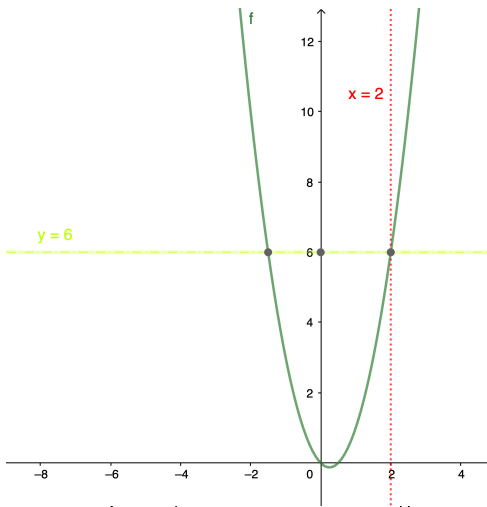
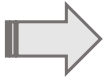


LÍMITES

IDEA INTUITIVA DE LIMITE

1 Sea $f(x)=2x^2-x$, estudiamos que hace la función $f(x)$ cuando x se acerca a $x=2$

x	f(x)
1	1
1,5	3
1,9	5,32
1,99	5,93
1,999	5,993



x	f(x)
3	16
2,5	10
2,1	6,72
2,01	6,07
2,001	6,007

Cuando x se acerca a 2 por la izquierda, $f(x)$ se acerca a 6

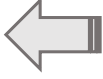
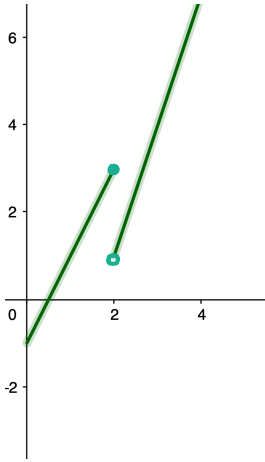
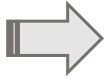
Cuando x se acerca a 2, $f(x)$ se acerca a 6

Cuando x se acerca a 2 por la derecha, $f(x)$ se acerca a 6

2
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 2 \\ 3x-5 & x > 2 \end{cases}$$

EL $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ EXISTE, SI EXISTEN $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ Y SON IGUALES

x	f(x)
1	1
1,5	2
1,9	2,8
1,99	2,98
1,999	2,998



x	f(x)
3	4
2,5	2,5
2,1	1,3
2,01	1,03
2,001	1,003

Cuando x se acerca a 2 por la izquierda, $f(x)$ se acerca a 3.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe, ya que los límites laterales son diferentes.

Cuando x se acerca a 2 por la derecha, $f(x)$ se acerca a 1.

PARA CALCULAR UN LÍMITE, SE SUSTITUYE EN LA FUNCIÓN EL VALOR AL QUE TIENDEN LAS x .

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x-2 = 4$$

El límite cuando $x \rightarrow \infty$ de una función polinómica es $+\infty$ o $-\infty$, según que el signo del término de mayor grado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^3-3x+1 = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^3 = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow a} b = b$
- $\lim_{x \rightarrow a} bf(x) = b \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$
- $\lim_{x \rightarrow a} (\log f(x)) = \log \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

OPERACIONES CON 0 y ∞

SUMAS

$$\begin{aligned}
 a + (+\infty) &= +\infty \\
 a + (-\infty) &= -\infty \\
 (+\infty) + (+\infty) &= +\infty \\
 (-\infty) + (-\infty) &= -\infty \\
 (-\infty) + \infty &= \text{INDETERMINACIÓN}
 \end{aligned}$$

PRODUCTOS

$$\begin{aligned}
 a > 0 \quad & \begin{cases} a(+\infty) = +\infty \\ a(-\infty) = -\infty \end{cases} \\
 a < 0 \quad & \begin{cases} a(+\infty) = -\infty \\ a(-\infty) = +\infty \end{cases} \\
 0(+\infty) &= \text{INDETERMINACIÓN}
 \end{aligned}$$

