)) = a(x - 2)(x + 3) \Rightarrow P(x) = a(x^2 + x - 6).$$

Por tanto, todas las ecuaciones de la forma  $a(x^2 + x - 6) = 0$  tienen por soluciones  $x = 2$  y  $x = -3$ ;  
 en particular,  $x^2 + x - 6 = 0$ .

**Ejercicio 4**

La altura  $h$  (en metros) de una pelota de tenis que es golpeada hacia arriba con una velocidad de 27 m/s, viene dada en función del tiempo (en segundos) por  $h(t) = 27t - 4,9t^2$ .

- a) ¿En qué instante está a 34,4 m del suelo?; b) ¿Cuánto tarda en dar el primer bote?

Solución:

- a) Si  $h = 34,4$  m, se obtiene la ecuación:

$$34,4 = 27t - 4,9t^2 \Leftrightarrow 4,9t^2 - 27t + 34,4 = 0 \Rightarrow t = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot 34,4}}{2 \cdot 4,9} = \frac{27 \pm 7,4}{9,8} = \begin{cases} 2 \\ 3,51 \end{cases}.$$

A los 2 segundos (subiendo) y a los 3,51 segundos (bajando) la pelota está a 34,4 m del suelo.

- b) Cuando da el primer bote, su altura  $h = 0 \rightarrow 27t - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow 4,9t(5 - t) = 0 \Rightarrow t = 0$  y  $t = 5$ .

La pelota tarda 5 segundos en dar el primer bote. (La solución  $t = 0$  indica el momento de golpeo).

**Ejercicio 5**

Dos personas trabajando conjuntamente realizan la limpieza de un parque en 2 horas. Si, por separado, uno de ellos necesitaría 3 horas más que el otro para hacer la misma limpieza del parque, ¿cuánto tardaría cada persona en realizar esa limpieza ella sola?

Solución:

Si la persona más rápida necesita  $x$  horas, la más lenta necesitará  $x + 3$ .

Por separado, en 1 hora, cada una limpiaría:  $\frac{1}{x}$  del parque, la más rápida; y  $\frac{1}{x+3}$ , la otra.

Trabajando juntas, limpiarían, en una hora,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$ .

Como se sabe que entre las dos tardan 2 horas, en 1 hora limpiarán  $1/2$  del parque.

Por tanto:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \rightarrow$  (operando)  $\frac{x+3}{x(x+3)} + \frac{x}{x(x+3)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$4x+6 = x(x+3) \Rightarrow 4x+6 = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

La persona más rápida tardaría 3 horas en limpiar el parque; la otra necesitaría 6 horas.

La solución  $x = -1$  carece de sentido en este contexto.

## 2. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS

### Ecuaciones de tercer grado

Son ecuaciones de la forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , siendo  $a, b, c$  y  $d$  números reales, con  $a \neq 0$ . Sólo pueden resolverse cuando tienen alguna solución entera: esa solución, si existe, será un número divisor del término independiente,  $d$ ; si no hubiese término independiente se saca factor común  $x$ . Las demás soluciones pueden hallarse descomponiendo en factores la ecuación inicial.

#### Observaciones:

- 1) Una ecuación de tercer grado tiene al menos una solución real, aunque no siempre pueda encontrarse. Sus soluciones pueden ser dobles o triples.
- 2) Las soluciones de la ecuación  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  son las raíces del polinomio  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Por tanto, vale todo lo dicho en el punto Factorización de polinomios del tema anterior. (También lo puedes recordar [AQUÍ](#)).
- 3) La descomposición factorial de una ecuación es una buena técnica para su resolución, pues si una ecuación, cualquiera que sea su grado, viene dada como producto de factores igualados a 0, las soluciones de esa ecuación son las de cada uno de los factores igualados a cero.

#### Ejemplos:

a) Para resolver la ecuación  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$  hay que encontrar alguna solución entera.

Si existe, será uno de los divisores de 6:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ .

Se prueba con  $x = 1 \rightarrow$  no vale, pues  $1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$ . Sí vale  $x = -1$ , pues  $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$ .

En consecuencia,  $x + 1$  es un factor de la ecuación; el otro factor se obtiene dividiendo:

$$\begin{array}{r} 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \Rightarrow (x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Por tanto:  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$ .

Las otras dos soluciones de la ecuación inicial son las de  $(x^2 - 5x + 6) = 0$ , que valen 2 y 3.

