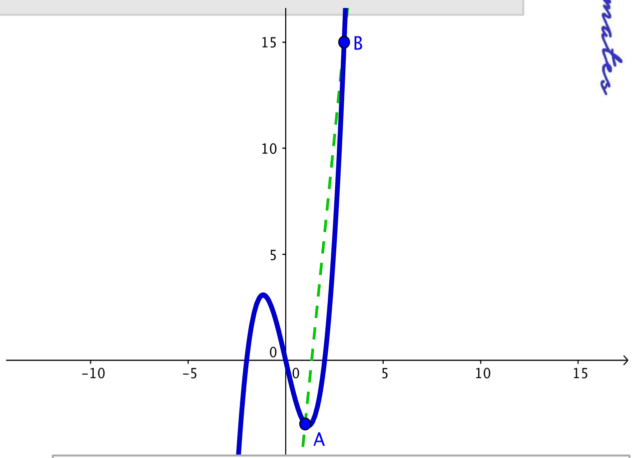
DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

TASA DE VARIACIÓN MEDIA : T.V.M.

$$T.V.M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La T.V.M. de f(x) en [a,b] coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos (a,f(a)) y (b,f(b))



$f(x) = x^3 - 4x$

$$\text{TVM en } [1,3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{18}{2} = 9$$

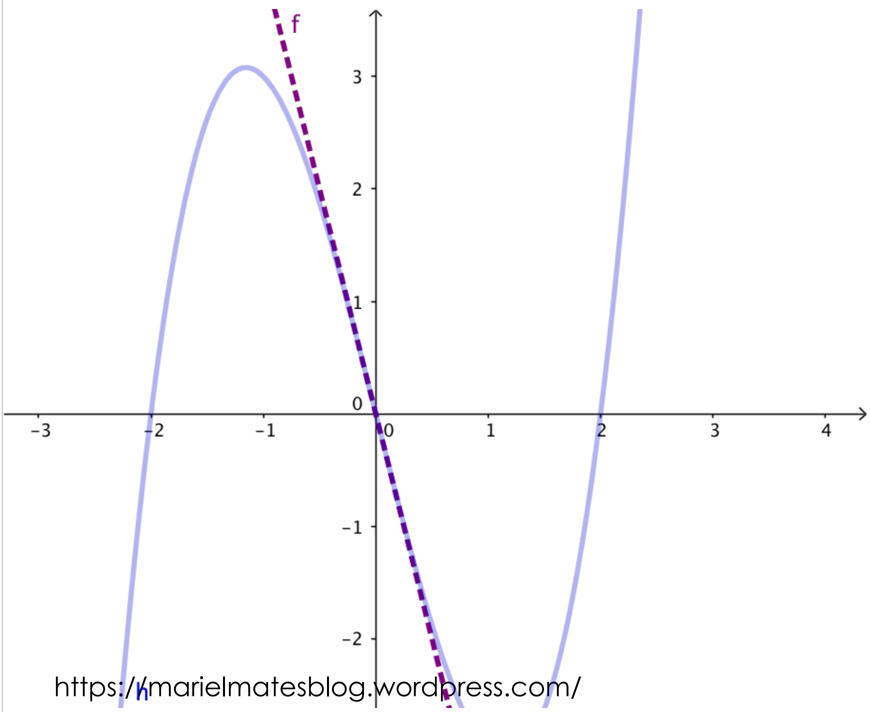
Recta que pasa por (1,-3) y (3,15)

y=9x-12, pendiente =9

TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA : T.V.I.

$$T.V.I. = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si existe este límite <u>T.V.I. = f´(a)</u> (<u>**derivada de f(x) en x=a**</u>) y además coincide con la pendiente de la recta tangente a f(x) en x=a.



ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A f(x) EN x=a

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Calcula f(a), f´(x) y f´(a)

$f(x) = x^3 - 4x$

[TVI en x=3]=23

Recta tangente a f(x) en x=3

y=23x-54 (pendiente =23)

DERIVADA DE UNA FUNCION

FUNCIÓN	DERIVADA	FUNCIÓN	DERIVADA
$y=k$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=f(x)^n$	$y'=nf(x)^{n-1}f'(x)$
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot Lna$	$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}\cdot Lna f'(x)$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}f'(x)$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e$	$y=\log f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
$y=Lnx$	$y'=\frac{1}{x}$	$y=Lnf(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$
$y=senx$	$y'=cosx$	$y=senf(x)$	$y'=cosf(x)f'(x)$
$y=cosx$	$y'=-senx$	$y=cosf(x)$	$y'=-senf(x)f'(x)$
$y=tgx$	$y'=(1+tg^2x)=\frac{1}{(cosx)^2}$	$y=tgf(x)$	$y'=(1+tg^2f(x))f'(x)=\frac{f'(x)}{(cosf(x))^2}$

PROPIEDADES

$$y=k\,f(x) \Rightarrow y'=k\,f'(x)$$

$$y=f(x)\pm g(x) \Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$y=f(x)\cdot g(x) \Rightarrow y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

REGLA DE LA CADENA

$$y=f(g(x)) \Rightarrow y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

ESTUDIO DE FUNCIONES

marielmates

1 DOMINIO

FUNCION	Polin $=P(x)$	$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$\sqrt[n]{P(x)}$	$Log(f(x))$	$e^{f(x)}$
DOMINIO	R	$R-\{x: Q(x)=0\}$	n par $D=R-\{x: P(x)<0\}$ n impar $D=R$	$R-\{x: f(x)\leq 0\}$	$D=D(f)$

2 CORTE CON LOS EJES

Eje x: $y=0$ $(-,0)$

Eje y: $x=0$ $(0,-)$

3 ASINTOTAS

Asíntota vertical $x=a$ si $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$

Asíntota horizontal $y=b$ si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$

Asíntota oblícua $y=mx+n$ si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=m$, $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=n$

4 SIMETRIA

Simetría par: f(x) es simétrica respecto al eje y $f(x)=f(-x)$.

Simetría impar: f(x) es simétrica respecto al origen de coordenadas, $f(x)=-f(-x)$

5 MONOTONIA CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

f(x) es creciente en (a,b) si $f'(x)>0$, $x\in(a,b)$.

f(x) es decreciente en (a,b) si $f'(x)<0$, $x\in(a,b)$.

Estudio de la monotonía:

- $f'(x)=0$, las soluciones son los posibles extremos relativos $x=a_1, a_2, \ldots$
- En una recta representamos todos los puntos obtenidos en el paso anterior, además de los **puntos que no están en el dominio** y estudiamos el signo de $f'(x)$ en esos intervalos:
- Si $f'(x)>0$, f(x) es creciente en ese intervalo

  Si $f'(x)<0$, f(x) es decreciente en ese intervalo

6 EXTREMOS RELATIVOS MAXIMOS Y MINIMOS

Los posibles máximos y mínimos son los puntos que hacen $f'(x)=0$.

- $x=a$ es máximo si antes del punto la función crece y después decrece: MAXIMO $(a, f(a))$
- $x=b$ sera mínimo si antes del punto la función decrece y después crece. MÍNIMO $(b, f(b))$

7 CURVATURA: CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

- f(x) es convexa en (a,b) si $f''(x)>0$ $(\cup)$
- f(x) es cóncava en (a,b) si $f''(x)<0$ $(\cap)$

Estudio de la curvatura:

- $f''(x)=0$, las soluciones son los posibles puntos de inflexión $x=a_1, a_2, \ldots$
- En una recta representamos todos los puntos obtenidos en el paso anterior, además de los **puntos que no están en el dominio** y estudiamos el signo de $f''(x)$ en esos intervalos.
- Si $f''(x)>0$, f(x) es convexa en ese intervalo.

  Si $f''(x)<0$, f(x) es concava en ese intervalo.

8 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Los posibles puntos de inflexión son los puntos que hacen $f''(x)=0$.

- $x=a$ será punto de inflexión si el signo de $f''(x)$ cambia antes y después de este punto: PUNTO DE INFLEXION $(a, f(a))$

9 TABLA DE VALORES

Si hiciese falta construir una tabla de valores para completar los puntos obtenidos en el estudio previo.

10 REPRESENTACIÓN

Con toda la información obtenida anteriormente representar la función.

