DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

Para estudiar la derivabilidad de una función definida a trozos, debemos estudiar la derivabilidad en los intervalos abiertos y en los puntos de cambio.

$$f(x)=\begin{cases} f1(x) & x<a1 \\ f2(x) & a1\leq x<a2 \\ \dots \end{cases}$$

f1(x) f2(x) ...

a1 a2 $\mathbb{R}$

SI UNA FUNCIÓN NO ES CONTINUA EN $x=a$ $\Rightarrow$ TAMPOCO SERÁ DERIVABLE EN ESE PUNTO.

INTERVALOS ABIERTOS

$(-\infty,a1),\ (a1,a2),\dots$

Para que una función sea derivable en un intervalo abierto, la función debe ser derivable en todos los puntos del intervalo.

Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son siempre derivables en sus **dominios**.

PUNTOS DE CAMBIO

$x=a1,\ x=a2,\dots$

En los puntos de cambio, una función es derivable si se cumple:

1. Existe derivadas laterales
2. Y coinciden $f'(a^-)=f'(a^+)$

Ejemplo

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-4 & x<0 \\ \dfrac{1}{x-1} & 0\leq x<5 \\ 4 & x\geq 5 \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} 6x & x<0 \\ ? & x=0 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & 0<x<5 \\ ? & x=5 \\ 0 & x>5 \end{cases} \overset{\star}{=} \begin{cases} 6x & x<0 \\ \nexists & x=0 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & 0<x<5 \\ \nexists & x=5 \\ 0 & x>5 \end{cases}$$

INTERVALOS ABIERTOS

INTERVALOS	DERIVADA	DOMINIO	DERIVABILIDAD	DERIVABILIDAD EN INTERVALO ABIERTO
$(-\infty,0)$	$f'(x)=6x$	$D=\mathbb{R}$	Derivable en $\mathbb{R}$	Derivable en $(-\infty,0)$
$(0,5)$	$f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$	$D=\mathbb{R}-\{1\}$	Derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$	Derivable en $(0,1)\cup(1,5)$
$(5,+\infty)$	$f'(x)=0$	$D=\mathbb{R}$	Derivable en $\mathbb{R}$	Derivable en $(5,+\infty)$

LA FUNCIÓN f(X) ES CONTINUA EN $\mathbb{R}-\{0,1,5\}$, POR LO QUE EN $x=0$, $x=1$ y $x=5$ NO ES DERIVABLE. SE PUEDE COMPROBAR ASÍ. $\Rightarrow$

PUNTOS DE CAMBIO ★

$x=0$

1. Existe $f'(0^-)=0$, $f'(0^+)=-1$
2. $f'(0^-)\neq f'(0^+)$

No es derivable en $x=0$

$x=5$

1. Existe $f'(5^-)=-1/16$, $f'(5^+)=0$
2. $f'(5^-)\neq f'(5^+)$

No es derivable en $x=5$

LA FUNCIÓN f(x) ES DERIVABLE EN $\mathbb{R}-\{0,1,5\}$