En consecuencia, las soluciones de la ecuación planteada son  $x = -1, x = 2$  y  $x = 3$ .

b) Para resolver  $x^3 - 9x = 0$  basta con sacar factor común:

$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Sus soluciones son  $x = 0, x = 3$  y  $x = -3$ .



Resuelve( $x^3 - 9x = 0$ ) →  
 $\{x = 3, x = 0, x = -3\}$

c) La ecuación  $x^3 + x^2 + 1 = 0$  no tiene ninguna solución entera, pues ni 1 ni -1, que son los únicos divisores del término independiente, lo son. Por tanto, en este caso no es posible dar la solución exacta.

d) La ecuación  $2x^3 - 5x^2 = 0$  puede escribirse como  $x^2(2x - 5) = 0$ .

Sus soluciones son  $x = \frac{5}{2}$  y  $x = 0$ , que es doble.

e) Las soluciones de la ecuación  $(x + 3)(4x^2 - 1)(x^3 + 8) = 0$  son las de cada uno de los factores

igualado a 0. Esto es: 
$$\begin{cases} x + 3 = 0 & \Rightarrow x = -3 \\ 4x^2 - 1 = 0 & \Rightarrow x = \pm 1/2 \\ x^3 + 8 = 0 & \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2 \end{cases}$$

### Ecuaciones biquadradas

Son ecuaciones de grado cuatro, de la forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ . (No tienen términos en  $x^3$  ni en  $x$ ).

Haciendo el cambio  $x^2 = t$  queda  $at^2 + bt + c = 0$ .

Esta igualdad, tiene como máximo dos soluciones,  $t_1$  y  $t_2$ . Por tanto, las soluciones de la ecuación biquadrada original serán cuatro a lo sumo, que se calculan como sigue:

$$x^2 = t_1 \Rightarrow x_1 = +\sqrt{t_1}, x_2 = -\sqrt{t_1}; \quad x^2 = t_2 \Rightarrow x_3 = +\sqrt{t_2}, x_4 = -\sqrt{t_2}.$$

#### Ejemplos:

a) La ecuación  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 2 \Rightarrow x = \pm 1$  y  $x = \pm\sqrt{2}$ .

Esta ecuación tiene cuatro soluciones reales:  $x = 1$ ;  $x = -1$ ;  $x = \sqrt{2}$ ;  $x = -\sqrt{2}$ .

b) La ecuación  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \Rightarrow t = 4, t = -9 \Rightarrow x = \pm 2$  y  $x = \pm\sqrt{-9}$ , que no existe. Esta ecuación tiene dos soluciones reales:  $x = -2$  y  $x = 2$ .

c) Si la ecuación biquadrada es reducida resulta más fácil de resolver. Por ejemplo:

$$\rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\rightarrow x^4 - 16 = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[4]{16} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}. \quad \rightarrow x^4 + 16 = 0 \text{ no tiene soluciones reales.}$$

## 3. ECUACIONES CON RADICALES

Estas ecuaciones contienen al menos un término en el que la incógnita está bajo el signo radical. Se resuelven aislando la raíz y elevando al cuadrado. Suelen dar lugar a una ecuación de segundo grado. Una vez halladas las soluciones hay que comprobar que son válidas, pues al elevar al cuadrado la expresión inicial pueden *ganarse* soluciones.

#### Ejemplos:

a) Para resolver  $x - \sqrt{x} = 6$ , se procede así:

1) Se trasponen términos para aislar la raíz  $\rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - 6 = \sqrt{x}$ .

2) Se elevan al cuadrado los dos miembros  $\rightarrow (x - 6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x$ .

3) Se resuelve la ecuación obtenida  $\rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9, x = 4$ .

4) Se comprueban las soluciones halladas:

$x = 9$  es válida, pues:  $9 - \sqrt{9} = 9 - 3 = 6$ ;  $x = 4$  no es válida,  $4 - \sqrt{4} = 4 - 2 = 2 \neq 6$ .

b) Para resolver  $\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x-1} = 1$  se procede como sigue:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x-1} = 1 &\Rightarrow \sqrt{2x+5} = 1 + 2\sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{2x+5})^2 = (1 + 2\sqrt{x-1})^2 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow 2x+5 = 1 + 4\sqrt{x-1} + 4(x-1) \Rightarrow 2x+5 = 1 + 4\sqrt{x-1} + 4x - 4 \rightarrow \text{se aísla la 2ª raíz y se hace} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{otra vez el cuadrado} \rightarrow -2x+8 &= 4\sqrt{x-1} \rightarrow (-2x+8)^2 = (4\sqrt{x-1})^2 \Rightarrow \\ 4x^2 - 32x + 64 &= 16(x-1) \Rightarrow 4x^2 - 48x + 80 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0. \end{aligned}$$

Las soluciones de la última ecuación son:  $x = 10, x = 2$ .