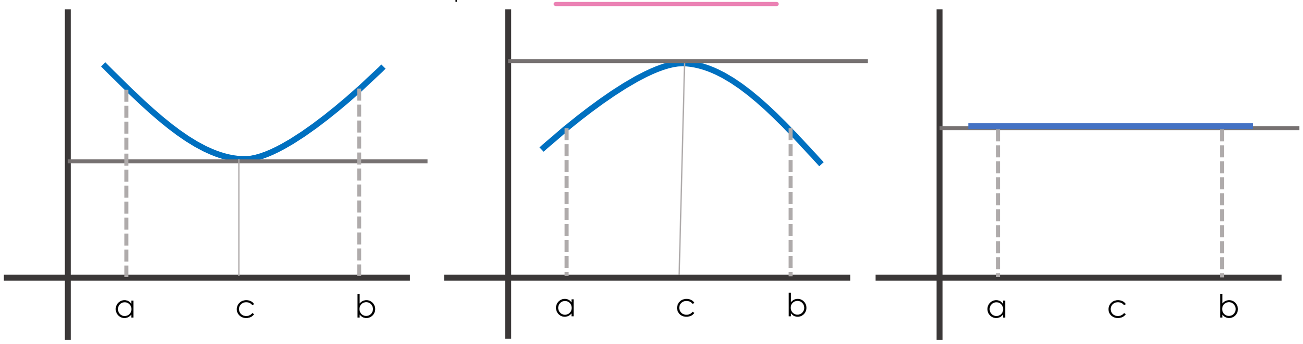
TEOREMA DE ROLLE

Si $f(x)$ es

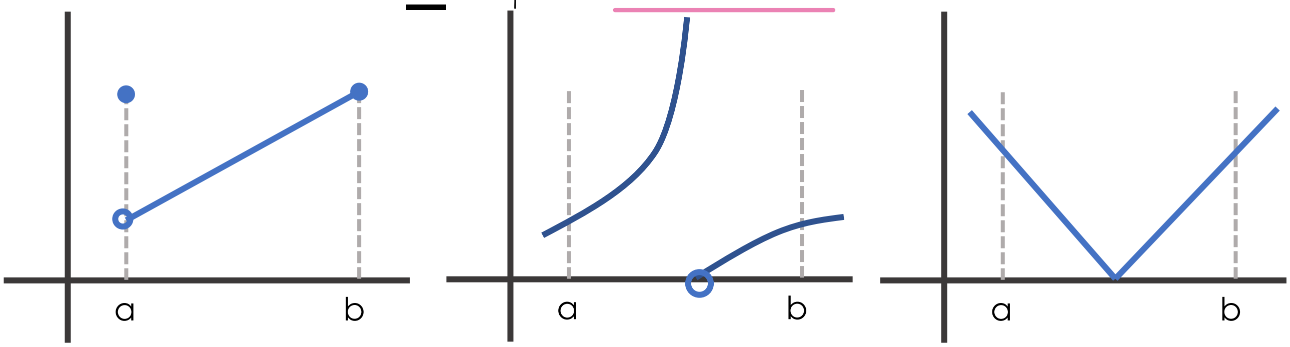
- una función continua en $[a,b]$
- derivable en (a,b)
- y $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow$ Existe al menos un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=0$

Estas tres funciones cumplen el teorema de Rolle



Estas tres funciones **NO** cumplen el teorema de Rolle

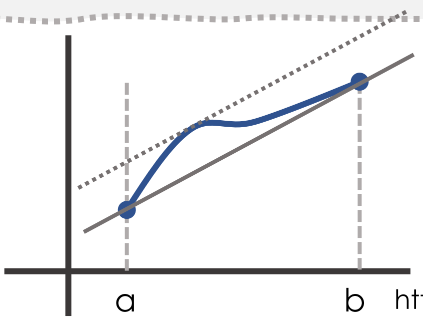


TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE LAGRANGE

Si $f(x)$ es

- una función continua en $[a,b]$
- derivable en (a,b)

$\Rightarrow$ Existe al menos un número $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



REGLA DE L'HOPITAL

Si f y g son

- funciones derivables en un entorno de $x=a$ y continuas en a
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$
- existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}\longrightarrow \text{L'Hopital}\longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\frac{0}{0}\longrightarrow \text{L'Hopital}\longrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2$$

Si f y g son

- funciones derivables en un entorno de $x=a$ y continuas en a
- $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$
- existe $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}\longrightarrow \text{L'Hopital}\longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{2x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\longrightarrow \text{L'Hopital}\longrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{2}=\frac{\infty-0}{2}=\infty$$