POTENCIAS

$$\begin{aligned}
 \text{Si } a > 1, \quad & \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = 0 \end{cases} \\
 \text{Si } 0 < a < 1, \quad & \begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}} = +\infty \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$0^\infty = 0 \quad \infty^\infty = \infty$$

$$\begin{aligned}
 0^0 &= \text{INDETERMINACIÓN} \\
 \infty^0 &= \text{INDETERMINACIÓN} \\
 1^\infty &= \text{INDETERMINACIÓN}
 \end{aligned}$$

DIVISIONES

$$\begin{aligned}
 \text{Si } a > 0, \quad & \frac{-\infty}{a} = -\infty, \quad \frac{+\infty}{a} = +\infty \\
 \text{Si } a < 0, \quad & \frac{-\infty}{a} = +\infty, \quad \frac{+\infty}{a} = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{0}{0} &= \text{INDETERMINACIÓN} \\
 \frac{\infty}{\infty} &= \text{INDETERMINACIÓN} \\
 \frac{k}{0} &= \text{INDETERMINACIÓN}
 \end{aligned}$$

$$\frac{k}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{0} = \pm\infty \quad \frac{0}{\infty} = 0 \quad \frac{0}{a} = 0$$



RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{k}{0}, \infty - \infty, 1^\infty, 0^\infty$

El $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, si existen $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y son iguales.

$$\frac{k}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k}{0}$$

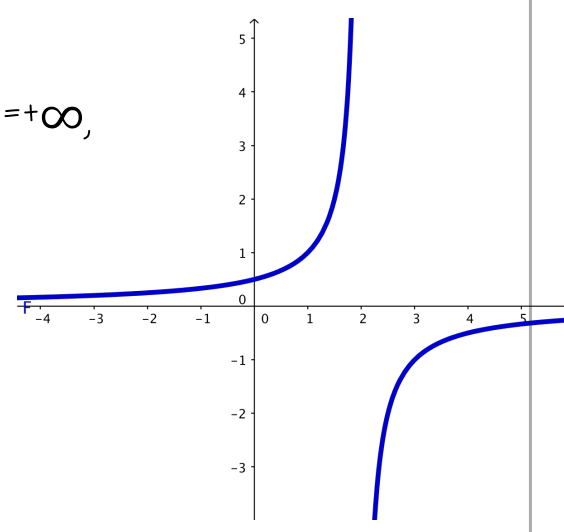
RESOLUCIÓN. Es necesario calcular los límites laterales $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-x-2}{x^2-4} \right) = \frac{-4}{0} \text{ IND,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{-x-2}{x^2-4} \right) = \frac{-4}{0^+} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-x-2}{x^2-4} \right) = \frac{-4}{0^-} = +\infty,$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-x-2}{x^2-4} \right).$$



$$\frac{\infty}{\infty}$$

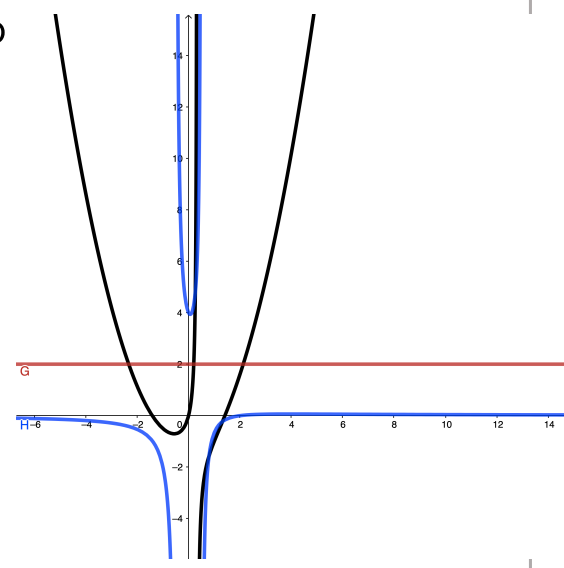
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm \frac{\infty}{\infty}$$