Solo es válida la solución  $x = 2$ .

La *solución*  $x = 10$  no es válida, pues:

$\sqrt{2 \cdot 10 + 5} - 2\sqrt{10 - 1} = 1 \rightarrow \sqrt{25} - 2\sqrt{9} = 1 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow -1 = 1$ , que no es posible.

Resuelve( $\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x-1} = 1$ )  $\rightarrow$   
 $\{x = 2\}$



Observaciones:

Al intentar resolver estas ecuaciones son frecuentes los errores. El más común es hacer mal la operación de elevar al cuadrado.

1) Por ejemplo, está mal lo siguiente:  $x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow (x - \sqrt{x})^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 - x = 6 \Rightarrow x = 3$ .

→ Se ha hecho mal el cuadrado del primer miembro.

2) En la ecuación b) anterior, se pueden dar, entre otros, los siguientes errores:

•  $\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow (\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x-1})^2 = 1^2 \Rightarrow 2x+5 - 4(x-1) = 1 \rightarrow$  se comienza mal al hacer mal el cuadrado del primer miembro.

• Se comienza bien  $(\sqrt{2x+5})^2 = (1+2\sqrt{x-1})^2 \Rightarrow 2x+5 = 1 + 2(x-1) + 4\sqrt{x-1} \rightarrow$  se hace mal el cuadrado del segundo miembro.

→ (\*) el cuadrado:  $(1+2\sqrt{x-1})^2 = (1+2\sqrt{x-1})(1+2\sqrt{x-1}) = 1 + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-1} + (2\sqrt{x-1})^2 = 1 + 4\sqrt{x-1} + 4(x-1)$ .

## 4. ECUACIONES RACIONALES

Son de la forma  $\frac{A(x)}{B(x)} + C(x) = 0$ , donde, al menos,  $B(x)$  es una expresión polinómica; la incógnita aparece en algún denominador. ( $A(x)$  y  $C(x)$  pueden ser números).

Para resolverla hay que transformarla en otra de tipo polinómico. Para ello se recomienda:

1) Eliminar denominadores; 2) Resolver paréntesis; 3) Agrupar términos; ...

• Caso particular: la ecuación  $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$  es equivalente a  $A(x) = 0$ .

**Ejemplos:**

a) Para resolver la ecuación  $\frac{x}{x+1} + 2 = \frac{3x+1}{x}$  puede procederse así:

1) Se suman los términos del primer miembro. Resulta:  $\frac{x + 2(x+1)}{x+1} = \frac{3x+1}{x}$ .

2) Se quitan denominadores (multiplicando “en cruz”; después, se opera y simplifica):

$$x(x+2(x+1)) = (3x+1)(x+1) \Leftrightarrow x^2 + 2x^2 + 2x = 3x^2 + 3x + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 3x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow 0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$



Resuelve( $x/(x+1)+2=(3x+1)/x$ ) →  
 $\{x = -1/2\}$

b) La ecuación  $\frac{x^2 + 5x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x+5) = 0$ . Sus soluciones son  $x = 0$  y  $x = -5$ .

→ Si una fracción es 0  $\Rightarrow$  el numerador debe ser 0.

c) La ecuación  $\frac{2x-2}{x-5} - 1 + x = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x-5} = 1 - x \rightarrow$  (el denominador *pasa* multiplicando)  $\rightarrow$   
 $\Rightarrow 2x-2 = (x-5)(1-x) \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$  y  $x = 4$ .

Observación:

Son frecuentes los errores a la hora de operar. Se pueden corregir operando ordenadamente y comprobando la solución hallada en la ecuación inicial. (Te sugiero que intentes resolver los ejemplos anteriores de otra manera; después, comprueba que las soluciones coinciden).

## 5. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Estas ecuaciones pueden presentarse asociadas a cualquier expresión, pero en algún término figura el valor absoluto.

Todas se resuelven teniendo en cuenta el significado del valor absoluto:

$$|E(x)| = c \Leftrightarrow E(x) = c \text{ o } E(x) = -c.$$

Esto implica que cada ecuación da lugar a dos ecuaciones.

