

EJERCICIO 3

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

EL DENOMINADOR NO
PUEDE SER CERO

a) $D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$\hookrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

b) ASÍNTOTAS:

b.1) ASÍNTOTA VERTICAL: PODRÍAN HABER ASÍNTOTAS VERTICALES EN $x = -1$ Y $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

HAY ASÍNTOTA VERTICAL
EN $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

HAY ASÍNTOTA VERTICAL
EN $x = 1$

b.2) ASÍNTOTA HORIZONTAL: PARA CALCULARLO HACEROS EL LÍMITE CUANDO x TIENDE A $+\infty$ Y $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (IND)}$$

COMO EL GRADO DEL NUMERADOR
ES IGUAL AL GRADO DEL DENOMINADOR

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

OCURRE LO MISMO CUANDO x TIENDE A $-\infty$,
POR LO TANTO, HAY ASÍNTOTA HORIZONTAL EN
 $y=1$ CUANDO x TIENDE A $+\infty$ Y A $-\infty$.

b.3) NO HAY ASÍNTOTA OBLÍCUA $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

c) CORTES CON LOS EJES.

• EJE X ($f(x)=0$)

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0 \longrightarrow x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x = \pm 2$$

$$(2, 0) \text{ y } (-2, 0)$$

• EJE Y ($x=0$)

$$f(0) = \frac{0^2 - 4}{0^2 - 1} = 4$$

$$\boxed{(0, 4)}$$

D) PARA ESTUDIAR LA MONOTONÍA Y LOS EXTREMOS RELATIVOS, REALIZAMOS LA PRIMERA DERIVADA:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

IGUALAMOS $f'(x)$ A CERO

$$\frac{6x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{6} = 0 \quad \boxed{\text{POSIBLE MAX o MIN}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) < 0 & f(x) = 0 & f(x) > 0 & f'(x) > 0 & & & \\ -\infty & & -1 & 0 & +1 & & +\infty \end{array}$$

DECRECIENTE DEC. CREC. CRECIENTE

$$x=0 \text{ (MÍNIMO)}$$

$$(0, 4)$$