RESOLUCIÓN. Cogemos los términos de mayor grado del numerador y del denominador y después simplificamos. Volvemos a aplicar el límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-4x}{3x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-4x}{x^3-2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{4x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$



$$\infty - \infty$$

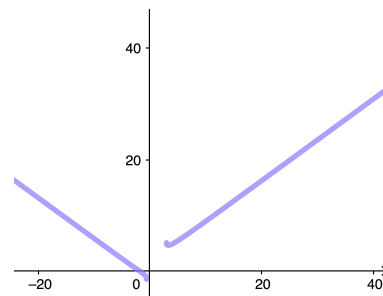
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} = \infty - \infty$$

RESOLUCIÓN

- Si los términos de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$ tienen distinto grado o si tienen el mismo grado pero los coeficientes son distintos, el límite valdrá $+\infty$ ó $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} = -\infty,$$

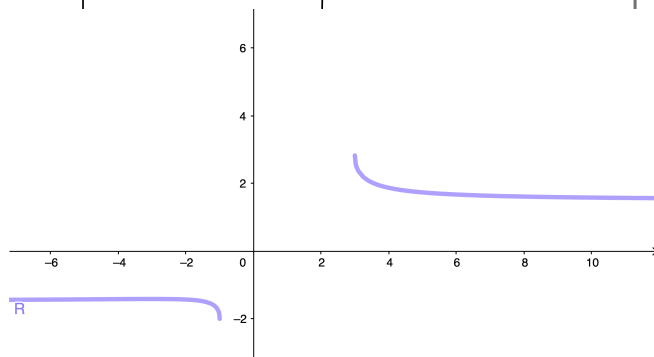


- Si los términos mayores de $P(x)$ y $Q(x)$ tienen mismo grado e igual coeficiente, se multiplica y divide la expresión por su conjugado. Se opera, se simplifica y se vuelve a aplicar el límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} = \infty - \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x})}{(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 1) - (x^2 - 3x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + 3x}{(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x})} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) - Q(x) = \infty - \infty$$

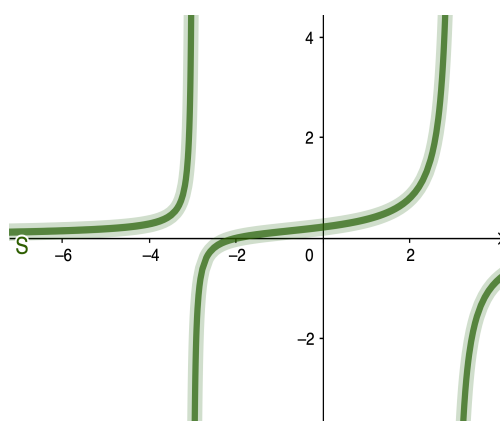
- Operamos las funciones hasta obtener una única fracción. Volvemos a aplicar el límites.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right) = \infty - \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1 - (x + 3)}{x^2 - 9} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-x - 2}{x^2 - 9} \right) = \frac{-5}{0} \text{ IND,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{-x - 2}{x^2 - 9} \right) = \frac{-5}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{-x - 2}{x^2 - 9} \right) = \frac{-5}{0^-} = +\infty,$$

por lo que $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$ no existe



$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$$

RESOLUCIÓN

➤ Si no hay radicales. Factorizamos numerador y denominador, simplificamos y volvemos a aplicar el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}$$

➤ Si hay radicales. Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9} &= \frac{0}{0}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)}{(x^2-9)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6+x-9}{(x^2-9)(\sqrt{6+x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{6+x}+3)} = \frac{1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x)Q(x) = 0 \cdot \infty$$

RESOLUCIÓN Los transformamos en $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Operar y simplificar.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0 \cdot \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

$$1^{\pm \infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x)Q(x) = 1^{\pm \infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x)Q(x) = 1^{\pm \infty}$$

RESOLUCIÓN Aplicamos la regla $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x)Q(x) = e^{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} Q(x)(P(x)-1)}$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x^2} = 1^{\infty},$$

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \left(\frac{x+1}{x-2} - 1\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 \left(\frac{3}{x-2}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2}{x-2}} = e^{\infty} = +\infty$$

ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN $f(x)$

UNA **ASÍNTOTA** ES UNA RECTA A LA QUE LA FUNCIÓN SE APROXIMA.