**Ejemplos:**

a)  $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ 2x-1 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$ . Las soluciones son  $x = 2$  y  $x = -1$ . (Compruébalo).

b) La ecuación  $|x^2 - 3x| = 2$  da lugar a  $x^2 - 3x = 2$  y a  $x^2 - 3x = -2$ , equivalentes a su vez a  $x^2 - 3x - 2 = 0$  y a  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , cuyas soluciones son:  $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ ,  $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ .

c)  $\frac{4}{x} = |x| \Leftrightarrow 4 = x|x|$ . Da lugar a dos ecuaciones, dependiendo de considerar  $x > 0$  o  $x < 0$ .

→ Si  $x > 0$  (como  $|x| = x$ )  $\Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = -2$  o  $x = 2$ .

La solución  $x = -2$  no es válida, pues si se sustituye:  $\frac{4}{-2} = -2 \neq |-2|$ .

→ Si  $x < 0$ , como  $|x| = -x$ , de  $4 = x|x| \Rightarrow 4 = x(-x) \Rightarrow 4 = -x^2$ , que no tiene solución. (Recuerda que  $x^2 \geq 0$  y  $-x^2 \leq 0$ ).

d) La ecuación  $\frac{|x|}{2-x} = 1 \Leftrightarrow |x| = 2-x$ , que a su vez define dos ecuaciones:

$$|x| = \begin{cases} -x = 2-x, \text{ si } x < 0 \\ x = 2-x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x = 2-x \Rightarrow 0 = 2, \text{ que es imposible;} \\ x = 2-x, \text{ cuya solución es } x = 1. \end{cases}$$



Resuelve  
(abs(x)/(2-x)=1)  
→ {x=1}

e)  $2x|4-x| = 0$  es más fácil: cada uno de los factores debe ser 0.

Sus soluciones son;  $2x = 0$  o  $4-x = 0 \Rightarrow x = 0$  o  $x = 4$ .

## 6. OTRAS ECUACIONES

### Ecuaciones exponenciales

En estas ecuaciones la incógnita aparece en un exponente. Por ejemplo:  $3^x + 2 \cdot 3^{x-1} - 10 \cdot 3^{x-2} = 45$ . Se resolverán en el Tema 14.

### Ecuaciones logarítmicas

En estas ecuaciones la incógnita aparece ligada a un logaritmo. Por ejemplo:  $\log(3x-2) = 2 \log x$ . Se resolverán en el Tema 14.

### Ecuaciones trigonométricas

En estas ecuaciones la incógnita aparece ligada a una razón trigonométrica: seno, coseno o tangente. Por ejemplo:  $\cos(2x) = -1$ . Se resolverán en el Tema 6.

## PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $3(x-2) - \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}(3-2x)$ ;      b)  $\frac{2-x}{2} - \frac{4x-3}{5} = 2x-5 - \frac{1}{4}(2x-3)$ .

**2.** Opera las siguientes expresiones algebraicas y después resuelve la ecuación obtenida.

a)  $x^2 = \frac{x}{2} + 3$ ;      b)  $(x-3)(x+2) = 6$ ;      c)  $2x-1 = \frac{-4}{x-3}$ ;      d)  $x + \frac{1}{x} = 2$ .

**3.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $(x-5)(-2x+3) = 0$ ;      b)  $\frac{x^2-x-2}{x+4} = 0$ ;      c)  $\frac{x}{x-3} = \frac{2x}{x-2}$ ;      d)  $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ .

**4.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\frac{x}{x+1} = \frac{3x+1}{x} - 2$ ;      b)  $\frac{2x^2-3x}{x+3} = 0$ ;      c)  $\frac{4}{x+3} = 0$ ;      d)  $\frac{x^2-3x}{x^2+1} - 2 = 0$ .

**5.** a) Sabiendo que una solución de la ecuación  $x^2 + bx - 5 = 0$  es  $x = 1$ , ¿cuánto vale  $b$ ? Halla la otra solución.

b) Sabiendo que una solución de la ecuación  $x^2 - 3x + c = 0$  es  $x = -2$ , ¿cuánto vale  $c$ ? Halla la otra solución.

c) Una solución de la ecuación  $ax^2 + 6x = 0$  es  $x = 3$ , ¿cuánto vale  $a$ ? Halla la otra solución.

**6.** Demuestra que la suma y el producto de las raíces de la ecuación de segundo grado

$ax^2 + bx + c = 0$ , valen, respectivamente,  $-\frac{b}{a}$  y  $\frac{c}{a}$ .

**7.** Halla una ecuación de segundo grado que cumpla las siguientes condiciones:

- a) Sus soluciones son:  $x = 3$  y  $x = 7$ .      b) Sus soluciones son:  $x = 3$  y  $x = 7$ ; y el coeficiente  $c = 42$ .  
c) Sus soluciones son:  $x = -1$  y  $x = 2$ .      d) Sus soluciones son:  $x = -1$  y  $x = 2$ ; y el coeficiente  $a = 3$ .

**8.** Discute y resuelve en función de  $p$ :

a)  $x^2 + px = 0$ ;      b)  $x^2 - 4x + p = 0$ ;      c)  $px^2 + 4x - 4 = 0$ .

**9.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ ;      b)  $4x^3 + 4x^2 - 3x = 0$ ;      c)  $2x^3 - 10x^2 + 14x - 6 = 0$   
d)  $(x^2 + 2x)(x^2 - 5x + 4) = 0$ ;      e)  $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ ;      f)  $(x-1)(4x^2 - 1)(x^3 + 8) = 0$ .

**10.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ ;      b)  $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$ ;      c)  $x^4 - 25x^2 = 0$ ;      d)  $x^4 - 81 = 0$ .

**11.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\sqrt{x+3}x = 4$ ;      b)  $\sqrt{x+5} - 3 = 0$ ;      c)  $1 - 3x = \sqrt{3x-1}$   
d)  $2\sqrt{x+3} - 5 = x - 10$ ;      e)  $2\sqrt{x-1} = 8 - \sqrt{3x+1}$ ;      f)  $\sqrt{15-x} - 2x = 6$ .

**12.** Resuelve las siguientes ecuaciones con raíces:

a)  $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-3} = 2$ ;      b)  $\sqrt{4x} - \sqrt{2x+1} - 1 = 0$ ;      c)  $\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{1-x}$ .

**13.** Resuelve la ecuación:  $(\sqrt{x} - 4)(7 - 4\sqrt{x}) = 5$ .

Nota: En muchos de los problemas propuestos pueden emplearse recursos informáticos para comprobar tu resultado. Hazlo en algunos.



**14.** Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a)  $|2x+1|=5$ ;      b)  $|x^2+2x|=4x$ ;      c)  $\frac{x+1}{2}=|x|$ ;      d)  $\frac{|x-2|}{x}=1$ .

**15.** Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a)  $|x+3|=2x-1$ ;      b)  $|x^2-3x|=4$ ;      c)  $|x+6|=x^2$ ;      d)  $\frac{2}{x}=|x-1|$ .

**16.** Resuelve la ecuación:  $|x-3|=2x$ . Da una interpretación geométrica del resultado.

**17.** La suma de tres múltiplos consecutivos de 3 vale 477. ¿Qué números son?

**18.** Un grifo llena un depósito en 6 horas; si otro grifo tarda 4 horas en llenar un depósito igual.

a) ¿Cuánto llenan entre los dos en una hora?

b) ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre los dos juntos?

**19.** Entre dos caños llenan una piscina en 12 horas. Si un caño solo tarda 10 horas más que el otro, ¿cuánta tardaría cada uno por separado?

**20.** El doble de un número más el cuadrado de su mitad es igual a 45. Halla el número.

**21.** Descompón el número 40 en dos partes tales que su producto sea 256.

**22.** Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo antideslizante de 1,5 m de ancho. La piscina es 15 m más larga que ancha. Si la superficie del pasillo es de 114 m<sup>2</sup>, ¿cuáles son las dimensiones de la piscina?

**23.** Con un trozo rectangular de cartón, que es 10 cm más largo que ancho, se construye una caja sin tapa de volumen 3000 cm<sup>3</sup>, cortando un cuadrado de 5 cm de lado en cada esquina y doblando por los bordes. ¿Qué dimensiones tenía el cartón?

**24.** El trayecto de ida y vuelta, entre dos ciudades A y B, distantes 200 km, se realiza en 4,5 horas. Si la ida se hace a una velocidad media que es 20 km/h mayor que a la vuelta, ¿a qué velocidad media se hicieron cada uno de los trayectos?

**25.** El trayecto de ida entre dos ciudades A y B se hizo a una velocidad media de 100 km/h. Si la vuelta se hizo a una velocidad media de 80 km/h, ¿cuál fue la velocidad media del trayecto completo?

**26.** Las expresiones  $I(x) = -2x^2 + 51x$  y  $G(x) = x^2 - 3x + 96$ , con  $0 \leq x \leq 18$ , representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años,  $x$ , transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valores de  $x$ , desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) Determina la expresión que representa los beneficios en función de  $x$ . Indica los beneficios o pérdidas cuando  $x = 2$ ,  $x = 10$ ;  $x = 17$ .