ASÍNTOTAS VERTICALES

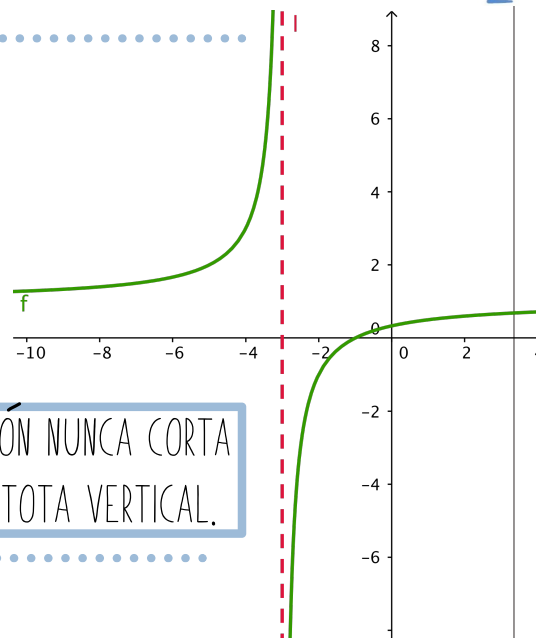
Son rectas verticales de la forma $x=a$.

Posibles asíntotas verticales: puntos que no están en el dominio y extremos de intervalos del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty, x=a \text{ es A.V.}$$

EJEMPLO. $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$ $x=-3$ es asíntota vertical

UNA FUNCIÓN NUNCA CORTA UNA ASÍNTOTA VERTICAL.



ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Son rectas horizontales de la forma $y=b$ que cumplen

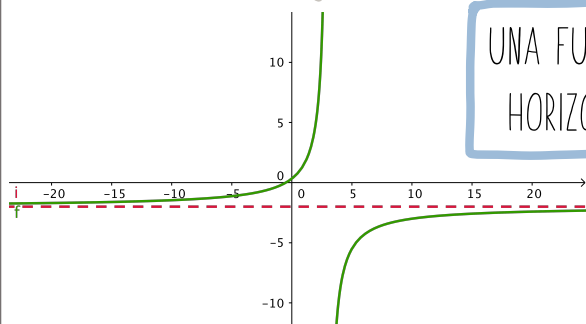
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b$$

si grado Numer > grado Denom, entonces no hay asíntota horizontal.

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ si grado Numer = grado Denom, $y = \frac{\text{coef Término ppal}}{\text{Coef Término ppal}}$ es asíntota horizontal.

si grado Numer < grado Denom, entonces $y=0$ es asíntota horizontal

UNA FUNCIÓN PUEDE CORTAR UNA ASÍNTOTA HORIZONTAL EN VALORES PEQUEÑOS DE x .



Observa si
 $f(+100) > < \text{A.H.}$
 $f(-100) > < \text{A.H.}$

EJ $f(x) = \frac{2x+1}{-x+3}$, $y = -2$ A.H.

EJ $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3}$, $y=0$ A.H

ASÍNTOTA OBLICUA

Son rectas de la forma $y=mx+n$ donde

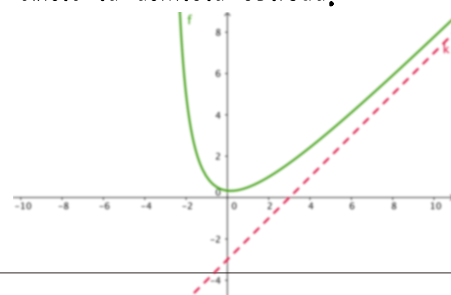
$$m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - mx)$$

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y el grado numerador = grado denominador + 1, entonces existe la asíntota oblicua.

EJEMPLO. $f(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$
 $y=x-3$ es asíntota oblicua

UNA FUNCIÓN PUEDE CORTAR UNA ASÍNTOTA OBLICUA EN VALORES PEQUEÑOS DE x .



UNE CADA ECUACION CON SU CORRESPONDIENTES ASÍNTOTAS Y SU GRÁFICA.

ECUACION

ASINTOTAS

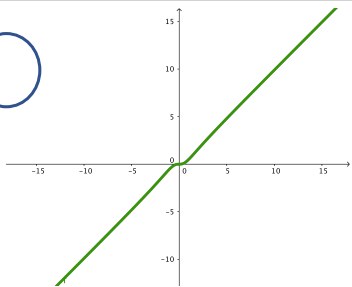
GRAFICA



$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$



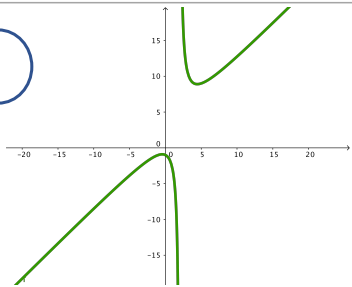
$$Y=2$$
$$X=3$$



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$



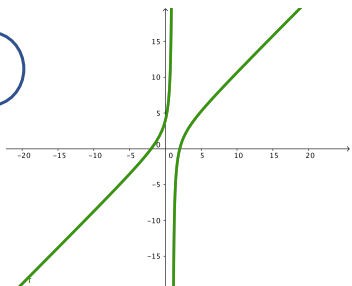
$$X=+2$$
$$X=-2$$
$$Y=1$$



$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$$



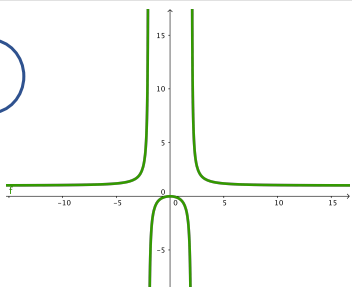
$$X=0$$



$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$$



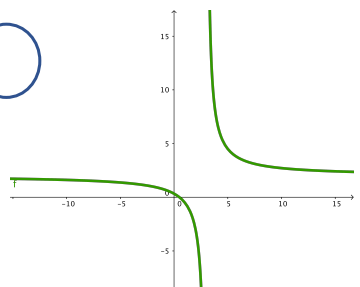
$$Y=X$$



$$f(x) = \frac{x^2}{2 - x}$$



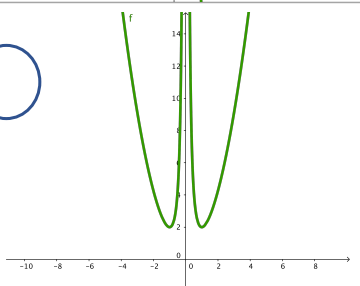
$$X=2$$
$$Y=X+2$$



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$



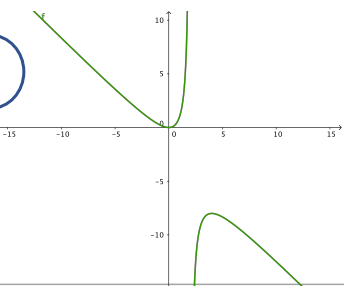
$$X=1$$
$$Y=X+1$$



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$



$$X=2$$
$$Y=-X-2$$

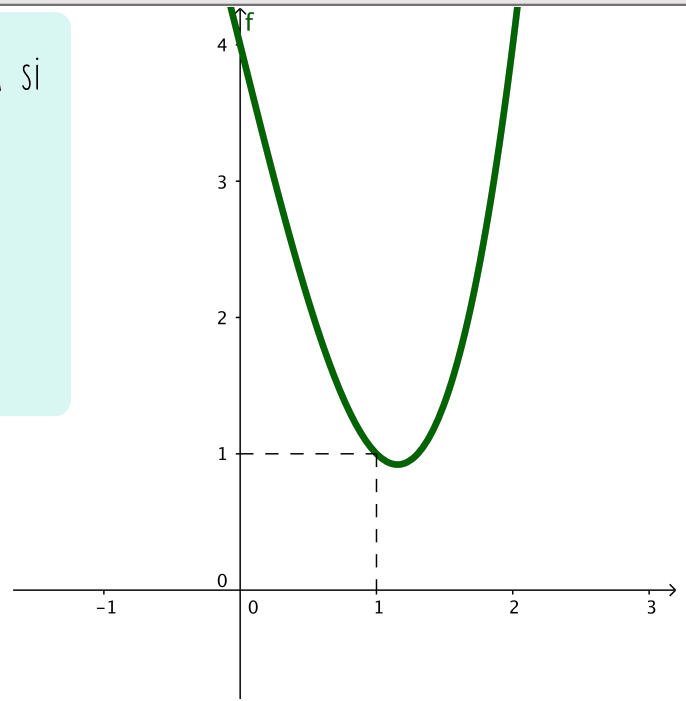


CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función $f(x)$ es **continua** en el punto $x=a$ si

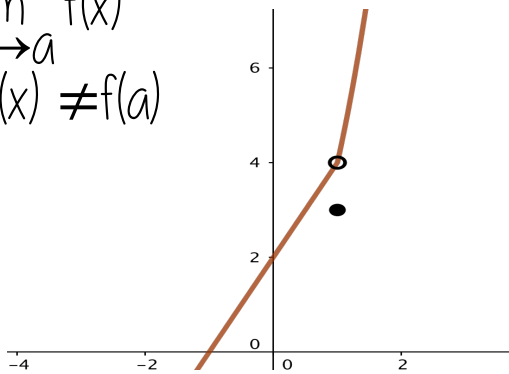
- 1 Existe $f(a)$
- 2 Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Una función $f(x)$ es **discontinua** en el punto $x=a$ si no es continua en él.



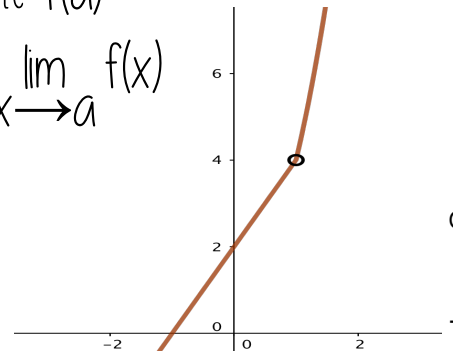
DISCONTINUIDAD EVITABLE en $x=a$ si

- 1 Existe $f(a)$
- 2 Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$



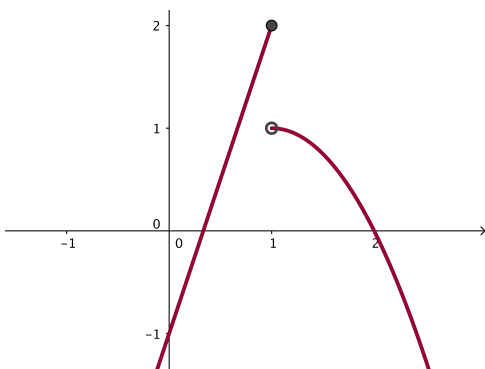
Y también,

- 1 No existe $f(a)$
- 2 Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$



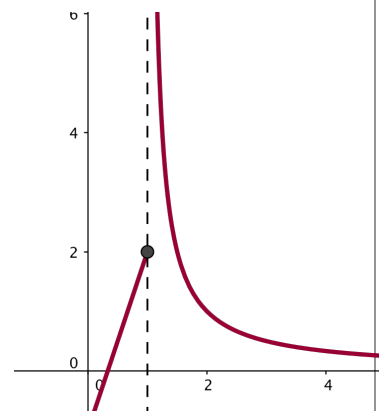
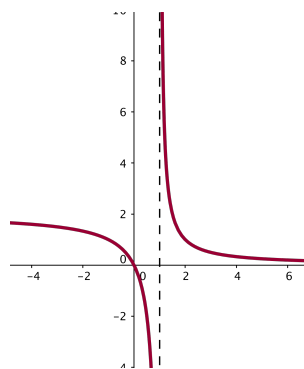
DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO FINITO en $x=a$ si

- no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- existen los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, son finitos pero distintos.



DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO en $x=a$ si

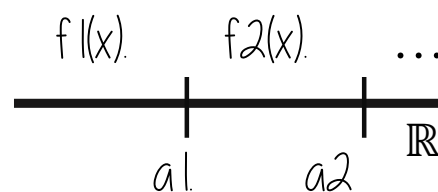
- no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- si existen los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y por lo menos uno de ellos es infinito



CONTINUIDAD DE UNA FUNCION DEFINIDA A TROZOS

Para estudiar la continuidad de una funcion definida a trozos, debemos estudiar la continuidad en los intervalos abiertos y en los puntos de cambio.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a_1 \\ f_2(x) & a_1 \leq x < a_2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



INTERVALOS ABIERTOS

$(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots$

Para que una función sea continua en un intervalo abierto, la función debe ser continua en todos los puntos del intervalo.

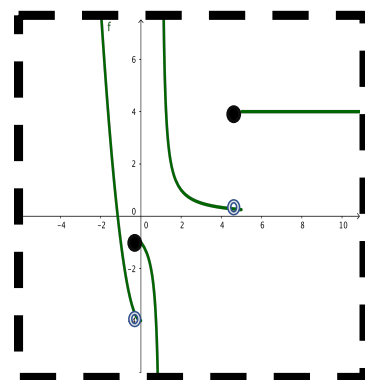
Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son siempre continuas en su dominio.

PUNTOS DE CAMBIO

$x = a_1, x = a_2, \dots$

En los puntos de cambio una función es continua si se cumplen las tres hipótesis:

- 1 Existe $f(\text{punto})$
- 2 Existe $\lim_{x \rightarrow \text{punto}} f(x)$
- 3 $\lim_{x \rightarrow \text{punto}} f(x) = f(\text{punto})$



Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4 & x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & 0 \leq x < 5 \\ 4 & x \geq 5 \end{cases}$$

INTERVALOS ABIERTOS

INTERVALOS	FUNCION	DOMINIO	CONTINUIDAD	CONTINUIDAD EN INTERVALO ABIERTO
$(-\infty, 0)$	$f_1(x) = 3x^2 - 4$	$D = \mathbb{R}$	Continua en $\mathbb{R}$	Continua en $(-\infty, 0)$
$(0, 5)$	$f_2(x) = \frac{1}{x-1}$	$D = \mathbb{R} - \{1\}$	Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$	Continua en $(0, 1) \cup (1, 5)$
$(5, +\infty)$	$f_3(x) = 4$	$D = \mathbb{R}$	Continua en $\mathbb{R}$	Continua en $(5, +\infty)$

PUNTOS DE CAMBIO $x=0$,

1 Existe $f(0) = -1$

2 Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? : $\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 - 4 = -4$

, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$ Al ser los límites laterales distintos pero finitos, la función no es continua en $x=0$ y presenta una discontinuidad de salto finito.

$x=5$

1 Existe $f(5) = 4$

2 Existe $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$? , $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{4}$,

$\lim_{x \rightarrow 5^+} 4 = 4$. Al ser los límites laterales distintos pero finitos, la función no es continua en $x=5$ y presenta una discontinuidad de salto finito.

LA FUNCION $f(x)$ ES CONTINUA EN $\mathbb{R} - \{0, 1, 5\}$